This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 5708.82.3

SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,

AND HIS WIDOW,

ELIZA FARRAR,

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY."

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

MOTTEROZ, Adm.-Direct. des Imprimeries réunies, A, rue Mignon, 2, Paris

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

ERNEST SONGAYLO

Examinateur d'admission à l'École Centrale des Arts et Manufactures
Chef de travaux graphiques et Répétiteur à la même École
Professeur de Géométrie descriptive au Collège Chaptal

PREMIÈRE PARTIE

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

TEXTE

PARIS

ÉDITÉ PAR LA BIBLIOTHÈQUE DE KURNIK

1882

Math 5708.82.3

Farrar fund.
(Text & Atlas).

PRÉFACE

L'ouvrage que nous publions est le développement des leçons et des exercices graphiques donnés par nous, pendant plus de dix années, aux élèves de mathématiques spéciales (1re section) du collège Chaptal.

Constamment préoccupé d'introduire dans cet enseignement les perfectionnements modernes des études géométriques, nous avons, indépendamment de notre travail personnel, dû puiser à diverses sources une large part des procédés exposés dans nos leçons. A ce point de vue, nos fonctions à l'école Centrale comme répétiteur et chef de travaux du cours de géométrie descriptive, professé avec tant de talent par M. Eugène Rouché, depuis 1867, nous ont été surtout utiles. Elles ont été pour nous une source féconde d'indications et de rapprochements, et nous saisissons avec joie cette occasion d'exprimer à M. Eugène Rouché tous nos sentiments de gratitude.

Pour être fructueuse l'étude de la géométrie descriptive, plus que toute autre, exige que la théorie soit immédiatement suivie d'applications nombreuses. Nous croyons donc être utiles aux élèves en donnant, après chacune des théories importantes, des exercices qui s'y rapportent. Ces exercices sont presque tous résolus afin que, après avoir épuisé ses ressources personnelles, le lecteur puisse vérifier et compléter le résultat de ses recherches. Il devra alors, non pas lire le texte, mais s'habituer à lire l'épure et à ne

recourir au texte qu'après avoir terminé cette lecture, qui constitue le plus puissant moyen d'acquérir en géométrie descriptive de sérieuses connaissances.

En terminant, nous adressons tous nos remerciements à M. Hellé qui a bien voulu se charger d'exécuter, non seulement la gravure des planches, mais qui en a aussi fait tous les dessins avec une rare habileté.

Paris, 20 septembre 1832.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

LIVRE PREMIER

DES LIGNES DROITES ET DES PLANS

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. But de la géométrie descriptive. — Le dessin ordinaire donne une image qui, sans aucune étude préalable, indique à tout spectateur la forme des objets figurés; il faut, pour atteindre ce but, que l'artiste altère dans des proportions variables les dimensions des corps représentés. Ces altérations ne peuvent convenir ni au géomètre, qui doit exécuter sur un plan les tracés relatifs aux figures de l'espace; ni à l'architecte, ni à l'ingénieur, pour lesquels le dessin n'offre d'utilité que dès qu'il peut fournir les positions relatives, la forme et surtout les dimensions des diverses parties des corps qu'il détermine. Afin de lui donner cette exactitude mathématique, on a recours aux méthodes de transformation des figures indiquées en géométrie ; la transformée plane représentant la figure de l'espace peut s'obtenir d'une infinité de manières, mais la plus naturelle est la méthode de projection à laquelle l'illustre Monge donna le nom de *géométrie descriptive*.

Les propriétés de la figure représentée et de la figure représentative sont corrélatives, c'est-à-dire qu'à toute propriété de l'une des figures correspond une propriété de l'autre, et réciproquement. Ce lien permit à Monge d'établir avec une extrême élégance un grand nombre de propriétés géométriques ; nous donnerons dans la suite de ce Traité, sur cette intéressante question, des développements utiles; mais, pour l'instant, bornons-nous à cet aperçu qui va nous permettre d'indiquer, à côté du but principal de la géométrie descriptive, un principe géométrique des plus féconds.

La géométrie descriptive a donc deux objets : le premier, de donner le moyen de représenter sur

un plan — surface à deux dimensions — les corps qui en ont trois ; le second objet est d'offrir une méthode de géométrie rationnelle appelée par M. Chasles méthode de *transmutation des figures*.

DE L'INFINI

2. Une droite offre un seul point à l'infini. — En effet, un point sur une droite est dit à l'infini quand sa distance à un quelconque des points de cette ligne est plus grande que toute longueur imaginable. Cela posé, soient, sur une droite, deux points fixes A, B, et un point mobile M ; toute valeur particulière attribuée au rapport de simple section $\frac{MA}{MB}$ détermine la position du point M; mais quand ce point s'éloigne à l'infini, le rapport de simple section prend une valeur unique 1; par suite, on doit admettre, afin de donner aux solutions géométriques une plus grande généralité, qu'à cette valeur unique du rapport correspond un seul point ; ou, en d'autres termes, que les deux extrémités d'une ligne droite sont jointes par un seul point que l'on appelle *point à l'infini de cette ligne*. En outre, on doit également admettre, pour éviter les conséquences absurdes, que les points à l'infini n'ont pas, comme les autres points, une grandeur nulle.

3. Droite à l'infini d'un plan. — Une droite quelconque d'un plan offre un seul point à l'infini; par suite, le lieu des points à l'infini d'un plan est coupé par une droite en un point : ce lieu est donc une droite.

4. Plan à l'infini de l'espace. — Le lieu des droites à l'infini de tous les plans de l'espace forme une surface, et comme celle-ci n'est coupée par une droite qu'en un seul point, on voit que le lieu des points à l'infini de l'espace est un plan.

DES PROJECTIONS

5. Projection centrale (*fig.* 1). — Si un faisceau de droites S. ABC... a ses rayons SA, SB, SC, ... dirigés vers les divers points d'une figure A, B, C, ..., qui peut se réduire à un point, sa section par un plan P, que l'on appelle plan de projection, donnera une transformée *a*, *b*, *c*, ... de la figure de l'espace, nommée par Poncelet la *projection centrale* de la figure A, B, C, ..., sur le plan P; dans ce système, le faisceau S. ABC. ... constitue le *faisceau projetant;* les rayons AS, SB, SC, ... sont les *projetantes;* le sommet S du faisceau est le *centre de projection*.

6. Perspective régulière (*fig.* 1). — La projection centrale prend également le nom de perspective régulière de la figure projetée; l'œil du spectateur est alors au centre de projection S; les projetantes donnent dans ce cas les *rayons visuels*, et le plan P reçoit le nom de *tableau*.

7. Ombre au flambeau (*fig.* 1). — Enfin on peut encore considérer la projection centrale comme l'ombre au flambeau sur le plan P de la figure donnée A, B, C, ...; dans cette hypothèse, le sommet du faisceau S devient le point lumineux ou flambeau, et les projetantes constituent les rayons lumineux.

8. Projection conique. — On entend par *surface conique* celle qui est engendrée par une droite assujettie à passer par un point fixe S appelé *sommet*, en s'appuyant sur une ligne également fixe AB nommée *directrice* (*fig.* a_1).

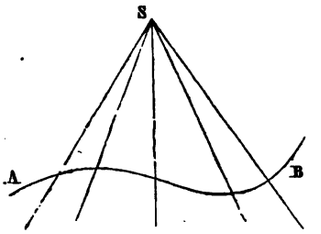


FIG. a_1.

Cette définition justifie la dénomination de projection conique que l'on donne à la projection centrale.

9. Projection cylindrique. — On entend par surface cylindrique celle qui est engendrée par une droite qui se déplace parallèlement à une droite donnée D, en s'appuyant sur une courbe fixe AB (*fig.* a_2).

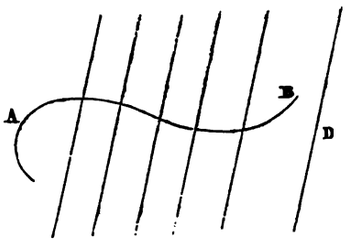


FIG. a_2.

D'après cette définition, la projection conique, quand le centre de projection S_∞ (*fig.* 2) est à infini dans une direction donnée D, se change en projection cylindrique.

10. Projection oblique (*fig.* 2). — On appelle projection oblique, *perspective cavalière* ou *ombre au soleil*, toute projection cylindrique faite dans une direction D, non perpendiculaire au plan de projection P.

11. Projection orthogonale (*fig.* 3). — Lorsque les projetantes sont toutes perpendiculaires au plan de projection, on dit que la projection est orthogonale.

REMARQUE. — De la projection centrale découlent diverses projections que nous venons de définir; conséquemment, toute propriété projective établie pour la première sera applicable aux autres.

12. Théorème. — *La projection d'une droite sur un plan est une droite.* — En effet, les projetantes des divers points de la droite considérée forment un plan qui, par sa rencontre avec le plan de projection, détermine une droite donnant la projection de la première; donc en général la projection d'une droite sur un plan est une autre droite.

Ce théorème tombe en défaut lorsque la droite de l'espace contient le centre de projection ; car, dans ce cas, les projetantes coïncident toutes avec la droite projetée, et, par suite, la projection se réduit à un seul point.

13. Théorème. — *Les projections sur un plan de droites parallèles donnent un faisceau (fig. 4).* — Soient A, B, C, ... des droites parallèles et S leur centre de projection. La parallèle SΣ aux droites A, B, C, ... perce le plan de projection au point Σ; comme ce point est la projection commune des points à l'infini a_∞, b_∞, c_∞, ... sur les droites données, on voit qu'il est également le sommet d'un faisceau $\Sigma.\alpha\beta\gamma$ ... dont les rayons sont les projections des parallèles considérées. Dans le cas de projections cylindriques obliques ou orthogonales, la droite SΣ aura deux points distincts à l'infini : l'un dans la direction des droites projetées, l'autre dans la direction des projetantes ; cette droite sera donc sur le plan à l'infini de l'espace (§ 4) ; par suite, le point Σ sera également à l'infini ; *les projections obliques ou orthogonales de droites parallèles sont donc parallèles.*

DÉTERMINATION DU POINT

14. *Un point n'est pas déterminé par une de ses projections sur un plan (fig. 5).* — Soient S le centre de projection et *a* une projection du point ; tous les points A_1, A_2, A_3, ... de la projetante S*a* répondent à la question ; le point de l'espace est donc indéterminé.

Pour détruire cette indétermination, on donne deux projections *a*, *a'* du point sur deux plans P, Q, qui peuvent d'ailleurs se confondre, et les centres de projection respectifs S, Σ; le point de l'espace se trouve alors à la rencontre A des deux projetantes S*a*, Σ*a'*.

PROJECTION ORTHOGONALE

15. On emploie généralement en géométrie descriptive les projections orthogonales sur deux plans rectangulaires V,H (*fig.* 6) ; bien que ceux-ci puissent offrir une direction quelconque, l'un d'eux est supposé horizontal et l'autre vertical ; leur intersection qu'on nomme *ligne de terre* se désigne généralement par les lettres *x*, *y*. On suppose encore que le spectateur se trouve debout sur le plan horizontal, dans l'angle 1, et qu'il regarde le plan vertical ; la lettre *x* se place alors à sa gauche et la lettre *y* à sa droite.

La convention que nous venons d'établir au sujet de la position du spectateur montre : 1° que le plan horizontal est partagé par la ligne de terre en deux parties ; dont l'une, en avant, est la *partie antérieure*, et l'autre, en arrière, la *partie postérieure ;* 2° que le plan vertical est aussi divisé en deux parties ; dont la première est *supérieure* et la seconde *inférieure.*

Les plans de projection forment entre eux quatre angles dièdres, qui se désignent par les noms de leurs faces (*fig.* 6). L'angle dièdre 1 est nommé *angle antérieur supérieur ;* l'angle 2, *angle postérieur supérieur ;* l'angle 3, *angle postérieur inférieur*, et l'angle 4, *angle antérieur inférieur.*

Le langage se simplifie ordinairement en désignant ces quatre dièdres par les chiffres 1, 2, 3 et 4.

16. Le tracé des projections sur deux plans perpendiculaires conduirait à exécuter des constructions dans l'espace ; on *rabat*, pour les éviter, le plan vertical et la figure qu'il contient sur le plan hori-

zontal (*fig.* 6) en le faisant tourner, d'avant en arrière, autour de la ligne de terre; la figure ainsi formée (*fig.* 7) est plane, elle porte le nom d'épure et sert non-seulement à déterminer la figure de l'espace, mais encore à exécuter les tracés qui s'y rapportent.

Pour lire une épure, on doit imaginer que le plan vertical est ramené dans sa position naturelle (*fig.* 8), et concevoir alors la forme de la figure de l'espace obtenue par la rencontre des rayons correspondants des deux faisceaux de projetantes issus des centres de projection, et qui viendraient aboutir aux divers points des projections respectives données par l'épure.

17. On appelle *cote* d'un point sa distance au plan horizontal de projection; sa distance au plan vertical coordonné se nomme *l'éloignement* du point.

18. Théorème. — Dans toute épure :

1° *Les deux projections d'un point sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre*, et réciproquement *deux points quelconques d'une épure, placés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre sont les projections d'un point de l'espace ;*

2° *La cote d'un point est égale à la distance de sa projection verticale à la ligne de terre, son éloignement est donné par la distance de cette ligne à la projection horizontale du point.*

En effet :

1° Soient A le point et a, a'_1 ses deux projections (*fig.* 9).

Le plan aAa'_1 est à la fois perpendiculaire aux deux plans de projection; ses intersections $a'_1\alpha$, $a\alpha$ avec les plans coordonnés V, H sont, par suite, perpendiculaires à la ligne de terre xy. Si donc le plan vertical tourne autour de xy pour se rabattre sur le plan horizontal, la droite $a'_1\alpha$ ne cessera pas d'être perpendiculaire à xy et viendra en $\alpha a'$ sur le prolongement de αa; donc sur l'épure les deux projections a, a' du point A se trouvent, après le rabattement du plan vertical, sur une perpendiculaire à la ligne de terre.

En ce qui concerne la réciproque, observons que sur l'épure, d'après l'hypothèse même, les projections considérées se trouvent placées sur une droite perpendiculaire à la ligne de terre; que d'ailleurs cette perpendiculaire, après que l'on aura relevé le plan vertical pour reconstituer la figure de l'espace, se brisera sur la ligne de terre suivant deux droites placées dans un plan perpendiculaire aux plans coordonnés : d'où l'on conclut que les projetantes relatives aux points donnés sont dans ce plan et qu'elles s'y coupent par suite en un point qui n'est autre que celui de l'espace dont les projections sont données.

2° La figure $Aa'_1\alpha a$ est un rectangle, donc $Aa = a'_1\alpha = a'\alpha$ et $Aa'_1 = a\alpha$.

Ces égalités justifient la deuxième partie de théorème à démontrer.

La droite aa' qui unit les deux projections d'un même point sur l'épure (*fig.* 10) s'appelle *ligne de rappel*.

Corollaire. — *Pour que deux lignes se coupent dans l'espace, il faut et il suffit que les points de rencontre de leurs projections de même nom se trouvent sur une même ligne de rappel* (*fig.* 11).

Soient ab, $a'b'$ et cd, $c'd'$ les projections de deux lignes. Pour qu'elles se coupent dans l'espace, il faut et il suffit que les points de croisement f, f' de leurs projections de même nom soient les projections d'un même point; ou, d'après le théorème précédent, que f, f' se trouvent sur une même ligne de rappel.

19. Notation. — On convient de désigner : 1° par des lettres majuscules A, B, C, ... les points de la figure de l'espace; 2° par les lettres minuscules correspondantes *a*, *b*, *c*, ... leurs projections horizontales; 3° enfin, par les mêmes minuscules affectées d'un accent *a'*, *b'*, *c'*, ... les projections verticales des mêmes points.

20. Visibilité. — Pour déterminer la visibilité, l'œil de l'observateur est supposé placé à une distance infinie du plan sur lequel on projette, sur une perpendiculaire à ce plan, au-dessus du plan horizontal ou en avant du plan vertical. Ces hypothèses ont pour but de transformer les projections en perspectives (§ 6, 10 et 11) dont les rayons visuels seront, par suite de la position du spectateur, parallèles aux projetantes correspondantes. On suppose également que les plans de projection ne sont pas transparents ; il résulte de cette dernière convention et de la position donnée au spectateur que les figures placées dans l'angle 1 pourront seules être visibles.

21. Ponctuation. — Les épures offrent deux sortes de lignes : 1° les lignes qui représentent les données et les résultats ; 2° les lignes de construction. On y indique la visibilité seulement pour les premières que l'on trace en traits noirs continus quand elles sont visibles, et en traits noirs ponctués (.....) quand elles sont cachées.

Les lignes de construction se tracent en traits pointillés noirs (— — — — — — — —), ou en traits pleins au carmin. Quand, exceptionnellement, une ligne de construction offre une importance particulière, on la trace en trait noir mixte, composé de petits traits séparés par un ou plusieurs points ronds (=·=·=·=·=·=·=·=·) ou en trait plein bleu.

CHAPITRE II

REPRÉSENTATION DU POINT, DES LIGNES ET DU PLAN

22. Représentation du point. — Pour compléter l'étude relative à la représentation du point par la méthode des projections orthogonales, nous allons former le tableau des positions qu'il peut offrir par rapport aux plans de projection (*fig.* 12).

(*a*, *a'*)	Point dans l'angle 1.
(*b*, *b'*)	— 2.
(*c*, *c'*)	— 3.
(*d*, *d'*)	— 4.
(*f*, *f'*)	Point du plan vertical placé au-dessus du plan horizontal.
(*g*, *g'*)	— — au-dessous —

(h, h') Point du plan horizontal en arrière du plan vertical.
(i, i') — — en avant —
(j, j') Point de la ligne de terre.
(k, k') Point du plan bissecteur du deuxième dièdre.
(l, l') — — du quatrième dièdre.
(m, m') Si l'on suppose $m\mu = m'\mu$, la cote du point sera égale à son éloignement; le point appartiendra donc au plan bissecteur du dièdre 1.
(n, n') Point du plan bissecteur du dièdre 3 ($n\nu = n'\nu$).

23. Suppression de la ligne de terre (*fig.* 13). — Soient m, n, p, ..., m', n', p',..., les projections des points d'une figure quelconque, et xy la ligne de terre; transportons cette ligne parallèlement à elle-même, à une distance δ de la première, en x_1y_1; après ce déplacement, les cotes des divers points auront diminué ou augmenté de δ, tandis que leurs éloignements auront subi une augmentation ou une diminution de la même quantité. Pour interpréter ce résultat, il suffit d'imaginer que l'on a, pour former la nouvelle figure, élevé ou abaissé le plan horizontal de δ tout en reculant ou en avançant le plan vertical encore de cette même quantité. Comme dans un grand nombre d'épures les positions relatives des points interviennent seules, et que, par suite, leurs positions par rapport aux plans de projection ne présentent aucun intérêt, on peut fréquemment supprimer la ligne de terre, en remarquant, toutefois, que la direction de cette ligne, qu'il est toujours utile de connaître, sera déterminée, après la suppression, par les lignes de rappel qui se trouvent naturellement dans toute épure.

Remarque. — On voit facilement que le déplacement de la ligne de terre parallèlement à elle-même, tout en changeant les plans coordonnés, conserve au plan bissecteur du deuxième et du quatrième dièdre une position fixe.

REPRÉSENTATION DES LIGNES

24. Représentation des lignes. — On représente une ligne par ses deux projections; examinons les particularités qu'elles peuvent offrir.

On appelle *plan de front* un plan parallèle au plan vertical de projection; une figure placée dans un tel plan se nomme figure de front; on dit: *une droite de front*, *un cercle de front*, *un polygone de front*. Une ligne placée dans un plan parallèle au plan horizontal se nomme *une horizontale* ou *une ligne de niveau*.

Un plan perpendiculaire à la ligne de terre reçoit le nom de *plan de profil;* toute figure d'un tel plan se nomme figure de profil; nous dirons, par exemple: *droite de profil*, *cercle de profil*, *polygone de profil*.

25. Théorème. — *La projection orthogonale ou oblique d'une ligne se fait en vraie grandeur, quand la ligne est dans un plan parallèle au plan de projection.*

En effet, la ligne et sa projection sont, dans ce cas, les sections du cylindre projetant par deux plans parallèles, et en faisant mouvoir l'une de ces sections parallèlement à elle-même, dans la direction des projetantes, on peut évidemment l'appliquer sur l'autre.

26. Théorème. — *La projection orthogonale d'une ligne non située dans un plan parallèle au plan de projection est plus petite que la ligne projetée.*

Soit d'abord une droite AB non parallèle au plan de projection, projetons-la en *ab* et désignons par α l'angle de la droite AB avec le plan de projection; on a évidemment $ab = AB \cos \alpha$, donc $AB > ab$, car l'angle α n'est pas nul.

La propriété que nous venons d'établir pour la droite sera, par suite, vraie pour une ligne polygonale quelconque.

Considérons enfin le cas d'un arc de courbe; on sait que sa longueur est la limite du périmètre d'une ligne polygonale inscrite dans cet arc dont les côtés tendent, *d'après une loi arbitraire*, à devenir nuls; il en résulte que la ligne de l'espace et sa projection sont les limites des périmètres de deux lignes polygonales variables dont l'une serait inscrite dans l'arc donné, tandis que l'autre serait constamment la projection de la première, et dont les côtés de l'une d'elles et, par suite, ceux de l'autre auraient pour limite commune zéro.

On retombe ainsi sur le cas précédemment examiné. En ne considérant que les projections orthogonales, les réciproques des deux propositions précédentes sont vraies. En effet, ces propositions comprennent tous les cas possibles et, pour des hypothèses distinctes, donnent des conclusions également distinctes; conséquemment, l'hypothèse caractérise la conclusion comme la conclusion caractérise l'hypothèse; en un mot, les réciproques des propositions sont vraies.

En résumé, *pour qu'une ligne soit égale à sa projection orthogonale sur un plan, il faut et il suffit qu'elle se trouve sur un plan parallèle au plan de projection.*

27. Théorème. — *Quand une ligne se trouve située dans un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, elle offre, sur ce dernier, une projection rectiligne, et réciproquement.*

En effet, quand une ligne est dans un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, les projetantes de ses divers points sur ce plan coordonné sont dans le plan de la ligne; par conséquent, la droite de croisement du plan de projection et de celui de la ligne de l'espace est la projection de cette dernière; cette projection est donc bien rectiligne.

Réciproquement. — Si la projection d'une ligne est rectiligne, les projetantes de ses points sont toutes dans un plan projetant conduit, perpendiculairement à celui sur lequel on projette, par cette projection, et, comme la ligne de l'espace est dans son plan projetant, elle est donc bien dans un plan perpendiculaire au plan de projection.

Conséquence I. — *Quand une ligne se trouve dans un plan parallèle à l'un des plans de projection, elle offre, sur l'autre, une projection parallèle à la ligne de terre, et réciproquement.*

Cette conséquence devient évidente si, d'après la démonstration du théorème dont elle découle, on observe que la projection est, pour le théorème direct, la trace du plan de la ligne projetée sur le plan de projection qu'il rencontre, et que cette trace est nécessairement parallèle à la ligne de terre. Quant à la réciproque, on voit immédiatement que si l'une des projections d'une ligne est parallèle à la ligne de terre, son plan projetant correspondant est parallèle à l'autre plan de projection, et que par suite, la ligne de l'espace, qui se trouve dans son propre plan projetant, est bien placée dans un plan parallèle au plan coordonné qui ne contient pas la projection considérée.

Conséquence II. — *Si une ligne est sur l'un des plans de projection, sa projection sur l'autre plan*

coordonné sera sur la ligne de terre, et réciproquement. Cette propriété n'est qu'un cas particulier de la précédente.

CONSÉQUENCE III. — *Une ligne de profil offre deux projections rectilignes perpendiculaires en un même point de la ligne de terre, et réciproquement.*

En ce qui concerne la forme des projections, il suffit, pour démontrer la propriété, d'appliquer le théorème dont elle découle aux deux projections de la ligne; quant à leurs positions, on observe simplement qu'elles sont données par les traces du plan de profil considéré.

REMARQUE. — Toutes les lignes d'un même plan de profil se projettent, d'après la dernière conséquence du théorème précédent, sur les traces de ce plan; elles ont donc leurs projections confondues; par suite, *une ligne de profil n'est pas complètement déterminée par ses projections.*

28. Théorème. — *Il faut et il suffit, pour que deux lignes prises à volonté sur les deux plans de projection déterminent une ligne de l'espace, que leurs quatre points extrêmes dans le sens latéral soient deux à deux sur des lignes de rappel distinctes.*

La condition est nécessaire; en effet:

1° Si, sur l'épure représentant la ligne considérée, les deux lignes de rappel aa', bb' (*fig.* 14) des points extrêmes dans le sens latéral se confondaient, la ligne projetée serait dans un plan de profil, et, par suite, indéterminée (§ **27**, Conséq. III, Rem.); donc, bien que ce cas soit possible, nous devons le rejeter, vu que nous cherchons les conditions à remplir pour que la ligne soit déterminée par ses projections.

2° Si, sur les projections c,c' de la ligne (*fig.* 15), les points extrêmes dans le sens latéral n'étaient pas deux à deux sur des lignes de rappel, certains points auraient une projection verticale, telle que m', sans offrir une projection horizontale correspondante, ce qui est inadmissible.

En un mot, comme sur la figure 16, les points extrêmes (a, a'), (b, b') doivent se trouver sur deux lignes de rappel distinctes; la condition est donc nécessaire.

Je dis qu'elle est suffisante; en effet, on peut, quand elle est satisfaite, placer, sur les deux projections données, des couples de points très-voisins reliés par des lignes de rappel, et obtenir ainsi les projections d'une suite de points également très-voisins; en rapprochant les lignes de rappel, on obtiendra à la limite une suite continue de points qui, par leur jonction, formeront une ligne, généralement courbe, se projetant suivant les deux lignes données; lorsque les conditions précitées sont remplies, l'existence de la ligne est donc établie: d'où l'on conclut qu'elles sont suffisantes.

CONSÉQUENCE. — *Pour que deux droites, prises à volonté sur les deux plans de projection, déterminent une droite de l'espace, il faut et il suffit qu'aucune de ces droites ne soit perpendiculaire à la ligne de terre.*

29. On appelle *traces* d'une ligne ses points de rencontre avec les plans de projection; ceux de ces points qui sont sur le plan vertical forment les *traces verticales*, les autres donnent les *traces horizontales*.

30. Problème. — *Construire les traces d'une ligne dont on connaît les deux projections* (*fig.* 17). Soient l, l' les deux projections de la ligne dont nous chercherons d'abord les traces sur l'un des plans coordonnés, sur le plan vertical par exemple. Ces points sont à la rencontre de la ligne L et

du plan vertical ; comme points de L, ils doivent se projeter horizontalement sur l, comme points du plan vertical; leurs projections sur l'autre plan coordonné doivent se trouver sur xy : conséquemment, les projections horizontales des traces verticales cherchées seront aux points de rencontre v_1, v_2, v_3, v_4 des droites l et xy ; d'un autre côté, les traces verticales sont à elles-mêmes leurs propres projections verticales, et ces dernières doivent tout à la fois appartenir aux lignes de rappel menées par v_1, v_2, v_3, v_4, et à la projection verticale l' ; elles seront donc aux points de croisement v_1', v_2', v_3', v_4' de ces lignes. Quant aux traces horizontales h_1, h_2, on les obtient par une construction absolument semblable à la précédente; ce raisonnement conduit à la règle générale suivante : *Pour construire les traces d'une ligne sur l'un des plans coordonnés, on doit prendre les intersections de la projection de nom différent avec la ligne de terre, puis, en ces points, élever des perpendiculaires à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la projection de même nom.*

Visibilité d'une ligne par rapport aux plans de projection (*fig.* 17). — Il faut construire préalablement, par la méthode qui vient d'être développée, les traces de la ligne donnée ; puis remarquer que les segments de cette ligne compris entre deux traces consécutives sont dans un seul des dièdres formés par les plans coordonnés, et que parmi ces segments ceux qui se trouvent placés dans le dièdre 1 sont seuls visibles (§ **20**).

Pour appliquer cette règle on a, sur la figure 17, en se conformant aux conventions établies dans le cours du paragraphe **21**, déterminé et indiqué la visibilité des projections d'une ligne quelconque.

Traces d'une droite. — La construction des traces d'une ligne quelconque, expliquée plus haut, est applicable à la ligne droite, et se trouve reproduite, pour ce cas particulier, sur la figure 18.

31. Intersection d'une ligne et du plan bissecteur des dièdres 2 et 4. — Sur l'épure, un quelconque des points du plan bissecteur des dièdres 2 et 4 a ses projections confondues; conséquemment, les points de croisement des deux projections de la ligne considérée donnent les projections des points cherchés ; ainsi on trouve : dans le cas d'une ligne quelconque (*fig.* 17), par les rencontres des projections l, l', les points demandés (m_1, m'_1), (m_2, m'_2), (m_3, m'_3), (m_4, m_4'), dans le cas où la ligne d, d' (*fig.* 18) est droite, un seul point m_1, m'_1 répondant à la question.

32. Intersection d'une ligne l, l' et du plan bissecteur des dièdres 1 et 3 (*fig.* 19 et 20. pl. II). —Tout point du plan bissecteur des dièdres 1 et 3 a ses projections symétriques par rapport à la ligne de terre; on devra donc, pour déterminer, par exemple, la projection verticale des points de rencontre cherchés, dans le cas d'une courbe quelconque (*fig.* 19), comme dans le cas d'une droite (*fig.* 20), construire préalablement une ligne auxiliaire l_1 symétrique de l par rapport à la ligne de terre, et prendre ses points de rencontre avec l'autre projection donnée l'; dans le cas de la figure 19, on trouve les projections verticales m'_1, m'_2, m'_3, et pour la figure 20 la projection verticale m'_1 ; cela fait, les lignes de rappel passant par les points que nous venons de construire donnent, sur chacune des figures considérées, par leur rencontre avec l, les projections horizontales des points cherchés : on a ainsi, sur la figure 19, les points de rencontre (m_1, m'_1), (m_2, m'_2), (m_3, m'_3), et sur la figure 20 le point m_1, m'_1.

33. Problème. — *Connaissant les traces d'une droite, trouver ses projections* (*fig.* 18). — Soient h la trace horizontale de la droite, et v' sa trace verticale.

Cherchons, pour déterminer les projections de la droite, celles de deux de ses points : en choisissant les traces données qui sont à elles-mêmes leurs propres projections, sur celui des plans coordonnés, qui les contient, et dont la seconde projection se trouve sur la ligne de terre et sur les lignes de rappel menées par h, v', on trouve les projections (v, v'), (h, h') des deux points ; et en tirant les droites vh, $v'h'$, on obtient enfin celles de la droite qui répondent aux conditions de notre énoncé.

34. Représentation de la droite. — Proposons-nous, afin d'achever l'étude de la représentation d'une droite par la méthode des projections, d'examiner les différentes épures qu'elle peut offrir selon ses positions par rapport aux plans coordonnés.

1° *Droites obliques aux plans de projection et à la ligne de terre.* — Ces droites donnent lieu aux épures suivantes :

Droite quelconque (*fig.* 21, pl. II). En construisant ses traces, on observe que la droite traverse trois dièdres, et on peut en indiquer la visibilité (§ **30**).

Droite oblique rencontrant la ligne de terre (*fig.* 22, pl. II). Cette droite ne traverse plus que deux dièdres, et offre deux traces V, H, confondues sur la ligne de terre.

Droite oblique parallèle au plan bissecteur des dièdres 2 *et* 4 (*fig.* 23, pl. II). Le point de rencontre de la droite et du plan bissecteur des dièdres 2 et 4 doit être rejeté à l'infini ; par conséquent, les projections d, d' de cette droite doivent être parallèles entre elles (§ **31**). Réciproquement, quand les projections d'une droite sont parallèles sur l'épure, cette droite est parallèle au plan bissecteur des dièdres 2 et 4.

Droite oblique placée dans le plan bissecteur des dièdres 2 *et* 4 (*fig.* 24, pl. II). Sur l'épure les projections des divers points de la droite doivent se confondre ; il en sera de même des projections d, d' de cette droite.

Droite oblique placée dans le plan bissecteur des dièdres 1 *et* 3 (*fig.* 25, pl. II). Les projections des divers points de la droite, et, par conséquent, celles de la droite elle-même doivent être symétriques par rapport à la ligne de terre.

Droite oblique parallèle au plan bissecteur des dièdres 1 *et* 3 (*fig.* 26, pl. II). La droite doit occuper une position parallèle à la précédente ; ses projections, par suite, doivent s'incliner également sur la ligne de terre.

2° *Droite oblique par rapport aux plans coordonnés et perpendiculaire à la ligne de terre* (en direction) (*fig.* 27, pl. II). — La droite est dans un plan de profil, et ses projections, qui sont perpendiculaires en un même point de la ligne de terre, ne suffisent plus pour en fixer la position (§ **27**, Rem.) ; mais il est évident qu'en indiquant celles de deux de ses points (a, a'), (b, b'), on achèvera de la déterminer ; tel est le mode de détermination que l'on emploie pour les droites de profil ; il reste alors, si l'on veut indiquer la visibilité, à construire les traces ; mais, pour le cas particulier qui nous occupe, la construction générale de ces points est en défaut : il faut donc indiquer la méthode spéciale qui sert à construire les traces d'une droite de profil.

Problème. — *Construire les traces d'une droite de profil.*

Première solution (*fig.* 27, pl. II). — Faisons tourner le plan de profil contenant la droite ab, $a'b'$ autour de sa trace horizontale ab, pour le rabattre sur le plan horizontal ; le point a' décrit alors, sur le plan vertical, un arc de cercle de centre α, et s'arrête au point de croisement a'_1 de cet arc et de la ligne de terre ; les projetantes du point A se rabattent suivant les perpendiculaires α_1, α'_1 aux droites ab, xy, élevées respectivement des points a_1, a'_1, et donnent, par leur rencontre A_1, le point A rabattu ; le rabattement B_1 du second point B se construit semblablement. Cela fait, en traçant la droite A_1B_1,

on obtient enfin le rabattement de la droite AB qui, prolongé de part et d'autre des points A_1, B_1, coupe ab en h, et xy en v'_1.

Relevons maintenant le plan de profil pour le remettre dans sa position naturelle : le point h reste fixe sur la droite mobile et sur le plan horizontal : il est donc la trace horizontale de la droite donnée ; le point v_1' décrit alors, sur le plan vertical, un arc de cercle de centre α et vient, sans quitter la droite et le plan vertical, en un point v' qui n'est autre que la trace verticale cherchée.

Deuxième solution (*fig.* 28, pl. II). — Soient aa', bb', les projections determinant la droite donnée ; pour obtenir ses traces, projetons-la sur le plan horizontal coordonné, en adoptant pour centre de projection l'un quelconque s, s' des points du plan vertical ; dans ce but, traçant les droites sa, $s'a'$, on détermine la projetante conique du point A, qui donne, par sa trace horizontale α, la projection centrale d'un premier point de la droite de profil ; celle β d'un second se construit semblablement ; conséquemment, en joignant ces points, on trouve d'abord la projection centrale $\alpha\beta$ cherchée, puis les points de croisement v'_1, h du prolongement de cette ligne et des droites xy, ab. Actuellement, si l'on remarque en premier lieu que tout point du plan horizontal est à lui-même non-seulement sa propre projection orthogonale sur ce plan, mais encore sa propre projection centrale ; en second lieu, que les points du plan vertical ont leurs projections centrales sur la ligne de terre, on voit facilement alors que le point h est la projection centrale de la trace horizontale cherchée, c'est-à-dire la trace horizontale elle-même ; que le point v'_1 est la projection conique de la trace verticale, laquelle se trouve à la rencontre v' de la projetante conique $s'v'_1$ et de la droite $a'b'$.

On pourra résoudre également ce problème en recourant à une projection cylindrique faite dans la direction d'une ligne de front. Cela dit, revenons aux épures des positions particulières de la ligne droite.

3° *La droite est de front* (*fig.* 29, pl. II). — La projection horizontale d d'une telle droite est parallèle à la ligne de terre (§ **27**, Cons. I); sa projection verticale d' est quelconque, et, sur cette dernière, une portion quelconque de la droite de l'espace se voit en véritable grandeur (§ **25**).

4° *Droite horizontale* (*fig.* 30, pl. II). — D'après les deux articles précités, la projection verticale de la droite est parallèle à la ligne de terre ; sur l'autre plan coordonné, sa projection offre une orientation quelconque, et tout segment de la droite de l'espace s'y trouve projeté en véritable grandeur.

5° *La droite est parallèle aux deux plans coordonnés* (*fig.* 31, pl. II). — Ses deux projections sont parallèles à la ligne de terre, et un quelconque de ses segments se projette en vraie grandeur sur chaque plan coordonné.

6° *La droite est perpendiculaire au plan vertical* (*fig.* 32, pl. II). — La projection sur le plan vertical se réduit alors à un point unique d' (§ **12**) ; quant à la seconde projection, elle se confond avec la perpendiculaire d à la ligne de terre, menée par le point d' (§ **27**, Cons. III).

7° *La droite est perpendiculaire au plan horizontal* (*fig.* 33, pl. II). C'est maintenant la projection horizontale qui se réduit au point unique d, et la projection verticale d' qui se trouve sur la perpendiculaire à la ligne de terre passant au point d.

POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

35. — Deux droites occupent dans l'espace l'une des trois positions relatives suivantes :

1° Elles se coupent ; 2° elles sont parallèles ; 3° elles ne sont pas situées dans un même plan.

Pour pouvoir déterminer celle de ces positions qui répond à deux des droites d'une épure donnée,

rappelons d'abord : 1° que les projections de même nom de deux droites (d, d'), (d_1, d'_1) qui se coupent, se croisent en deux points m, m' (*fig.* 34, pl. II) appartenant à la même ligne de rappel (§ **18**, Coroll.); 2° que deux droites parallèles (d, d'), (d_1, d'_1) (*fig.* 35, pl. II) ont leurs projections de même nom également parallèles; puis, observant que les réciproques des deux propriétés précitées sont vraies, nous en concluons que deux droites (d, d'), (d_1, d'_1) (*fig.* 36, pl. II) ne sont pas situées dans un même plan, lorsque les conditions distinctives des deux premiers cas ne sont pas remplies.

36. Problème. — *Trouver les positions relatives de deux droites* $(ab, a'b)$, $(cd, c'd')$ *situées dans un même plan de profil.*

Première solution (*fig.* 37, pl. II). — On peut, d'après la méthode exposée plus haut (§ **34**, 2°), san changer les positions relatives des droites, les rabattre autour de la trace horizontale du plan de profil qui les contient en A_1B_1, C_1D_1; puis constater directement sur ce rabattement les positions relatives qu'elles occupent; dans le cas de la figure que nous avons adoptée, les droites se coupent en un point dont le rabattement se trouve en M_1.

Si, après avoir construit ces rabattements, on veut obtenir, dans le cas de deux droites non parallèles, les projections de leur point de croisement rabattu en M_1, on exécutera en partant de ce point le tracé inverse de celui que nous venons d'employer pour rabattre l'un quelconque des points donnés : ce procédé fournira les projections m, m' du point de rencontre des droites de profil considérées.

Deuxième solution. — La solution que nous allons indiquer se base sur la remarque suivante : *Pour que deux droites, situées dans un même plan ou dans deux plans parallèles, soient parallèles, il faut et il suffit que leurs projections obliques, faites sur deux plans parallèles et suivant une même direction, soient aussi parallèles.* — Cela posé, soient $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ les projections des droites données (*fig.* 38, pl. II). Transportons la ligne de terre parallèlement à elle-même en x_1y_1, afin de placer le point d' sur cette ligne, et, par conséquent, le point d, d' sur le plan horizontal; projetons ensuite sur le nouveau plan horizontal la droite $cd, c'd'$ dans la direction d'une droite de front $c\gamma$, $c'\gamma'$, arbitrairement choisie : la projection oblique du point c, c' sera donnée par la trace horizontale γ de la projetante $c\gamma$, $c'\gamma'$, et comme le point d, situé sur le plan horizontal qui sert actuellement de plan de projection, est à lui-même sa propre projection oblique, on aura enfin, en unissant par une droite les points d, γ, la projection oblique de la première droite donnée; celle $b\alpha$ de la seconde, sur le plan horizontal conduit par une ligne de terre encore déplacée parallèlement à elle-même en x_2y_2, s'obtient d'une manière absolument semblable.

Actuellement, si les droites $b\alpha, d\gamma$ sont parallèles, celles du plan de profil le seront également; dans le cas contraire, les droites données se couperont.

En employant un seul plan horizontal de projection, on eût pu, par la méthode des projections obliques qui vient d'être expliquée, obtenir non-seulement la position relative des droites, mais encore, dans le cas de droites se croisant, les projections de leur point de rencontre; nous laisserons au lecteur le soin d'exécuter cette épure, qui sera pour lui un exercice utile.

37. Problème. — *Trouver les positions relatives de deux droites placées dans deux plans de profil.* — Cette question n'est autre que la généralisation de celle du paragraphe précédent, et la solution donnée pour le cas particulier est applicable au présent cas; mais, comme le tracé qui en résulte ne saurait, après les explications que nous venons de donner, offrir de difficulté, nous allons, sans nous

y arrêter, indiquer une construction plus simple qui, à son tour, fournira, pour le cas particulier déjà résolu, un tracé également réduit. Soient $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ les deux droites données (*fig.* 39, pl. II); pour qu'elles soient parallèles, il faut et il suffit que les droites auxiliaires non situées dans des plans de profil $(ac, a'c')$, $(bd, b'd')$, que l'on obtient en unissant les points donnés deux à deux, soient dans un même plan; on est ainsi ramené au cas général; en effet, nous avons à chercher les positions relatives de deux droites quelconques $(ac, a'c')$, $(bd, b'd')$: dans le cas de notre épure, les points de rencontre des projections de noms différents f', g de ces droites n'étant pas sur une même ligne de rappel, ces droites et, par suite, celles des plans de profil ne sont pas dans un même plan.

On peut résoudre, comme nous l'avons déjà dit, par le procédé que nous venons d'expliquer, le problème du paragraphe **36** ; effectivement, soient $(ab, a'b')$, $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ les projections des points servant àl a détermination des droites données dans un même plan de profil (*fig.* 39, pl. II); pourre connaître si elles sont parallèles, déplaçons l'une d'elles, $\gamma\delta, \gamma'\delta'$, parallèlement à elle-même dans la direction de la ligne de terre par exemple : elle prendra, sur un plan de profil arbitrairement choisi, la position $cd, c'd'$ déterminée par les points de croisement des traces de ce plan auxiliaire avec les parallèles à xy menées par les points (γ, γ'), (δ, δ').

Actuellement on peut remplacer la droite $\gamma\delta, \gamma'\delta'$ par $cd, c'd'$, et retomber sur le problème qui fait l'objet du présent paragraphe.

38. Problème. — *Trouver les positions relatives d'une droite quelconque et d'une droite de profil* (*fig.* 40, pl. III).— Supprimons la ligne de terre (§ **23**). Soient $(ab, a'b')$ et d, d' les droites données; pour qu'elles se coupent il faut et il suffit que les points (a, a'), (b, b') et le point de rencontre c, c' de la droite d, d' et du plan de profil qui passe par l'autre droite donnée soient en ligne droite, ou que les projections de ces points sur un plan quelconque, faites dans un système également quelconque, soient elles-mêmes en ligne droite; projetons-les cylindriquement, dans la direction de la droite d, d', sur le plan bissecteur fixe (§ **23**, Rem.) des dièdres 2 et 4; nous trouverons, dans le cas figuré sur l'épure, trois points en ligne droite $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$; les droites données se coupent donc.

REPRÉSENTATION DU PLAN

39. Dans l'espace, un plan est déterminé par deux droites parallèles ou qui se coupent; par trois points non en ligne droite; par une droite et un point hors de la droite, etc.

Ordinairement, pour le représenter, on adopte les lignes en lesquelles il coupe les plans coordonnés, que l'on appelle les traces de ce plan. Un plan quelconque a, avec les deux plans de projection, un point unique commun, lequel doit nécessairement appartenir aux trois droites de rencontre de ces trois plans pris deux à deux : donc ces droites, qui ne sont autre chose que les deux traces du plan considéré et la ligne de terre, concourent en un seul point, lequel, quand le plan est parallèle à la ligne de terre, se trouve rejeté à l'infini; en un mot, *les traces d'un plan coupent la ligne de terre en un seul point, qui est à l'infini quand le plan est parallèle à cette ligne.*

40. Théorème. — *Les projections orthogonales d'une droite perpendiculaire à un plan sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan* (*fig.* 41, pl. III). — Il suffit de faire la démonstration pour l'un quelconque Q des plans coordonnés. Soient P, ab le plan donné et sa trace, D, R, d la perpen-

diculaire au plan P, son plan projetant et sa projection sur le plan Q ; ce plan R est à la fois perpendiculaire au plan de projection Q et au plan P, car il contient les projetantes des divers points de D et cette droite elle-même, qui sont : les premières perpendiculaires par construction au plan de projection et la dernière perpendiculaire, par hypothèse, au plan P; ce plan R est donc également perpendiculaire à l'intersection *ab* des plans P, Q ; inversement, *ab* l'est à son tour au plan R, conséquemment à toutes les droites de ce dernier et en particulier à la projection *d*; la trace *ab* du plan P est donc bien perpendiculaire à la projection *d* de la droite D.

41. *Réciproquement, quand, sur deux plans coordonnés, les projections orthogonales d'une droite sont respectivement perpendiculaires aux traces d'un plan, la droite est éaglement perpendiculaire à ce plan.*

Conservons la figure et les notations employées pour la démonstration directe, et, avant d'aborder le sujet, remarquons que la perpendicularité des projections et des traces doit, pour que la réciproque soit vraie, se produire sur deux plans de projection, car on peut imaginer dans le plan R une infinité de droites non perpendiculaires au plan P, et dont la projection commune se fait cependant sur *d*.

Cela dit, abordons la question en remarquant que les plans Q et R sont perpendiculaires, et que, par suite, la droite *ab* perpendiculaire à leur intersection *d* dans l'un d'eux Q, l'est aussi à l'autre R; on en déduit que le plan P, qui contient cette intersection, est également perpendiculaire au plan R; inversement, R l'est à son tour à P.

L'un des plans projetants de D étant perpendiculaire au plan donné P, le second plan projetant le sera aussi; d'où il résulte que la ligne de croisement D de ces plans sera également perpendiculaire au plan P.

42. Théorème. — *La projection orthogonale d'un angle droit se fait sur un plan parallèle à l'un de ses côtés, en véritable grandeur* (*fig.* 42, pl. III). — Soient ABC, *abc* l'angle droit donné et sa projection sur le plan Q parallèle à l'un de ses côtés AB; cette dernière étant parallèle au plan Q sera perpendiculaire à la projetante B*b* du sommet; mais, d'après l'hypothèse, il est encore perpendiculaire à BC, il l'est donc aussi au plan S conduit par ces deux droites; par suite, le plan R qui les projette est également perpendiculaire à S, ; donc le dièdre des plans R, S est droit, et comme ses faces sont perpendiculaires au plan de projection, l'angle *abc* qui en est par suite le rectiligne est droit. Le présent théorème, comprenant deux hypothèses et une conclusion, conduit à deux réciproques; démontrons qu'elles sont vraies.

43. Première réciproque. — *Un angle* ABC *qui se projette sur un plan* Q *parallèle à l'un de ses côtés* AB, *suivant un angle droit abc, est aussi droit.* — Nous avons conservé les notations et la figure du précédent paragraphe. Par hypothèse *abc* est droit; on en conclut que le dièdre des plans R, S l'est aussi, et par suite que *ba* est perpendiculaire au plan S; la droite AB, parallèle au plan de projection Q, sera également perpendiculaire au même plan S; elle le sera donc à toutes les droites de ce plan et, particulièrement, au second côté BC de l'angle ABC; conséquemment, cet angle est bien droit.

44. Deuxième réciproque.— *Un angle droit qui se projette en vraie grandeur sur un plan a au moins un de ses côtés parallèle au plan de projection.*— Conservons encore les notations et la figure du paragraphe **42.** Les angles *abc*, ABC sont droits par hypothèse, et nous voulons démontrer que si l'un des côtés, BC par exemple, de l'angle ABC n'est pas parallèle au plan Q, l'autre BA le sera. En effet, *abc* étant droit,

le dièdre des plans S, R le sera aussi, et, par conséquent, les côtés de ses rectilignes seront perpendiculaires aux faces qui ne les contiennent pas, et parallèles au plan de projection Q; d'autre part, la droite BC n'est pas parallèle au plan Q, elle n'est donc pas parallèle à *bc*, et, par suite, elle n'est pas non plus perpendiculaire au plan R; on conclut de là que la seule droite du plan R perpendiculaire à BC est BA; que, par suite, cette droite n'est autre que l'une des arêtes de l'un des rectilignes du dièdre des plans R, S, et enfin qu'elle est parallèle au plan Q.

POSITION QUE PEUT OCCUPER UN PLAN PAR RAPPORT AUX PLANS DE PROJECTION

45. *Le plan est oblique par rapport aux plans de projections* (*fig.* 43, pl. III). — L'épure indique la visibilité de ses traces $P_\alpha P'$; on remarque, en outre, qu'il traverse les quatre dièdres des plans coordonnés.

46. *Le plan est perpendiculaire au plan bissecteur des dièdres* 2 *et* 4 (*fig.* 44, pl. III). — Ses traces $P_\alpha P'$ se confondent sur l'épure; en effet, il faut que le plan soit perpendiculaire à une droite quelconque du plan bissecteur des dièdres 2 et 4, laquelle a des projections *d*, *d'* confondues (§ **34**, 1°); conséquemment, les traces du plan se confondront également.

Réciproquement, quand les traces $P_\alpha P'$ d'un plan se confondent sur l'épure, ce plan est perpendiculaire à une droite du plan bissecteur des dièdres 2 et 4, dont les projections *d*, *d'* se trouvent sur une perpendiculaire à $P_\alpha P'$; il l'est donc aussi à ce plan bissecteur.

47. *Le plan est de profil* (*fig.* 45, pl. III). — Ses traces $P_\alpha P'$ sont confondues et perpendiculaires à la ligne de terre.

48. *Le plan est perpendiculaire au plan bissecteur des dièdres* 1 et 3 (*fig.* 46, pl. III). — Une démonstration entièrement semblable à celle que nous avons donnée plus haut (§ **46**) permet d'établir que les traces du plan sont, dans le présent cas, symétriques par rapport à la ligne de terre et réciproquement.

49. *Le plan est perpendiculaire sur le plan vertical* (*fig.* 47, pl. III). — Sa trace verticale $\alpha P'$ est quelconque; quant à sa trace horizontale αP, elle est, comme intersection de deux plans perpendiculaires au plan vertical, perpendiculaire à ce dernier; conséquemment, elle l'est aussi à la ligne de terre; la réciproque de cette propriété se démontre sans difficulté.

50. *Le plan est perpendiculaire sur le plan horizontal* (*fig.* 48, pl. III). — Dans ce cas, entièrement analogue au précédent, la trace horizontale αP est quelconque, l'autre trace $\alpha P'$ est perpendiculaire à la ligne de terre.

51. *Le plan est parallèle au plan vertical* (*fig.* 49, pl. III). — Sa trace horizontale P, donnée par la rencontre du plan parallèle au plan vertical et du plan horizontal, est parallèle à la ligne de croisement des plans coordonnés, c'est-à-dire à la ligne de terre; l'autre trace est la droite à l'infini du plan vertical.

52. *Le plan est parallèle au plan horizontal* (*fig.* 50, pl. III). — On voit, par analogie, que sa trace P′ sur le plan vertical est une parallèle à xy, et que, sur l'autre plan coordonné, elle n'est autre que la droite de l'infini de ce plan.

53. *Le plan est parallèle à la ligne de terre* (*fig.* 51, pl. III). — Comme tout plan conduit par la ligne de terre donne, sur le plan parallèle à cette ligne, des intersections également parallèles à la ligne de terre, on voit que les deux traces P,P′ du plan donné doivent être parallèles à la ligne de terre.

54. *Le plan passe par la ligne de terre* (*fig.* 52, pl. III). — Sa position ne serait pas déterminée par les deux traces qui se confondent ici avec xy; pour qu'elle le soit, on donnera les projections m, m' d'un point du plan non situé sur xy.

CHAPITRE III

PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE ET LE PLAN

55. Problème I. — *Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée* (*fig.* 53, pl. III). — Soient $(ab, a'b')$, (c, c') les projections données de la droite et du point, celles de la droite cherchée doivent passer par c, c', et, en outre, il faut qu'elles soient respectivement parallèles à ab, $a'b'$; on les construit donc sans difficulté. Le procédé que nous venons de suivre n'est applicable qu'autant que les droites ne sont pas de profil; nous allons, pour ces dernières, donner une solution spéciale.

Soient (a, a'), (b, b') (*fig.* 54, pl. III) les projections des deux points qui déterminent la droite de profil donnée, et c, c' celles du point par lequel on veut mener la parallèle. Conduisons la droite ac, $a'c'$ et, par le point b, b' menons-lui une parallèle qui, par sa rencontre avec le plan de profil du point c,c', détermine un second point d, d' de la droite inconnue ; en effet les deux plans de profil PP′, QQ′ déterminent, par leurs rencontres avec le plan des trois points donnés, les parallèles $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$; donc cette dernière fournit bien la solution du problème.

La méthode précédente est en défaut quand l'une des projections du point D se trouve placée en dehors des limites de la feuille de dessin ; elle peut également ne pas convenir si, pour la solution d'une question, on doit recourir à un point préalablement désigné de la parallèle cherchée ; cette désignation ne saurait être complète, car il faut que ce point soit à la droite inconnue : toutefois le problème sera résolu, avec sa plus grande généralité, en construisant la seconde projection d'un point de la parallèle, connaissant la première.

Reprenons, à cet effet (*fig.* 55, pl. III), les points donnés (a, a'), (b, b'), (c, c'), et soit d la projection horizontale d'un point de la parallèle ; considérons, pour construire sa projection verticale, les droites AC, BD, et cherchons leurs projections ; nous trouvons immédiatement sur le plan horizontal les droites ac, bd, et, sur le plan vertical, la droite $a'c'$; d'autre part, comme les droites AC, BD sont dans un même plan, elles se coupent en un point dont la projection horizontale est au croisement m de

leurs projections sur ce plan coordonné et dont la projection verticale se trouve à la rencontre m' de la ligne de rappel du point m et de la droite $a'c'$; on conclut de là que la droite BD a pour projection verticale celle qui unit les points b', m', laquelle par sa rencontre d' avec le plan de profil QQ′ donne la seconde projection cherchée.

56. Points éloignés. — Nous appellerons *points éloignés* ceux qui, devant intervenir dans un tracé, se trouveront placés hors des limites de la feuille de dessin; quand une épure offre de tels points, on ne doit pas recourir à une deuxième feuille placée près de la première, procédé qui ne saurait donner l'exactitude nécessaire, et qui, en outre, est impraticable, et pour les épures de coupe des pierres, et pour celles de charpente, que l'on exécute : les premières sur un mur, les autres sur un plancher. Habituellement, pour résoudre les questions dont le tracé conduit à des points éloignés, on réduit les dimensions de la figure par l'emploi d'une figure homothétique à la première.

Problème II. — *Déterminer le point de rencontre éloigné de deux droites données.* — Soient (d, d') (δ, δ') les projections des droites données (*fig.* 56, pl. III); prenant pour centre d'homothétie le point de croisement S des droites d, d', et pour rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$ par exemple, construisons une figure homothétique à celle qui nous est donnée; les droites d, d' sont à elles-mêmes leurs homologues, le point a vient au milieu a_1 de la droite Sa, et, par des parallèles δ_1, δ'_1 menées de ce point aux droites δ, δ', on obtient les homologues de ces dernières; dès lors, si, comme sur notre épure, les points de croisement b_1, b'_1 des droites (d, δ_1), (d', δ'_1) sont situées sur la même ligne de rappel, les droites données se couperont, et, après avoir tiré la parallèle Sc à la ligne de terre, le point de rencontre sera défini : 1° par sa cote, égale à $2c_1b'_1 + c_1\beta_1$; 2° par son éloignement, égal à $2c_1b_1 - c_1\beta_1$; 3° enfin par sa distance latérale $2Sc_1$, comptée à la droite du point S.

57. Problème III. — *Construire les projections d'une droite située dans un plan.*

1° *Le plan est donné par ses traces* αP, αP′ (*fig.* 57, pl. III). — Prenant, sur la trace verticale du plan, un point v', et, sur sa trace horizontale, un point h, on construira les projections vh, $v'h'$ de la droite dont les traces sont en ces deux points. Ce tracé permet également, en modifiant l'ordre des constructions, d'obtenir l'une des projections d'une droite placée dans un plan déterminé par ses traces quand on connaît son autre projection.

2° *Le plan est donné par trois points* (*fig.* 58, pl. III). — Soient A, B, C les points donnés. Prenant arbitrairement l'une des projections d' de la droite demandée et traçant celles $(ab, a'b')$ $(bc, b'c')$ des droites qui unissent les points (A, B) (B, C), on aura, par la rencontre des lignes $a'b'$, $b'c'$ et de d', les projections m', m'_1 sur le plan vertical des points où la droite inconnue croise AB, CB.

Actuellement, des lignes de rappel menées par ces points détermineront sur les projections horizontales ab, cb les secondes projections m, m_1 de deux points de la droite cherchée; conséquemment, en traçant la droite mm_1, on aura la ligne qu'il s'agissait de trouver.

58. Dans les tracés on emploie fréquemment les droites qui, situées dans un plan, sont parallèles soit à sa trace verticale, soit à sa trace horizontale; les premières portent le nom de *lignes de front du plan*, les autres sont *les horizontales du plan.*

Proposons-nous de construire les projections d'une droite de front d'un plan donné. — C'est là un cas particulier du problème précédent, qui se traite par le procédé décrit plus haut, et dont nous reprendrons cependant la construction vu son fréquent emploi dans les tracés.

1° *Le plan est donné par ses traces* (*fig.* 59, pl. III). — La projection horizontale d de la droite de front est une parallèle à la ligne de terre placée arbitrairement ; en ce qui concerne la projection verticale, nous observons que la trace horizontale de la droite, devant se trouver sur la projection de même nom d et sur la trace horizontale P du plan donné, sera au point de rencontre h de ces lignes, point dont la projection verticale h' se construit par la rencontre de la ligne de terre et de la ligne de rappel du point h; dès lors, en conduisant par h' une parallèle d' à la trace verticale P', on aura la seconde projection de la ligne de front.

2° *Le plan est donné par deux droites qui se coupent* (*fig.* 60, pl. III). — Prenant la projection horizontale mm_1 de la droite cherchée dans une position quelconque parallèle à la ligne de terre, on construira, conformément au tracé du précédent paragraphe, sa projection verticale $m'm'_1$.

Un procédé en tout semblable à celui que nous venons d'expliquer donne, sur les figures 61 et 62, les projections d'une horizontale d'un plan défini sur la première figure, par ses traces P, P', et, sur l'autre, par deux droites qui se coupent (d, d'), (d_1, d'_1).

59. Problème IV. — *Construire les projections d'un point situé dans un plan* (*fig.* 63 et 64, pl. IV). — On construit les projections d'une quelconque des droites du plan (§ **57** et **58**), d'une horizontale, δ, δ' par exemple, et l'on y place les projections m, m' du point.

La construction que nous venons d'indiquer s'appliquerait aussi sans difficulté au cas où le point cherché aurait une projection donnée.

60. Application. — *Construire les projections d'un polygone plan* (*fig.* 65, pl. IV). — On peut, pour déterminer le polygone, se donner les projections (a, a') (c, c') (f, f') de trois de ses sommets sur les deux plans coordonnés et celles b, d, e des autres sommets sur l'un de ces plans ; le problème se résout en opérant suivant la méthode du précédent paragraphe, car les deux projections des trois points A, C, F déterminent le plan du polygone, et l'on doit construire les projections verticales de ses autres sommets connaissant leurs projections horizontales ; en vue de ce but, traçons les projections de la diagonale cf, $c'f'$, ainsi que les projections horizontales ae, ad, ab ; ces dernières droites, par leurs rencontres g, h, k avec la première, déterminent des points dont les projections verticales g', h', k' se construisent facilement, et qui, joints au point a', donnent les projections verticales $a'g'$, $a'h'$, $a'k'$ de droites contenant les points E, D, B ; par suite, en prenant les rencontres de ces projections avec les lignes de rappel menées respectivement par e, d, b, on trouve enfin les points e', d', b' qu'il s'agissait de construire, et l'on peut achever de tracer la projection verticale du polygone.

61. Problème V. — *Construire les traces d'un plan déterminé par deux droites qui se coupent ou par deux droites parallèles* (*fig.* 66 et 67, pl. IV). — Soient (d, d'), (d_1, d'_1) les projections des droites données. On résoudra la question en construisant tout d'abord les traces (h, h_1), (v', v'_1) des droites données et en menant les droites hh_1, $v'v'_1$ qui unissent les traces de même nom : ces lignes sont les traces du plan, et si la construction a été faite avec exactitude, elles devront se couper en un seul point de la ligne de terre.

62. Problème VI. — *Construire les traces d'un plan déterminé par trois points non en ligne droite.* — Pour se trouver dans le cas précédent, il suffira de joindre par des droites l'un des points donnés aux deux autres.

63. Problème VII. — *Par une droite* D *faire passer un plan parallèle à une autre droite* D_1. — Par un point, pris arbitrairement sur D, on mène une parallèle D_2 à la droite D_1, et, d'après le procédé donné plus haut (§ 61), on construit les traces du plan conduit par les droites D, D_2.

64. Théorème. — *Deux plans parallèles ont leurs traces de même nom parallèles, et réciproquement.* — Effectivement, les traces des deux plans sont sur chaque plan coordonné les intersections de deux plans parallèles par un troisième, elles sont donc parallèles.

La réciproque de cette proposition est généralement vraie ; car, en supposant que les points de croisement des traces de chacun des plans ne soient pas à l'infini, ces traces forment deux angles dont les côtés sont parallèles chacun à chacun ; ils sont donc eux-mêmes parallèles. On voit, par sa démonstration même, que la réciproque n'est vraie qu'autant que les plans ne sont pas parallèles à la ligne de terre ; nous donnerons bientôt, pour ce cas exceptionnel, les conditions de parallélisme des plans.

65. Problème VIII. — *Mener par un point donné un plan parallèle à un plan donné.*

Solution générale. — *Prenant arbitrairement, dans le plan donné, deux droites non parallèles, on leur mènera des parallèles par le point donné, qui détermineront le plan cherché.* — Il est avantageux, quand le plan donné se trouve déterminé par ses traces, de construire simplement un point sur chacune des traces du plan cherché et de conduire par ces deux points des droites respectivement parallèles aux traces données (§ 64), qui devront, si l'épure est exactement faite, se couper en un seul point de la ligne de terre ; on construit un point de chacune des traces inconnues en menant, dans le plan donné, une droite arbitraire, puis, en construisant la parallèle à cette droite passant par le point donné, et en déterminant les traces de cette parallèle. Appliquons cette méthode à quelques cas importants :

1° *Le plan donné est déterminé par deux droites* (d, d'), (d_1, d'_1) *qui se coupent* (*fig.* 68, pl. IV). Celui que nous cherchons est alors immédiatement déterminé par les droites (δ, δ'), (δ_1, δ'_1) menées parallèlement aux premières du point donné o, o'.

2° *Le plan donné est déterminé par ses traces* $P\alpha P'$ (*fig.* 69, pl. IV). — La question présente peut se résoudre par le procédé général indiqué plus haut, dont l'application n'offre aucune difficulté. Quand la disposition des lignes de l'épure le permet, on peut réduire ce tracé. En effet, au lieu de construire dans le plan donné une droite quelconque, employons l'une des lignes qui le déterminent, sa trace verticale $\alpha P'$ par exemple, et, par le point donné o, o', menons une parallèle d, d' à cette ligne, dont la trace horizontale h sera un point de la trace, sur ce même plan coordonné, du plan cherché ; conséquemment, la parallèle Q à la droite αP, menée par h, donne la trace horizontale du plan inconnu, laquelle, par sa rencontre β avec la ligne de terre, fournit un point de la trace verticale du plan parallèle ; en conduisant enfin par ce point une parallèle $\beta Q'$ à la droite $\alpha P'$ on a la seconde trace du plan qu'il s'agissait de construire.

3° *Le plan donné est déterminé par l'une de ses normales* n, n' *et par le pied* p, p' *de cette ligne* (*fig.* 70, pl. IV). — Par le point donné o, o', menons une ligne de front du plan inconnu : la projection horizontale de cette ligne est la parallèle à la ligne de terre menée par o, et sa projection sur le second plan coordonné n'est autre que la perpendiculaire menée par o' à la droite n' (§ 42). Actuellement, en construisant la trace horizontale h de cette ligne auxiliaire, on trouve un point de la trace horizontale

du plan cherché; et si, de ce point, on abaisse une perpendiculaire Q à la droite n, on aura : d'abord la trace horizontale du plan cherché (§ **40**), ensuite, au point de croisement β de cette ligne avec la ligne de terre, un point de la trace verticale du même plan ; par conséquent, la perpendiculaire Q′ à la droite n', menée par β, donnera enfin la trace verticale du plan parallèle qu'il fallait construire.

66. Problème IX. — *Déterminer l'intersection de deux plans* P *et* Q.

Solution générale (*fig.* 71, pl. IV). — *On coupe les deux plans* P *et* Q *par un plan auxiliaire* R, *choisi de façon que ses intersections* I, I_1, *avec les plans donnés, soient faciles à construire sur l'épure ; la rencontre* A *de ces droites détermine un point de la ligne d'intersection des plans donnés ; on en obtient un second par un nouveau plan auxiliaire.* — La question actuelle est fondamentale en géométrie descriptive, il importe donc que le lecteur sache appliquer la solution générale que nous venons d'indiquer aux divers cas usuels que nous allons successivement examiner.

67. — 1° *Les plans sont déterminés par leurs traces qui se coupent dans les limites de l'épure* (*fig.* 72, pl. IV). — Soient $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ les traces des deux plans donnés; on trouve, en employant comme plan auxiliaire le plan horizontal de projection, sur les plans donnés les droites αP, βQ, et, au point de rencontre de ces lignes, un point h, h' de l'intersection cherchée, qui n'est autre que la trace horizontale de cette intersection. Prenant ensuite le second plan coordonné pour plan auxiliaire, on obtient de même la trace verticale v, v' de la droite inconnue.

La droite vh, $v'h'$, qui unit les deux points ainsi trouvés, est la ligne de rencontre des plans donnés.

68. — 2° *Les plans sont donnés par leurs traces qui se coupent en deux points éloignés* (§ **56**).

Première méthode (*fig.* 73, pl. IV). — Les plans auxiliaires employés dans le cas précédent, donnant des points de rencontre éloignés, doivent être changés ; on les remplace en général par des plans parallèles aux plans coordonnés ; nous prendrons, par exemple, un plan auxiliaire horizontal ayant sa trace verticale en R′, qui croisera ceux $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ dont on cherche l'intersection suivant les lignes (i, i'), (i_1, i'_1), lesquelles se croiseront à leur tour en un point m, m' appartenant à la ligne cherchée ; à l'aide d'un nouveau plan auxiliaire horizontal, on construira de même un second point de l'intersection, et cette ligne sera alors déterminée par deux de ses points.

Ce procédé exige quelquesfois des tâtonnements ; en effet, en plaçant le plan horizontal auxiliaire R′ dans une position arbitraire, le point d'intersection qu'il contient pourrait ne pas se trouver projeté dans les limites de l'épure : il faudrait alors, pour l'y amener, déplacer le plan R′ parallèlemnet à lui-même un certain nombre de fois ; ces tâtonnements peuvent être longs ; nous donnerons bientôt le moyen de les éviter.

Le procédé employé dans le présent paragraphe est encore applicable quand les plans sont donnés par trois points on par deux droites qui se coupent ; nous engageons le lecteur à exécuter les épures qui en résultent.

Deuxième méthode (*fig.* 74, pl. IV). — Quand les traces des deux plans se coupent sous un angle très-aigu, le procédé que nous venons d'expliquer est en défaut ; en effet, les horizontales ou les lignes de front des deux plans ne se coupent généralement pas dans les limites de la feuille de papier, et si elles

s'y coupaient, leurs points d'intersection seraient mal déterminés. Effectivement pour qu'un tracé soit exact, il faut en général : 1° *que* la rencontre des lignes donnant les divers points de la figure ne se fasse pas sous un angle trop aigu ; 2° *que* les lignes inconnues soient déterminées par des points suffisamment éloignés.

Dans le cas présent, la première de ces conditions générales n'étant pas remplie, quand on emploie des plans auxiliaires parallèles aux plans coordonnés, on prendra pour premier plan auxiliaire R celui qui passe par la ligne de terre et par un point a, a' dont la cote est petite et dont l'éloignement est quelconque, et on construira d'abord la ligne de rencontre du plan R avec l'un des plans donnés $P\alpha P'$; α en est un premier point, on en obtient un second en les coupant par un nouveau plan auxiliaire horizontal H', lequel croise les plans R, $P\alpha P'$ suivant les horizontales $(ad, a'd')$, $(vf, v'f')$, dont l'intersection b, b' est le second point qu'il s'agissait de construire ; conséquemment, la projection verticale de l'intersection des plans R et $P\alpha P'$ est en i'.

D'une façon absolument semblable on a construit la projection verticale i'_1 de la rencontre du second plan donné $Q\beta Q'$ et du plan auxiliaire conduit par la ligne de terre et par le point a, a'.

Maintenant, en prenant la rencontre des lignes i', i'_1 on obtient un point m' de la projection verticale demandée.

Cette méthode ne donnant commodément qu'une projection d'un seul point de la ligne de rencontre des plans ne sera utilement employée que dans le cas où la détermination des points de rencontre offrirait une grande difficulté.

Troisième méthode (*fig.* 75, pl. IV). — Cherchons d'abord, en coupant l'un des plans donnés $P\alpha P'$ par un plan auxiliaire $R\gamma R'$ parallèle au second plan donné $Q\beta Q'$, la direction $v'_1h'_1$, v_1h_1, de l'intersection ; puis, pour obtenir la projection verticale demandée, remarquons que nous sommes conduit à tracer une droite parallèle à $v'_1h'_1$ et passant par le point de rencontre éloigné des droites P', Q'.

Pour cet effet, menons la droite ab perpendiculaire à $v'_1h'_1$ et, par conséquent, à la droite inconnue, et concevons le triangle qui aurait pour sommet le point de concours éloigné des droites P', Q' et pour base ab ; comme la ligne cherchée en est une hauteur, on peut la tracer en menant d'abord les hauteurs ac, bd qui donnent le point de concours f des trois hauteurs du triangle, d'où l'on déduit la troisième hauteur fg qui n'est autre que la projection verticale cherchée. On construira de même la seconde projection de l'intersection des plans donnés.

Quatrième méthode (*fig.* 76, pl. IV). — La présente question peut se résoudre, comme toutes celles qui résultent de points éloignés, à l'aide de l'homothétie ; soient en effet $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ les plans donnés : prenant arbitrairement sur xy un point β_1, construisons, en adoptant pour centre d'homothétie le point α et pour rapport de similitude $\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta_1}$, une figure homothétique à celle que nous cherchons ; les parallèles Q'_1, Q_1 menées par β_1 aux traces Q, Q' seront les homologues de ces dernières, et comme les droites αP, $\alpha P'$ qui passent par le centre d'homothétie sont à elles-mêmes leurs homologues, on obtient, en appliquant le tracé général qui donne l'intersection de deux plans dont les traces se coupent dans les limites de la feuille de dessin (§ 67), les homologues $h'_1v'_1$, h_1v_1 des droites cherchées.

Pour construire ces droites elles-mêmes, prenons arbitrairement un point a sur Q' dont l'homologue est à la rencontre a_1 des droites Q'_1, αa, et traçons les droites a_1v_1, $a_1h'_1$, ainsi que leurs paral-

lèles av, ah' menées par le point a; ces dernières sont respectivement les homologues des premières, et déterminent par leur rencontre avec xy les homologues v, h' des points v_1, h'_1; il en résulte que les parallèles i', i menées de ces derniers points aux droites $h'_1v'_1$, v_1h_1 sont les projections de l'intersection des plans donnés.

Cinquième méthode (*fig.* 77, pl. IV). — Soient toujours $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ les traces des plans donnés et xy la ligne de terre. Déplaçons cette dernière parallèlement à elle-même, et soit x_1y_1 sa nouvelle position; on sait que les projections des lignes ne changeront pas (§ **23**); quant aux traces des plans, comme les plans coordonnés se sont aussi déplacés parallèlement à eux-mêmes, elles se déplaceront également, mais en conservant leurs directions; conséquemment, on les trouvera facilement dès qu'on aura construit un point de chacune d'elles; pour construire ces points, observons que, dans les deux systèmes de plans coordonnés considérés, la trace verticale du plan $Q\beta Q'$ a ses projections en $\beta Q'$, xy; que, par suite, la trace h de cette droite sur le nouveau plan horizontal donne l'un des points cherchés, d'où l'on déduit, en conduisant par ce point la parallèle $Q_1\beta_1$ à la droite Q, la nouvelle trace horizontale de l'un des plans donnés; puis, en conduisant encore par la rencontre β_1 de cette droite et de x_1y_1, la parallèle Q'_1 à la droite Q', on a enfin la nouvelle trace verticale de ce même plan donné.

Pour le second plan les traces $P_1\alpha_1P'_1$ se construisent de même; cela fait, en prenant, dans le nouveau système de plans coordonnés, la rencontre $v'_1h'_1$, v_1h_1, des plans $Q_1\beta_1Q'_1$, $P_1\alpha_1P'_1$, on obtient les projections communes aux deux systèmes de plans coordonnés de la droite de rencontre i', i des plans donnés.

69. Problème X. — *Trouver le point où une droite D perce un plan P.*

Solution générale (*fig.* 78, pl. IV). — *Par la droite* D *on conduit un plan auxiliaire* Q, *choisi de façon que son intersection* I *avec le plan donné* P *offre une construction facile; puis on prend la rencontre* A *des droites* I *et* D; A est le point d'intersection cherché, car il appartient aux droites D, I et, par conséquent, à la droite D et au plan P.

On prend généralement comme plan auxiliaire, pour plus de simplicité dans le tracé, celui qui projette la droite donnée sur l'un des plans coordonnés.

Appliquons la méthode générale à quelques exemples usuels :

70. — 1° *Le plan est donné par ses traces* (*fig.* 79, pl. IV). — Soient $P\alpha P'$, (d,d') les traces du plan et les projections de la droite.

Adoptons comme plan auxiliaire celui qui projette la droite sur le plan horizontal; ses traces sont $Q\beta Q'$, et sa rencontre avec le plan donné se projette en vh, $v'h'$ (§ **67**); sur le plan horizontal vh et d se confondant ne peuvent donner l'une des projections du point cherché, au contraire les projections verticales correspondantes $v'h'$, d' donnent, par leur rencontre a', la projection verticale de ce point; il est alors facile d'obtenir sa seconde projection en prenant la rencontre a de la ligne de rappel menée par a' et des projections confondues des droites qui le contiennent : a, a' est donc le point en lequel la droite d, d' perce le plan $P\alpha P'$.

Lorsque les traces des plans perpendiculaires aux plans coordonnés conduits par la droite donnée rencontrent celles du plan donné $P\alpha P'$ en des points éloignés (§ **56**), on a recours à un plan auxiliaire quelconque $Q\beta Q'$ (*fig.* 80, pl. IV) contenant les traces θ, t' de la droite donnée d, d' et, par suite, cette droite elle-même; puis, conformément à la solution générale, on construit la rencontre vh, $v'h'$ des

plans $Q\beta Q'$, $P\alpha P'$, et enfin, prenant le point de croisement des droites (d, d'), $(vh, v'h')$, on obtient le point de rencontre a, a' de la droite (d, d') et du plan $P\alpha P'$.

71. — 2° *Le plan est défini par deux droites qui se coupent* (*fig.* 81, pl. IV). — Soient (δ, δ'), (δ_1, δ'_1) les projections des droites qui déterminent le plan donné, et d, d' celles de l'autre droite donnée.

Prenons toujours pour plan auxiliaire le plan vertical projetant de la droite D, et cherchons son intersection avec les droites du plan donné; comme tous les points du plan auxiliaire se projettent horizontalement sur d, la rencontre de ce plan et de la droite δ, δ' se projettera sur ce plan coordonné en m, et sur l'autre à la rencontre m' de δ' et de la ligne de rappel du point m; de même les projections du point de rencontre du plan auxiliaire et de δ_1, δ'_1 se feront en m_1, m'_1; conséquemment, l'intersection des deux plans est la droite mm_1, $m'm'_1$; pour continuer l'application de la solution générale, on prend la rencontre des droites (d, d'), $(mm_1, m'm_1)$, qui se trouve projetée sur le plan vertical au point de croisement a' des droites $d', m'm'_1$, et, sur le plan horizontal, au point de rencontre a de la ligne de rappel du point a' et de la projection d, commune aux deux droites. Les projections du point qu'il s'agissait de construire sont donc a, a'.

72. Problème XI. — *Intersection de deux plans déterminés chacun par deux droites qui se coupent* (*fig.* 82, pl. V). — Soient (d, d') (d_1, d_1') et (δ, δ') (δ_1, δ'_1) les deux couples de droites déterminant les plans dont on cherche la rencontre.

L'intersection s'obtiendrait facilement en employant, comme nous l'avons déjà dit, des plans auxiliaires parallèles à l'un des plans de projection; indiquons une solution plus simple.

D'une manière générale on peut prendre, par le procédé du précédent paragraphe, la rencontre de deux quelconques des droites données avec celui des plans qui ne les contient pas; mais, pour donner à l'épure un plus grand intérêt, après avoir construit par la méthode précitée l'un des points de la rencontre des plans, nous chercherons, d'après la solution générale, un second point de cette rencontre en adoptant comme plan auxiliaire celui qui est bissecteur des dièdres 2 et 4.

Commençons l'exécution du tracé en construisant, conformément à ce qui vient d'être dit et au procédé indiqué dans le paragraphe précédent, le point de rencontre de la droite δ_1, δ'_1 et du plan des droites (d, d'), (d_1, d'_1) : en employant le plan vertical projetant de Δ_1 on trouve les points de rencontre (a, a'), (a_1, a'_1) des deux plans, et, en o, o', celui de la droite et du plan.

En ce qui concerne le second point de croisement des plans donnés, coupons, comme il a été dit, ces plans par le plan bissecteur des dièdres 2 et 4; on trouvera d'abord un point de rencontre sur chacune des droites données, en prenant simplement les points de croisement des deux projections de chacune d'elles, et on obtiendra ensuite les lignes de rencontre $(mm_1, m'm'_1)$, $(nn_1, n'n'_1)$ des plans donnés et du plan auxiliaire en traçant les droites qui unissent les points d'intersection relatifs à chacun des plans donnés; cela fait, le point de croisement p, p' de ces lignes fournit le second point cherché : la droite demandée est donc $o'p', op$.

73. Problème XII. — *Construire le point d'intersection de trois plans* (*fig.* 83, pl. V). — On cherche les intersections de ces plans, combinés deux à deux; ces trois droites de rencontre doivent, si l'épure est exactement faite, concourir en un seul point a, a' qui n'est autre que le point demandé; l'exécution des traces par cette méthode se trouve suffisamment indiquée par la figure 83, planche V. On eût pu également construire l'intersection de deux des plans donnés et prendre ensuite le point où cette ligne perce le troisième plan.

74. Problème XIII. — *Par un point donné a, a', conduire une droite qui s'appuie sur deux droites données* (d, d'), (d_1, d'_1) (*fig.* 84, pl. V).

Solution générale. — *La droite cherchée n'est autre que la rencontre des plans conduits par a, a' et par chacune des droites données.*

Exécution du tracé. — Supprimons la ligne de terre (§ **23**) et menons par le point a, a' des droites (δ, δ'), (δ_1, δ'_1) respectivement parallèles à celles que l'on nous donne, les couples de droites parallèles (D, Δ), (D_1, Δ_1) déterminent les deux plans dont on cherche la rencontre; pour l'obtenir, employons le plan bissecteur des dièdres 2 et 4 comme plan auxiliaire; il détermine sur les plans conduits par les couples de parallèles les lignes de rencontre $(mn, m'n')$, $(m_1n_1, m'_1n'_1)$, (§ **31**) qui par leur croisement p, p' donnent à leur tour un point de l'intersection cherchée; a, a' en est un autre : conséquemment, cette intersection, qui n'est autre que la droite qu'il s'agit de construire, se projette suivant $ap, a'p'$, et l'épure doit offrir cette vérification que les points de rencontre (o, o'), (o_1, o'_1) des projections de cette droite et de celles des droites données doivent appartenir deux à deux à la même ligne de rappel. On eût pu résoudre le problème actuel en traçant la droite de jonction du point a, a' au point où l'une des droites données croise le plan conduit par l'autre et par ce même point a, a'.

75. Problème XIV. — *Construire une droite parallèle à une droite donnée δ, δ' et s'appuyant sur deux autres droites données* (d, d'), (d_1, d'_1), (*fig.* 85, pl. V).

Solution générale. — *Par chacune des droites* (d, d'), (d_1, d'_1) *on conduit un plan parallèle à la troisième droite δ, δ', et l'on prend la rencontre de ces plans, qui n'est autre que la ligne cherchée;* pour plus de simplicité dans les tracés, cette ligne de rencontre peut être obtenue en menant par un point de la droite d, d' une parallèle à δ, δ' et en prenant ensuite l'intersection du plan conduit par d, d' et par cette parallèle avec la droite d_1, d'_1; alors, tirant par ce point de rencontre une parallèle à δ, δ', on aura la ligne cherchée.

Exécutions des tracés. — Soit m, m' le point pris arbitrairement sur la droite d, d'; menons par ce point la parallèle δ_1, δ'_1, à la droite δ, δ', et, à l'aide du plan auxiliaire vertical projetant de la droite d_1, d'_1, construisons, en nous conformant au tracé précédemment expliqué (§ **71**), l'intersection o, o de d_1, d'_1 et du plan des droites (d, d'), (δ_1, δ'_1); la parallèle $oc, o'c'$ menée du point o, o' à δ, δ' fournit alors la ligne cherchée, et l'épure se trouve soumise à cette vérification que les points c, c' doivent appartenir à la même ligne de rappel.

EXERCICES SUR LES TROIS PREMIERS CHAPITRES

76. Problème I. — *Construire les projections centrales ou l'ombre au flambeau, sur les deux plans de projection, d'un segment de droite, dans les cas suivants :*

1° *La droite $ab, a'b'$ est oblique aux deux plans coordonnés* (*fig.* 86, pl. V). — Prenez les traces $(\alpha v', \alpha h)$ sur les deux plans de projection du plan déterminé par le flambeau f, f' et par la droite $ab, a'b'$ et limitez-les aux rayons lumineux $(fa, f'a')$, $(fb, f'b')$ des extrémités du segment donné : Vous trouverez ainsi les lignes αA_1, αB_1 qu'il s'agissait de construire.

2° *La droite est de front* (à résoudre).

3° *La droite est horizontale* (à résoudre).

4° *La droite est de profil* (à résoudre).

5° *La droite est perpendiculaire au plan horizontal.* — Soient ab, $a'b'$ les projections du segment de droite dont on cherche l'ombre sur les plans coordonnés, en supposant le flambeau en f, f' (*fig.* 87, pl. V). Les lignes cherchées ne sont autres que les traces du plan conduit par ab, $a'b'$ et par f, f', limitées aux rayons lumineux des extrémités de la droite donnée; on construit ces traces en observant que la droite AB, étant perpendiculaire au plan horizontal, le plan le sera également; que, par suite, sa trace horizontale sera en fa, et que, sur l'autre plan coordonné, la trace s'obtiendra en conduisant par le point de rencontre des droites fa, xy une perpendiculaire à cette dernière; les lignes d'ombre seront alors limitées aux traces A_1, B_1 des rayons lumineux (fa, $f'a'$), (fb, $f'b'$) conduits, comme nous l'avons déjà dit, par les extrémités de la droite donnée.

77. Problème II. — *Construire l'ombre au soleil, ou les projections obliques d'un segment de droite sur les deux plans de projection, dans les cinq cas du paragraphe précédent.* — Nous traiterons seulement le second cas, pour lequel la droite donnée ab, $a'b'$ est de front (*fig.* 88, pl. V), les rayons lumineux ayant d'ailleurs une direction quelconque l, l'. Ces rayons, en glissant sur ab, $a'b'$, engendrent un plan qui n'est autre que celui de la droite donnée et d'une parallèle aA_1, $a'A'_1$ à l, l', et dont la trace horizontale se trouve sur la droite de jonction A_1, θ des traces des droites (ab, $a'b'$), (aA_1, $a'A'_1$), sur ce même plan coordonné; en ce qui concerne la seconde trace cherchée, remarquons d'abord que la rencontre α de xy et de θA_1 en est un point, et d'autre part que la droite de front ab, $a'b'$ en est la direction, d'où l'on conclut que cette ligne sera la parallèle à $a'b'$ menée par α; la partie utile de ces traces se trouve limitée aux rayons lumineux des extrémités de la droite donnée : celui du point a, a' détermine le point limite A_1, et celui du point b, b' le second point limite B.

78. Problème III. — *Construire l'ombre portée par une ligne sur une autre.*

1° Dans le cas du flambeau;

2° Dans le cas du soleil.

On construit, sur un plan quelconque, l'ombre des deux lignes, et, en menant la droite de jonction du point de croisement des lignes d'ombre soit au flambeau, soit, dans le cas du soleil, au point à l'infini dans la direction des rayons lumineux, on obtient, par la rencontre de cette droite et des lignes données, le point de l'ombre portée sur l'une d'elles et le point de l'autre que fournit cette ombre portée.

79. Problème IV. — *Vérifier que deux droites sont dans un même plan lorsque leurs projections de noms différents se confondent deux à deux.* — Soient (ab, $a'b'$) (cd, $c'd'$) les projections deux à deux confondues des droites données (*fig.* 89, pl. V); dans le cas figuré sur notre épure, les projections données se rencontrent; par suite, les droites de l'espace se coupent elles-mêmes en un point m, m' du plan bissecteur des dièdres 2 et 4; dans l'hypothèse contraire, les droites données seraient parallèles entre elles et parallèles à ce plan bissecteur; on en conclut que dans tous les cas les droites sont dans un même plan.

80. Problème V. — *Trouver les traces et indiquer la visibilité d'une courbe dont les projections* C, C' *se confondent* (*fig.* 90, pl. V). — Considérons les lignes de rappel 1, 2, 3 et 4; d'abord la ligne 1 donne les points de la courbe (a, a'), (a, b'), (a, c'), (a', b), (a', c), (b, b'), (b, c'), etc.; la ligne 2 donne un seul point d, d'; les lignes 3 et 4 en donnent chacune plusieurs; on en conclut que la courbe de l'espace est formée de diverses parties dont les projections se recouvrent, et qui donnent, en appliquant la construction connue (§30), les traces v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5. — En ce qui concerne la visibilité,

remarquons que dans le cas de deux lignes l'une visible, l'autre cachée, se recouvrant en projection, on trace la ligne commune en trait plein ; que par suite on doit tracer en points ronds, les seules portions de la ligne donnée n'offrant pas sur les lignes de rappel qui les rencontrent des points placés de part et d'autre de xy.

81. Problème VI. — *Tracer les épures des quarante-trois positions que peut occuper, par rapport aux plans de projection, une droite de l'espace.*

On trouvera :

1° Pour les droites obliques à la ligne de terre et aux plans coordonnés, quatre positions ;

2° Pour les droites perpendiculaires à l'un des plans coordonnés, six positions ;

3° Pour les droites parallèles à l'un des plans de projection et obliques à l'autre, six positions ;

4° Pour celles qui sont parallèles aux deux plans coordonnés et à une distance arbitraire de chacun d'eux, six positions ;

5° Pour celles qui étant parallèles à la ligne de terre sont encore sur l'un des plans bissecteurs des dièdres que forment les plans coordonnés, cinq positions ;

6° Pour celles qui sont dans l'un des plans bissecteurs des dièdres formés par les plans coordonnés, quatre positions ;

7° Pour celles qui sont perpendiculaires à l'un de ces plans bissecteurs, quatre positions ;

8° Pour celles qui coupent la ligne de terre, quatre positions ;

9° Pour celles qui sont perpendiculaires en direction à la ligne de terre, quatre positions.

82. Problème VII. — *Tracer les épures des vingt-cinq positions que peut occuper un plan par rapport aux plans de projection.*

Vous trouverez :

1° Deux positions où le plan est oblique sur les deux plans de projection et sur la ligne de terre ;

2° Deux positions où le plan est perpendiculaire à l'un des plans coordonnés et oblique à l'autre ;

3° Quatre positions où le plan est parallèle à la ligne de terre, et oblique aux plans coordonnés ;

4° Quatre positions où le plan est parallèle à la ligne de terre et perpendiculaire à l'un des plans bissecteurs des dièdres que forment les plans coordonnés ;

5° Deux positions où le plan passe par la ligne de terre ;

6° Deux positions où il se confond avec l'un des plans bissecteurs des dièdres formés par les plans coordonnés ;

7° Quatre positions où le plan est parallèle à la ligne de terre et perpendiculaire à l'un des plans bissecteurs des dièdres que forment les plans coordonnés ;

8° Deux positions où le plan est perpendiculaire à l'un des plans bissecteurs des dièdres formés par les plans de projection ;

9° Une position où le plan est perpendiculaire à la ligne de terre.

83. Problème VIII. — *Une droite de profil passe par un point donné a, a' et rencontre une autre droite d, d' en un point éloigné ; on propose d'achever de la déterminer en construisant, dans les limites de l'épure, les projections d'un second point de cette ligne.* — Projetons, parallèlement à d, d' (*fig.* 91, pl. V) et sur le plan bissecteur des dièdres 2 et 4, la droite de profil ; son point inaccessible de rencontre avec d, d' se projettera à l'intersection s, s' de cette dernière droite et du plan bissecteur (§ 31), la pro-

jetante oblique du point a, a' sera la parallèle à d, d' menée par ce point, et, par la rencontre de cette parallèle avec le plan bissecteur sur lequel on exécute la projection auxiliaire, on aura la projection oblique α, α' d'un second point de la droite de profil; conséquemment la droite de jonction des points (α, α'), (s, s') sera la projection auxiliaire cherchée.

Cela fait, prenant, dans une position arbitraire, l'un des points β, β' de cette projection, et relevant ce point à l'aide d'une parallèle à la direction d, d' des projetantes; on aura le point b, b' qu'il s'agissait de construire.

84. Problème IX. — *Connaissant l'une des projections d'un point situé dans un plan déterminé par les projections* $(pn, p'n')$, (p, p') *de l'une de ses normales, et de son pied, construire la seconde projection du point* (*fig.* 92, pl. V). — Soit donnée, par exemple, la projection verticale m' du point. Afin d'obtenir sa projection sur le second plan coordonné, menons par p, p' une ligne de front du plan donné qui a pour projection horizontale la parallèle à la ligne de terre conduite par p et pour projection verticale la perpendiculaire à $p'n'$ menée par p' (§ **42**).

Conduisons ensuite par le point M une horizontale du plan : sa projection verticale est immédiatement déterminée par la parallèle à la ligne de terre conduite par m' ; quant à sa projection sur le second plan coordonné, elle doit passer par la projection, sur ce plan, de la rencontre A des lignes auxiliaires, point dont la projection verticale est au croisement a' des projections verticales des lignes qui déterminent A, et qui se projette horizontalement en a sur la ligne de rappel menée par a' et sur la projection correspondante de la droite de front.

Cela fait, la projection cherchée de l'horizontale se trouve être la perpendiculaire à pn menée par a, et ensuite, la ligne de rappel menée par m' détermine par son croisement m avec cette perpendiculaire le point qu'il fallait construire.

85. On appelle ligne de plus grande pente d'un plan, par rapport à l'un des plans de projection, les lignes qui, situées dans le plan, sont perpendiculaires à sa trace sur le plan de projection considéré.

Problème X. — *Connaissant les projections d, d' de l'une des lignes de plus grande pente d'un plan par rapport au plan horizontal, construire les traces de ce plan* (*fig.* 93, pl. V). — Les traces du plan passent par celles de la droite; déterminons donc ces dernières en v', h; puis, remarquons que l'angle droit formé par la ligne de plus grande pente avec la trace horizontale du plan se conservera en projection horizontale (§ **42**), et que, par suite, la trace horizontale cherchée P sera la perpendiculaire à d menée par h; cette trace fournira par sa rencontre avec xy un point α de la seconde trace cherchée, laquelle sera donnée par la droite de jonction P' des points α, v'.

86. Problème XI. — *Connaissant les projections d, d' d'une des lignes de plus grande pente d'un plan par rapport au plan vertical de projection, et la projection horizontale m d'un point de ce plan, construire la seconde projection du point* (*fig.* 94, pl. V). — Conduisons par M une ligne de front du plan : sa projection horizontale est la parallèle à la ligne de terre menée par m; pour construire l'autre projection, observons que par sa rencontre avec d, d' la ligne de front donne dans l'espace un point dont la projection horizontale est en a et qui se projette sur le second plan coordonné en a', à la rencontre de la ligne de rappel du point a et de d'; dès lors, la droite de front devant être perpendiculaire à D, on obtiendra sa seconde projection en conduisant par a' une perpendiculaire à d' (§ **42**).

Cela fait, comme d'autre part le point M se trouve sur la ligne de front que nous venons de

construire, sa projection verticale sera à la rencontre m' de la projection de même nom de cette ligne de la ligne de rappel menée par m.

87. Problème XII. — *Construire les traces du plan de deux droites parallèles à la ligne de terre* (*fig.* 95, pl. V). — Prenant deux points (a, a'), (b, b') sur les droites données (d, d'), (d_1, d'_1), on cherche les traces h, v' de leur droite de jonction, et l'on conduit par ces points des parallèles P, P' à la ligne de terre, qui sont évidemment les traces cherchées.

88. Problème XIII. — *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux plans parallèles à la ligne de terre soient parallèles entre eux.* — Coupant les deux plans par un plan de profil, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que les plans soient parallèles est que les deux lignes de rencontre soient elles-mêmes parallèles, ou, ce qui revient au même, *que les distances de la ligne de terre aux traces des plans, prises dans le même ordre, soient proportionnelles.*

89. Problème XIV. — *Mener par un point donné m, m' un plan parallèle à un plan déterminé par ses traces, dans les cas particuliers suivants :*

1° *Sur l'épure les traces du plan* P, P' *et les projections des points m, m' sont respectivement confondues* (*fig.* 96, pl. VI). — Menant par les points m, m' une horizontale du plan cherché, dont les projections se trouvent être deux lignes qui, passant par m, m', se dirigent l'une parallèlement à xy, l'autre parallèlement à P; on trouve, après avoir construit la trace verticale v' de cette ligne, la parallèle QQ' à PP', qui n'est autre que les traces confondues du plan cherché.

2° *Le plan donné est conduit par la ligne de terre et par un point a, a'* (*fig.* 97, pl. VI). — En supposant le point m, m' quelconque, joignons par une droite a, a' au point b, b' arbitrairement choisi sur la ligne de terre; cette droite de jonction $a'b'$, ab sera dans le plan donné; par suite, sa parallèle menée par m, m' donnera, par ses traces v', h, deux points des traces cherchées, et, en conduisant par ces points des parallèles à xy, on aura enfin les traces P, P' qu'il s'agissait de construire.

90. Problème XV. — *Trouver l'intersection de deux plans* (P, P'), (Q, Q') *dont les traces sont en ligne droite sur l'épure* (*fig.* 98, pl. VI). — Les traces de la ligne de rencontre sont confondues en h, v'; conséquemment la droite cherchée est dans un plan de profil, et se trouve déterminée par les points h, v'; ajoutons qu'elle est en outre parallèle au plan bissecteur des dièdres 1 et 3.

91. Problème XVI. — *Trouver la rencontre de deux plans dont les traces de noms différents se confondent sur l'épure* (fig. 99, pl. VI). — Soient (αP', αQ), (αP, αQ') les traces respectivement confondues ; concevons qu'on les ait relevées dans leurs positions naturelles, et observons que les droites dédoublées (αP', αQ), (αP, αQ') seront alors respectivement symétriques par rapport au plan bissecteur des dièdres 2 et 4, et que les plans étant par suite eux-mêmes symétriques par rapport à ce plan bissecteur, leur intersection devra se faire dans le plan de symétrie, ce sera donc une droite à projections confondues (§ 34); d'autre part, comme α est un point de cette rencontre, tout revient à en construire un autre; en vue de ce but, prenons une droite $v'h'$, vh du plan PαP', et cherchons sa rencontre m, m' avec le plan bissecteur (§ 31), ce sera un point de l'intersection; par suite, la droite de jonction des points α, m donnera les projections confondues i, i' de la ligne de rencontre qu'il s'agissait de construire.

92. Problème XVII. — *Trouver l'intersection de deux plans dont les traces de noms différents sont confondues et symétriques par rapport à la ligne de terre* (*fig.* 100, pl. VI). — Soient PαP', QαQ' les deux plans donnés; ils sont, dans le cas considéré, non-seulement symétriquement placés par rapport au

plan bissecteur des dièdres 2 et 4 (§ 91), mais ils le sont aussi par rapport au plan de profil du point α; les projections de leur ligne de rencontre sont donc sur les traces du plan de profil, et l'un des points de cette ligne se trouve en α; quant au second point nécessaire à sa détermination, on l'obtient en prenant sur les traces du plan de profil, dans une position arbitraire, un point a, a' à projections confondues.

93. Problème XVIII. — *Trouver l'intersection de deux plans déterminés par deux couples de droites dont les projections de noms différents se confondent sur l'épure* (à résoudre).

94. Problème XIX. — *Construire l'intersection de deux plans dont les traces verticales sont parallèles* (*fig.* 101, p. IVI). — Soient $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ les traces des plans; par suite du parallélisme des droites $\alpha P'$, $\beta Q'$, l'intersection des plans est une parallèle à chacune des ces deux droites, qui a pour trace horizontale h, h', dont la projection horizontale est la parallèle hi à xy menée par h, et dont la projection, sur l'autre plan coordonné, n'est autre que la parallèle $(h'i')$ à $\alpha P'$ menée par h'.

95. Problème XX. — *Construire l'intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre* (*fig.* 102, pl. VI). — Soient (P, P'), (Q, Q') les traces des plans donnés; pour obtenir leur rencontre, qui est évidemment parallèle à xy, déterminons, à l'aide d'un plan auxiliaire vertical $R\beta R'$, les projections a, a' d'un point de cette intersection, et, afin de compléter la détermination de la ligne cherchée i, i', menons par chacun des points a, a' une parallèle à xy.

96. Problème XXI. — *Construire l'intersection de deux plans dont l'un passe par un point donné m, m' et par la ligne de terre, l'autre étant parallèle à cette ligne* (*fig.* 103, pl. VI). — Soient P, P' les traces du plan parallèle à la ligne de terre; pour obtenir la ligne de rencontre, qui est encore parallèle à xy, construisons, en recourant, comme dans le cas précédent, à un plan auxiliaire vertical $R\beta R'$, l'un des points de la ligne cherchée : on obtient sur le plan P, P' la droite de croisement avec le plan auxiliaire en $(h'v')$, $(h\beta)$, sur le plan conduit par xy une droite déterminée par les points m, m' et β; par la rencontre a, a' de ces lignes on a enfin le point cherché. Actuellement les parallèles i, i' à xy menées par a et par a' sont les projections demandées.

97. Problème XXII. — *Trouver l'intersection d'un plan passant par la ligne de terre et par un point p, p', avec une droite quelconque d, d'* (*fig.* 104, pl. VI). — Construisons, en plaçant le centre de projection en p, p', la projection centrale sur le plan horizontal coordonné du plan et de la droite; celle du plan se fait sur xy, celle de la droite s'obtient en projetant d'abord l'un quelconque de ses points a, a' en α; cela fait, construisant la trace horizontale h de la droite donnée et observant que ce point h est à lui-même sa propre projection centrale, on conclut que la droite de jonction des points α, h est la projection de la droite donnée. Le point de rencontre ω des projections que nous venons de construire donne la projection centrale du point cherché; par suite, la projetante de ce point $p\omega$, $p\omega'$ donnera à son tour, par sa rencontre avec la droite d, d', le point o, o' qu'il s'agissait de construire, et, si l'épure est exactement faite, les points o, o' devront appartenir à la même ligne de rappel.

On peut, en conservant le centre de projection p, p', prendre pour plan auxiliaire de projection le plan bissecteur des dièdres 2 et 4, la projection centrale du plan donné est encore sur xy; pour trouver celle de la droite il suffit d'opérer sur deux de ses points, nous choisirons d'abord son point de rencontre δ, δ' avec le plan bissecteur auxiliaire qui est à lui-même sa propre projection, ensuite le point a, a', dont la projection centrale se fait en α_1, α'_1; la projection centrale de la droite s'obtiendra en joignant entre eux les points (δ, δ'), (α_1, α'_1), et le point de croisement de cette droite avec xy donnera la projection centrale ω du point cherché, on en déduira, comme nous l'avons déjà fait dans le premier tracé, les projections orthogonales o, o' de ce point.

Nous aurions pu construire l'intersection à l'aide du plan vertical projetant de la droite donnée, et en nous conformant à la méthode générale précédemment expliquée, mais, bien que la construction ainsi faite n'eût pas été plus longue, nous lui avons préféré le procédé particulier qui vient d'être expliqué, afin d'en indiquer le principe au lecteur.

98. Problème XXIII. — *Construire l'intersection d'une droite dont les projections se confondent et d'un plan quelconque* (*fig.* 105, pl. VI). — Soient (d, d'), $(P\alpha P')$ les projections confondues de la droite et les traces du plan; employons, en adoptant le plan bissecteur des dièdres 2 et 4 comme plan auxiliaire, la méthode générale qui sert à construire l'intersection d'une droite et d'un plan : pour obtenir la rencontre du plan $P\alpha P'$ et du plan bissecteur auxiliaire observons que α en est un premier point et, afin d'en obtenir un second, traçons une droite $vh, v'h'$ du plan donné, qui, par la rencontre m, m' de ses projections, fournit le second point cherché (§ **31**); l'intersection des plans se projette donc suivant les lignes confondues αm, $\alpha' m'$. Cela fait, la rencontre de αm et de la droite donnée d, d' détermine le point o, o' qu'il fallait construire.

99. Problème XXIV. — *Construire la rencontre d'un plan défini par l'une de ses lignes de plus grande pente p, p' par rapport au plan vertical, et d'une droite d, d' parallèle à la ligne de terre* (*fig.* 106, pl. VI).

Employons comme plan auxiliaire le plan de front conduit par d, d', qui rencontre p, p' au point a, a', et le plan donné suivant une ligne de front de ce plan passant par a, a', laquelle se projette verticalement, suivant la perpendiculaire $a'f'$, à la droite $a'p'$ menée par a' (§ **42**) et horizontalement en af sur la trace d du plan auxiliaire. On en déduit par la rencontre des droites (d, d') et $(af, a'f')$ le point de croisement cherché o, o' de la droite et du plan.

100. Problème XXV. — *Conduire par un point m, m' une droite rencontrant deux droites données (d, d'), (d_1, d'_1) dans les cas particuliers suivants :*

1° *Les droites (d, d'), (d_1, d'_1) sont respectivement placées sur chacun des plans de projection* (*fig.* 107, pl. VI). Construisons la projection centrale des lignes données sur le plan vertical de projection, par exemple, en ayant soin de placer le centre de projection au point donné m, m'; dans ces conditions, la projetante commune sera la ligne cherchée : d' est à elle-même sa propre projection centrale, quant à celle de d_1, en prenant la trace verticale v' de cette ligne, on en a un premier point; pour en trouver un second on a pris, sur notre épure, la projection α du point à l'infini a_∞ de la droite considérée.

La droite de jonction $v'\alpha$ des points que nous venons de construire rencontre d' en o' ; par conséquent, la projetante commune $mo, m'o'$ n'est autre que la ligne cherchée, et l'épure devra offrir cette vérification que les projections de la droite trouvée devront rencontrer celles de D_1 en deux points h, h' placés sur une même ligne de rappel.

2° *Les droites (d, d'), (d_1, d'_1) sont dans deux plans de profil et se trouvent déterminées par leurs traces horizontales (h, h'), (h_1, h'_1) et par un point de chacune d'elles (a, a'), (a_1, a'_1)* (*fig.* 108, pl. VI). — Nous allons projeter, conformément au procédé qui vient d'être expliqué, les deux droites sur le plan horizontal en adoptant pour centre de projection le point donné m, m'; les points h, h_1 sont à eux-mêmes leurs propres projections; (a, a'), (a_1, a'_1) ont pour projections respectives α, α_1, et les droites se projettent suivant αh, $\alpha_1 h_1$.

La rencontre de ces projections donne le point ω dont la projection verticale se fait en ω' sur xy; on en déduit la projetante commune ωm, $\omega' m'$, qui n'est autre que la ligne cherchée.

CHAPITRE IV

DES MÉTHODES

101. Parmi les dispositions diverses que peuvent présenter les données d'un problème, par rapport aux plans coordonnés auxquels on les rapporte, il en est au moins une, sauf pour un très-petit nombre de cas, pour laquelle les valeurs des inconnues se manifestent immédiatement sur les plans de projection; effectivement, veut-on trouver :

1° *La distance de deux points.* — Donnant à leur droite de jonction une position parallèle à l'un des plans coordonnés, on a, par la distance de leurs projections sur ce plan, la valeur de l'inconnue.

2° *L'intersection de deux plans.* — Prenant l'un de ces plans pour plan de projection, la trace de l'autre sur le premier détermine la ligne de croisement cherchée.

3° *L'intersection d'une droite et d'un plan.* — En plaçant la droite sur l'un des plans coordonnés, on trouve, par sa rencontre avec la trace correspondante du plan, le point de croisement cherché.

4° *La distance d'un point à un plan.* — Donnant au plan $P\alpha P'$ une position perpendiculaire au plan vertical coordonné (*fig.* 109, pl. VI), et au point une position quelconque m, m', l'inconnue a pour projections les droites $m'q'$, mq menées respectivement des projections du point perpendiculairement aux traces du plan, et limitées d'une part aux points m, m'; de l'autre : sur le plan vertical, au pied q' de la perpendiculaire à $\alpha P'$, sur le plan horizontal, au point de rencontre q de la ligne de rappel du point qq' et de la perpendiculaire à αP.

La droite ainsi trouvée étant parallèle au plan vertical se voit en vraie grandeur sur ce plan en $m'q'$.

5° *La distance d'un point à une droite.* — Si, le point m, m' étant quelconque, on prend la droite dans une position d, d' perpendiculaire au plan horizontal (*fig.* 110, pl. VI), la distance est immédiatement donnée par la droite de jonction des points m, d.

6° *La vraie grandeur d'une figure plane.* — En donnant à la figure une position parallèle à l'un des plans coordonnés, sa projection sur ce plan fournit la vraie grandeur qu'il s'agissait de déterminer (§ **25**).

7° *L'angle de deux plans.* — Prenant leur intersection dans une position perpendiculaire à l'un des plans coordonnés, leurs traces sur ce plan font entre elles le rectiligne du dièdre cherché, etc.

On est conduit, par l'examen de ces problèmes, à reconnaître la possibilité de réduire un très-grand nombre de questions à quatre problèmes fondamentaux, permettant de faire occuper aux données des positions particulières pour lesquelles les valeurs des inconnues se mettent en évidence sans difficulté sur les plans coordonnés. Ces problèmes sont les suivants :

Problème I. — *Rendre une droite parallèle à l'un des plans coordonnés.*

Problème II. — *Rendre une droite perpendiculaire à l'un des plans coordonnés.*

Problème III. — *Rendre un plan perpendiculaire à l'un des plans coordonnés.*

Problème IV. — *Rendre un plan parallèle à l'un des plans coordonnés.*

Pour résoudre ces quatre questions on peut, laissant fixes les figures, déplacer les plans de projection; on est ainsi conduit à la *méthode des changements de plans de projection*, ou bien, laissant à leur tour les plans coordonnés dans leur première position, imprimer aux figures des mouvements de rotation autour de certains axes, ce qui conduit à la *méthode des mouvements de rotation;* quand, enfin, la figure est plane, on peut trouver sa vraie grandeur en la faisant tourner autour d'une horizontale ou d'une ligne de front de son plan pour la rendre parallèle soit au plan horizontal, soit au plan vertical : on dit alors qu'on la *rabat* sur un plan horizontal ou sur un plan vertical de front : de là résulte la *méthode des rabattements.*

CHANGEMENTS DE PLANS DE PROJECTION

102. Notations. — Les lignes de terre seront désignées par les lettres x, y avec un indice égal au nombre des changements effectués; ces lettres conserveront leurs positions habituelles par rapport au spectateur, que l'on supposera toujours placé dans l'angle 1 et dans la position précédemment indiquée (§ 15) ; quant aux projections des points et aux traces des plans, on les désignera, sur les divers plans coordonnés, par les mêmes lettres, que l'on affectera encore d'un indice égal au nombre des changements effectués.

103. Problème I. — *Changer de plan vertical par rapport à un point* (*fig.* 111 et 112, pl. VI). — Soient m, m' les projections du point dans le système primitif de plans coordonnés, et x_1y_1 la nouvelle ligne de terre qui, si l'on suppose que les plans coordonnés sont toujours rectangulaires, détermine le nouveau plan vertical de projection.

Dans le nouveau système la projection horizontale m du point donné se conservera, ainsi que la grandeur et le sens de la cote $m'\mu$ du point considéré; il en résulte que la nouvelle projection verticale cherchée sera sur une perpendiculaire à la ligne de terre, au-dessus de cette ligne, et en un point m'_1, obtenu en reportant la longueur $m'\mu$ en $m'_1\mu_1$.

Dans un problème d'application, il y aurait lieu d'examiner préalablement celle des figures 111 ou 112 qui donnerait la disposition la plus favorable au point de vue de la clarté des tracés.

104. Problème II. — *Changer de plan horizontal par rapport à un point* (à résoudre).

105. Problème III. — *Changer de plan vertical par rapport à une droite.*

Solution générale. — Il suffit de faire le changement par rapport à deux points de la droite; on peut, quand la disposition des données le permet, simplifier la construction en adoptant pour l'un des points la trace horizontale de la droite.

Soient d, d' les projections de la droite (*fig.* 113, pl. VI) et x_1y_1 la nouvelle ligne de terre; prenons la trace horizontale h, h' de d, d' dans le système primitif, et projetons-la en h'_1 sur le nouveau plan vertical; plaçons ensuite dans une position arbitraire, sur la droite donnée, un point m, m' et projetons-le à son tour, d'après la méthode du paragraphe précédent, en m'_1, sur le nouveau plan vertical ; la droite de jonction des points $h'_1m'_1$ sera la ligne qu'il s'agissait de construire.

106. Problème IV. — *Changer de plan horizontal par rapport à une droite* (à résoudre).

107. Problème V. — *Changer de plan vertical par rapport à un plan.*

Solution générale. — Il suffit de faire le changement par rapport à trois points, ou à une droite et à un point, ou bien enfin par rapport à deux droites du plan donné.

Premier tracé (*fig.* 114, pl. VI). — Soient $P\alpha P'$ le plan donné et x_1y_1 la nouvelle ligne de terre; nous ferons le changement à l'aide de deux droites du plan : l'une sera sa trace horizontale, et l'autre une de ses horizontales ; la trace P est commune aux deux systèmes de plans coordonnés ; l'autre droite sera déterminée simplement par sa projection horizontale h; on en déduira d'abord dans le système primitif la trace verticale v' de cette ligne, et ensuite, dans le système nouveau, sa trace verticale t' dont la projection horizontale sera à la rencontre t de x_1y_1 et de h, et qui s'obtiendra en portant, sur la ligne de rappel menée par le point t perpendiculairement à x_1y_1, la longueur tt' égale à la cote vv' commune aux divers points de l'horizontale dans les deux systèmes de plans coordonnés.

Alors, la droite de jonction du point t' au point de croisement β des lignes P, x_1y_1 donne la trace P'_1 du plan sur le nouveau plan vertical de projection.

Deuxième tracé (*fig.* 115, pl. VI). — Soient $P\alpha P'$ le plan et x_1y_1 la nouvelle ligne de terre; la trace horizontale P est commune aux deux systèmes, et l'on a, par sa rencontre avec x_1y_1, l'un des points β de la trace verticale cherchée.

Tout se borne alors à construire un second point de cette trace; pour le faire, il est avantageux, quand la disposition des données le permet, de recourir au point de rencontre des deux traces verticales du plan donné, c'est-à-dire au point de rencontre de l'ancien plan vertical, du nouveau et du plan $P\alpha P'$, point que l'on peut déterminer, dans le premier système de plans coordonnés, en y prenant la rencontre des traces verticales du plan $P\alpha P'$ et du nouveau plan vertical; celle du premier plan s'y fait en $\alpha P'$, celle du nouveau plan vertical est la verticale vv' du point de croisement des lignes de terre, v' est donc, dans le système primitif de plans coordonnés, le point commun aux deux traces verticales du plan $P\alpha P'$; en faisant un changement de plan par rapport à ce point, on trouve, sur une perpendiculaire à x_1y_1 menée par v, et à une distance de ce point égale à la cote vv' du point v', la nouvelle projection v'_1 du point de rencontre des traces verticales : dès lors, la droite de jonction des points $\beta v'_1$ donne la trace verticale nouvelle P'_1 qu'il s'agissait de construire.

108. Problème VI. — *Changer de plan horizontal par rapport à un plan* (à résoudre).

109. Problème VII. — *Rendre une droite d, d' parallèle au plan vertical* (*fig.* 116, pl. VII). — Il suffit de prendre la nouvelle ligne de terre x_1y_1 parallèle à la projection horizontale d (§ **34**, 3°) et de chercher ensuite, suivant la méthode déjà expliquée (§ **105**), la nouvelle projection d'_1 de la droite donnée; après avoir construit la trace horizontale h de d, d', on la projettera verticalement sur x_1y_1 en h'_1 et l'on exécutera le changement de plan par rapport à l'un quelconque m, m' des points de la droite donnée; la droite de jonction des points h'_1, m'_1 sera la projection cherchée.

110. Problème VIII. — *Rendre une droite d, d' perpendiculaire au plan horizontal* (*fig.* 117, pl. VII). — On rend d'abord, en appliquant le tracé du précédent paragraphe, la droite parallèle au plan vertical ; reportons donc, pour la simplicité de la figure, les résultats de l'épure précédente sur la figure actuelle; soient x_1y_1 la ligne de terre et d'_1d les projections de la droite après qu'on l'a rendue parallèle au plan vertical.

Cela fait, adoptons une ligne de terre nouvelle x_2y_2 perpendiculaire à d'_1, et changeons le plan horizontal : la projection verticale d'_1 se conserve, ainsi que l'éloignement des divers points de la droite; conséquemment la nouvelle projection horizontale d_2 de D, qui se réduit à un point, s'obtient en reportant la distance hh'_1 en δd_2 sur le prolongement de la droite d'_1.

111. Problème IX. — *Amener un plan* $P_\alpha P'$ *à être perpendiculaire au plan vertical* (*fig.* 118, pl. VII). — On prend la nouvelle ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à la trace horizontale $_\alpha P$ du plan donné (§ **49**), et, en appliquant l'une des solutions du paragraphe 107, l'on effectue le changement de plan.

112. Problème X. — *Amener un plan à être parallèle au plan horizontal* (*fig.* 119, pl. VII). — Amenons d'abord, par le procédé du paragraphe précédent, le plan dans une position perpendiculaire au plan vertical ; soient x_1y_1 la nouvelle ligne de terre et $P_\beta P'_1$ les traces du plan après ce premier changement.

Actuellement, afin de rendre le plan donné parallèle au nouveau plan coordonné, changeons le plan horizontal en prenant la nouvelle ligne de terre x_2y_2 parallèle à P'_1; les traces du plan donné seront alors : sur le plan vertical la droite P'_1 commune aux deux systèmes de plans de projection, sur l'autre plan de projection la droite à l'infini du plan donné.

Remarque. — Quand on change le plan horizontal ou lorsque on veut, après avoir changé ce plan, changer encore le plan vertical, les plans coordonnés cessent d'être respectivement perpendiculaires ou parallèles à la direction du fil à plomb ; néanmoins, pour éviter les circonlocutions et par analogie, on continue à considérer le nouveau système comme formé d'un plan vertical et d'un second plan horizontal.

Nous prendrons comme exemple de l'application de la méthode des changements de plans de projection la question qui suit.

113. Application. — *Trouver l'angle de deux plans déterminés par leur intersection et par un point de chacun d'eux.* — Soient i, i' les projections de l'intersection et (m, m'), (n, n') celles des points donnés (*fig.* 120, pl. VII). Afin de mettre en évidence sur le plan horizontal le rectiligne de l'angle cherché, rendons l'intersection i, i' perpendiculaire à ce plan coordonné (§ **101**, 7° et § **110**); en vue de ce but, plaçons d'abord la droite i, i' dans le plan vertical en prenant la ligne de terre x_1y_1 sur la projection horizontale i de cette droite, et, par la méthode connue, changeons le plan vertical : on obtient la nouvelle projection verticale i'_1 de la droite donnée en remarquant que sa trace horizontale h est à elle-même sa propre projection sur le nouveau plan, puis en effectuant le changement pour sa trace verticale v', qui vient en v'_1; quant aux points (m, m'), (n, n'), si l'on trace par chacune de leurs projections horizontales des perpendiculaires à x_1y_1 et que l'on prenne sur ces lignes $_{\mu_1}m'_1 = {}_\mu m'$, $_{\nu_1}n'_1, = {}_\nu n'$, les points m'_1, n'_1 ainsi trouvés donneront leurs nouvelles projections.

Actuellement, prenons une ligne de terre x_2y_2 perpendiculaire à i'_1 et changeons le plan horizontal : la droite donnée est, dans le système actuel de plans coordonnés, sur le plan vertical et perpendiculaire au plan horizontal ; sa projection horizontale se réduit donc au point de croisement i_2 des droites i'_1, x_2y_2; quant aux points, ils se trouvent en m_2, n_2, sur des perpendiculaires à x_2y_2 menées par m'_1, n'_1 et à des distances $_{\mu_2}m_2$, $_{\nu_2}n_2$ de cette ligne respectivement égales aux éloignements m_{μ_1}, n_{ν_1} de ces points dans le système précédent de plans coordonnés.

Les plans donnés ont alors pour trace verticale commune la droite i'_1 et pour traces horizontales les droites i_2m_2, i_2n_2 ; l'espace angulaire α compris entre ces dernières a même mesure que celui des plans donnés.

MOUVEMENTS DE ROTATION

114. Pendant le mouvement de rotation d'une figure autour d'un axe, chaque point décrit un arc de cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe, dont le centre est le pied de la perpendiculaire menée du point sur l'axe, et dont le rayon est égal à la portion de cette perpendiculaire comprise entre le point considéré et l'axe; il importe donc, si l'on veut éviter une grande complication des tracés, de choisir les axes dans des positions perpendiculaires à l'un des plans coordonnés : effectivement, pour ces seules positions, l'une des projections des arcs parcourus par les divers points du système se fait en vraie grandeur, tandis que la seconde se réduit à une droite.

115. Problème I. — *Faire tourner un point d'une quantité angulaire α autour d'un axe vertical et dans un sens donné* (*fig.* 121, pl. VII). — Soient (z, z'), (m, m') les projections de l'axe et du point, soit encore u la flèche indiquant le sens de la rotation que l'on veut effectuer. Dans le mouvement, le point décrit un arc qui se projette : 1° en vraie grandeur sur le plan horizontal, et 2° suivant une droite parallèle à xy sur le plan vertical. Il est donc facile de figurer ces deux projections en décrivant d'abord du point z comme centre avec zm pour rayon un arc de cercle, et en conduisant ensuite une parallèle à xy par m ; la position finale du point mobile aura sa projection horizontale à la rencontre m_1 de l'arc de cercle que l'on vient de tracer et du rayon zm_1, qui fait avec zm l'angle α compté dans le sens de la flèche u ; pour construire la projection verticale du point, on prendra simplement la rencontre m'_1 de la ligne de rappel du point m_1 et de la projection verticale de l'arc de cercle ; les projections cherchées sont donc m_1, m'_1.

116. Problème II. — *Faire tourner une droite d'une quantité angulaire α autour d'un axe vertical et dans un sens donné* (*fig.* 122, pl. VII). — Soient (d, d'), (z, z') les projections de la droite et de l'axe. Pour faire tourner la droite d, d' on fait tourner deux de ses points à l'aide du procédé expliqué dans le précédent paragraphe.

Premier tracé. — Opérons sur deux points de la droite équidistants de l'axe; à cet effet, décrivons sur le plan horizontal, avec un rayon suffisamment grand, un arc de cercle de centre z, et appliquons le tracé expliqué plus haut aux points A, B de la droite D dont les projections horizontales sont sur ce cercle; ces points (a, a'), (b, b') viennent en (a_1, a'_1), (b_1, b'_1) ; donc, après le mouvement, la ligne donnée se projette suivant les droites de jonction d_1, d'_1 des points (a_1, b_1), (a'_1, b'_1).

Le second tracé s'appuie sur la détermination de la plus courte distance de deux droites dans un cas particulier important; nous allons donc, avant d'aborder la seconde solution du présent problème, résoudre cette question.

117. Problème. — *Déterminer la plus courte distance de deux droites (d, d'), (d_1, d'_1) dont l'une est perpendiculaire à l'un des plans de projection* (*fig.* 123, pl. VII). — La plus courte distance est perpendiculaire à chacune des droites données; comme perpendiculaire à d_1, d'_1, elle est horizontale, et forme donc avec d, d' un angle droit dont l'un des côtés est parallèle au plan horizontal de projection et dont la projection sur ce plan doit, par suite, se faire en vraie grandeur (§ **42**) ; d'autre part,

la commune perpendiculaire devant s'appuyer sur la droite d_1, d'_1 se projettera horizontalement suivant une droite passant au point d_1; conséquemment, cette projection n'est autre que la perpendiculaire d_1a menée du point d_1 sur la droite d; la ligne de rappel du point a donne, par sa rencontre avec d', la projection verticale a' de l'un des pieds de la plus courte distance, et la seconde projection de cette ligne sera la parallèle $a'b'$ à la ligne de terre passant par a'. En somme, nous avons trouvé les projections ab, $a'b'$ de la plus courte distance et sa vraie grandeur ab.

Quand la droite d, d' est de front, le problème se résout de même, et, sans reproduire le raisonnement, nous avons indiqué les constructions relatives à cette hypothèse particulière sur la figure 124: les projections de la plus courte distance y sont données par d_1a sur le plan horizontal, et, sur le plan vertical, par les points confondus a', b'; quant à la vraie grandeur, on l'a sur le plan horizontal en d_1a.

Cela dit, revenons au problème de la rotation d'une droite (d, d'), autour d'un axe (z, z'), dans le sens indiqué par la flèche u (*fig.* 125, pl. VII). Pour cet effet construisons d'abord la plus courte distance za, $a'b'$ des droites données, puis faisons tourner d'une quantité angulaire α le pied a, a' de cette ligne sur la droite d, d' ainsi que la trace horizontale θ, θ' de cette dernière (§ **115**); la plus courte distance conserve dans le mouvement sa longueur, par conséquent les projections horizontales des diverses positions de la droite mobile sont constamment tangentes au cercle que décrit le point a; on en conclut que la nouvelle projection d_1 de la droite D s'obtient en prenant la position a_1, a'_1 du point a, a' après sa rotation, exécutées suivant le procédé du paragraphe précédent, et en conduisant ensuite par a_1 la tangente à l'arc de cercle que décrit le point a, a'. Quant à la projection verticale de la droite d, d' dans sa nouvelle position, on observe que a'_1 en est un point, et que la trace horizontale θ de la droite d, d' vient en θ_1, sur un arc de cercle de centre z passant par θ, et sur la droite d_1; dès lors, en prenant la projection verticale θ'_1 de cette trace, on a par la droite de jonction des points θ'_1, a'_1 la projection verticale cherchée.

118. Problème III. — *Faire tourner un plan* PβP′ *autour d'un axe vertical* z, z' *d'un angle donné* α *et dans un sens donné* (*fig.* 126, pl. VII). — Il suffit de faire tourner trois points, ou une droite et un point, ou encore deux droites, du plan considéré. Nous choisirons, par exemple, la trace horizontale P et le point de rencontre du plan PβP′ avec l'axe z, z'; pour obtenir ce point de rencontre, conduisons l'horizontale du plan PβP′ dont la projection horizontale h passe au point z: sa trace verticale est à la rencontre v' de P′ et de la ligne de rappel du point d'intersection v des droites h, xy, et sa projection verticale h' s'obtient en conduisant par v' une parallèle à xy. Cela fait, la rencontre de cette horizontale et de l'axe z, z' donne le point z, a' où le plan PβP′ perce l'axe z, z'.

Maintenant nous devons faire tourner la droite βP autour de z, z', dans le sens de la flèche u, de l'angle donné α; pendant ce mouvement, cette droite est constamment tangente au cercle décrit de z comme centre, avec la distance zp du point z à la droite pour rayon, et, lorsque le point p a tourné de l'angle α pour prendre la position p_1, elle vient se placer sur la tangente P_1 au cercle. Actuellement, le problème se réduit à construire les traces du plan conduit par la droite P_1 et par le point fixe z, a'; à cet effet, menons par ce dernier point une horizontale du plan cherché, sa projection horizontale est la parallèle à P_1 menée par z; quant à sa projection verticale, elle se confond avec h'; on en déduit, en construisant la trace verticale t' de cette ligne, un point de la trace cherchée; d'ailleurs la rencontre β_1 des droites P_1, xy en donne un autre, par conséquent la droite de jonction des points β_1, t' fournit la trace P'_1 qu'il s'agissait de construire.

119. Problème IV. — *Amener une droite à être parallèle au plan vertical* (*fig.* 127, pl. VII). — Soient d, d' les projections de la droite donnée; adoptons un axe de rotation vertical z, z', et, pour résoudre la question, construisons la plus courte distance za, $a'o'$ de la droite et de l'axe; pendant le mouvement la projection horizontale de la droite donnée se maintient tangente au cercle de centre z et de rayon za; on aura donc la position finale de cette projection horizontale en menant à ce cercle une tangente d_1 parallèle à xy. Après le mouvement a, a' vient en a_1, a'_1, et la trace horizontale θ, θ' de la droite d, d' arrive en θ_1, θ'_1 (§ **117**); on en déduit que la droite de jonction des points θ'_1, a'_1 n'est autre que la projection verticale d'_1 qu'il s'agissait de construire.

120. Problème V. — *Rendre une droite perpendiculaire au plan horizontal* (*fig.* 128, pl. VII). — Tout d'abord, par le procédé du précédent paragraphe, on rend la droite parallèle au plan vertical; soient d_1, d'_1 les projections de la droite donnée, après ce premier mouvement; faisons-la maintenant tourner autour d'un axe z_1, z'_1 perpendiculaire au plan vertical, afin de rendre sa projection verticale perpendiculaire à la ligne de terre; pendant la rotation, cette projection verticale reste constamment tangente à l'arc de cercle de centre z'_1 dont le rayon est égal à la longueur de la perpendiculaire $z'_1p'_1$ abaissée de z'_1 sur d'_1 : elle vient donc s'arrêter sur la droite d'_2, obtenue en menant à cet arc l'une de ses tangentes verticales, et, comme l'éloignement des divers points de la droite ne varie pas, sa nouvelle projection horizontale, qui se réduit à un point, se trouve à la rencontre d_2 de la droite d'_2 prolongée et de d_1.

121. Problème VI. — *Rendre un plan perpendiculaire au plan vertical* (*fig.* 129, pl. VII). — Soient $\alpha P'$ le plan donné, en adoptant un axe z, z' perpendiculaire au plan horizontal, faisons-le tourner de manière à amener sa trace en P_1 sur l'une des perpendiculaires à xy tangentes au cercle décrit par le pied p de la perpendiculaire abaissée du point z sur αP; P_1 sera la nouvelle trace horizontale du plan cherché, lequel sera à son tour déterminé dès que nous connaîtrons les projections de l'un de ses points extérieurs à sa trace horizontale; à cet effet, prenons la rencontre de l'axe zz' et du plan donné à l'aide de l'horizontale de ce plan qui rencontre l'axe, la projection horizontale de cette ligne est la parallèle h à P menée par z, sa trace verticale v' se trouve tout à la fois sur la perpendiculaire à xy passant par la rencontre v de cette ligne et de h, et sur la trace P' du plan; par suite, la projection verticale de l'horizontale est donnée par la parallèle à xy menée par v', au point de croisement o' de cette ligne et de z', on a enfin la projection verticale du point cherché, sa projection horizontale est en z.

Le plan est maintenant déterminé par la droite P_1 et par l'un de ses points o, o'; la rencontre α_1 de P_1 avec xy est un point de sa trace verticale; d'ailleurs le plan étant perpendiculaire au plan vertical, les projections de ses divers points sur ce plan coordonné appartiennent toutes à la trace cherchée; par conséquent la droite de jonction des points α_1, o' donne la trace verticale P'_1 du plan après son déplacement.

122. Problème VII. — *Faire en sorte qu'un plan devienne parallèle au plan horizontal* (*fig.* 130, pl. VII). — Par un premier mouvement de rotation, en appliquant le procédé du paragraphe précédent, on déplace le plan donné de manière à l'amener à être perpendiculaire au plan vertical; soient $P_1\alpha_1P'_1$ le plan ainsi déplacé; imprimons-lui un second mouvement de rotation autour d'un axe z_1, z'_1 perpendiculaire au plan vertical, sa trace verticale se meut en restant tangente au cercle de centre z' et de rayon égal à la distance du centre à la droite P_1; si nous l'arrêtons sur l'une des deux tangentes à cet arc parallèle à la ligne de terre, en P'_2 par exemple, nous aurons la trace verticale du plan

rendu parallèle au plan horizontal; dans cette position, sa trace horizontale est donnée par la droite à l'infini du plan considéré.

123. Application. — *Déterminer la plus courte distance d'une droite quelconque d, d' et de la ligne de terre* (*fig.* 131, pl. VII). — Rendons, afin d'appliquer le tracé précédemment expliqué (§ **117**), la ligne de terre perpendiculaire au plan vertical, en la faisant tourner autour d'un axe z, z' perpendiculaire au plan horizontal conduit par la trace verticale t' de la droite d, d'; cet axe offre la particularité de s'appuyer à la fois sur chacune des droites données; par suite, dans la rotation ces points communs t', z' et z seront fixes, conséquemment on trouvera après le mouvement : pour la ligne de terre, la perpendiculaire zy_1 à xy menée par z; pour la droite d, d' une projection horizontale d_1 perpendiculaire à d, attendu que cette droite doit, comme la ligne de terre, tourner de 90 degrés. En ce qui concerne la projection verticale de la droite qui nous occupe, nous observerons que sa trace horizontale θ, θ' fait un quart de révolution et vient se projeter en θ_1, θ_1', et comme d'autre part t' se maintient fixe, la projection verticale cherchée n'est autre que la droite de jonction des points θ'_1, t'.

Cela fait, par l'application du tracé du paragraphe précité, on obtient, en conduisant par z la perpendiculaire za'_1 à la droite d'_1 : et la projection verticale de la plus courte distance et sa vraie grandeur. La projection horizontale de cette ligne se trouve aisément en menant la ligne de rappel du point a'_1, déterminant le point a_1, et en conduisant par ce dernier point la parallèle a_1b_1 à xy.

Si l'on veut non-seulement la vraie grandeur de la plus courte distance mais encore ses projections, il faut ramener la figure sur sa position initiale en entraînant la droite a_1b_1, $a'_1b'_1$: le point b_1, b'_1 décrira un quart de cercle et viendra en b, b' ; de même a_1, a'_1, après avoir également décrit un quart de cercle, se placera en a, a'.

Si l'épure est exactement faite, attendu que la plus courte distance est perpendiculaire à la ligne de terre, on devra trouver pour la commune perpendiculaire ab, $a'b'$ une droite de profil.

MÉTHODE DES RABATTEMENTS

124. Comme nous l'avons dit plus haut, la méthode des rabattements a pour but : 1° de donner les tracés nécessaires à la détermination des figures planes en vraie grandeur ; et 2° de fournir inversement, lorsque l'épure peut se réduire à projeter une figure dont le tracé est indiqué en géométrie plane, le moyen de l'exécuter, quelle que soit la position du plan de la figure considérée.

Cette méthode se reduit à appliquer un petit nombre de constructions que nous allons indiquer.

125. Problème. — *Trouver le rabattement d'un point autour d'un axe horizontal, et réciproquement, le rabattement d'un point étant donné, déterminer ses projections.*

Solution générale. — Soient M et H le point et l'axe donnés (*fig.* 132, pl. VII), conduisons par H un plan horizontal P, et, afin de rabattre le point M sur ce plan, menons la perpendiculaire Mm à P; du pied m de cette ligne abaissons une perpendiculaire $m\mu$ à la charnière H, la droite de jonction du point M au pied μ de la dernière perpendiculaire sera, d'après le théorème des trois perpendiculaires, également perpendiculaire à la charnière H; par suite, après le rabattement, la droite Mμ se placera en M$_1\mu$, sur le prolongement de $m\mu$, à une distance du point μ égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont, l'un $m\mu$, l'autre la différence Mm des cotes du point donné et de l'axe qui sert de charnière dans le rabattement de la figure.

Remarque. — Lorsque la charnière n'est pas placée dans l'un des plans coordonnés, on construit la projection du rabattement et non le rabattement lui-même; mais, pour éviter les circonlocutions, on considère cette projection comme étant le rabattement; elle peut en effet le remplacer, car elle lui est égale et offre son orientation, c'est le rabattement déplacé parallèlement à lui-même suivant une direction perpendiculaire à son plan.

126. Affinité. — On dit qu'il y a affinité entre deux figures A, B, C,..., a, b, c,..., quand pour une même abscisse les ordonnées des points de ces figures sont dans un rapport constant (*fig.* 133, pl. VII); d'après cette définition, en adoptant des axes quelconques xoy on doit avoir:

$$\frac{A\alpha}{a\alpha}=\frac{B\beta}{b\beta}=\frac{C\gamma}{c\gamma}=\ldots=k,$$

la constante k est le rapport d'affinité, et le point à l'infini des ordonnées s'appelle le centre d'affinité.

127. Théorème. — *Il y a affinité entre la projection orthogonale d'une figure plane et son rabattement sur le plan de projection.*

En reprenant la figure 132 et en supposant que M est un point quelconque de la figure considérée nous aurons

$$\frac{m\mu}{M\mu}=\frac{m\mu}{M_1\mu}=\cos\alpha.$$

Or, l'angle α mesurant l'inclinaison du plan de la figure et de son plan de projection est constant; on en déduit que, pour une même abscisse, comptée sur la charnière, les ordonnées $m\mu$, $M_1\mu$ d'un point de la projection et de son rabattement, comptées sur une perpendiculaire à la charnière, sont dans un rapport constant, il y a donc affinité, et le rapport d'affinité est égal au cosinus de l'angle du plan de la figure de l'espace et du plan de projection.

En ce qui concerne le centre d'affinité, on voit que ce point est à l'infini sur une perpendiculaire à la charnière.

ÉPURES DU RABATTEMENT D'UN POINT

128. Premier tracé. — Soient (m, m') les projections du point que l'on veut rabattre autour de l'axe h, h' (*fig.* 134, pl. VII).

Cherchons d'abord la distance du point M à la charnière; elle est donnée (§ **125**, sol. génér.) par l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit la différence de cote $n'm'$ entre le point M et la charnière H, et la distance $m\mu$ du point m à h. Dans le but d'obtenir la grandeur de cette hypoténuse construisons un rabattement auxiliaire, en faisant tourner le triangle rectangle $Mm\mu$ de l'espace autour de la droite $m\mu$ prise pour charnière: menant du point m la perpendiculaire à $m\mu$ et prenant $mM''_1=m'n'$, la droite de jonction des points $M''_1\mu$ sera la projection en vraie grandeur du rabattement de l'hypoténuse.

Actuellement exécutons le rabattement principal, en faisant tourner M autour de H, la projection horizontale du rabattement de ce point se placera sur le prolongement de la droite $m\mu$ (§ **126**, sol. génér.) à une distance du point μ égale à $\mu M''_1$, que l'on reportera en μM_1, par un arc de cercle : M_1 est le point cherché.

Remarques. — Pour un problème d'application, on a en général à rabattre plusieurs points simultanément, on peut alors simplifier les tracés à l'aide des remarques suivantes :

1° La droite $\mu M''_1$ fait avec $m\mu$ un angle égal au rectiligne de celui que fait le plan à rabattre avec

le plan horizontal, rectiligne qui conserve sa grandeur aux divers points de la charnière ; d'où l'on conclut que les droites analogues à $\mu M''_1$ sont parallèles entre elles ;

2° Dans le triangle isocèle $M_1\mu M''_1$, l'angle de même nom conservant également sa grandeur pour les divers points à rabattre, tous les angles du triangle la conserveront encore ; il en résulte que les droites telles que $M_1M''_1$ unissant le rabattement auxiliaire d'un quelconque des points à son rabattement principal sont aussi parallèles entre elles.

129. Problème inverse du rabattement (*fig.* 134, pl. VII).—Supposons que l'on ait, par le procédé du précédent paragraphe, préalablement construit le rabattement M_1 d'un point M du plan de la figure ; et soit O_1 le rabattement du point dont on veut les projections après que le plan rabattu aura repris sa position naturelle ; pour y parvenir, traçons la perpendiculaire $O_1\omega$ à la charnière, puis conduisons par les points $O_1\omega$ des droites respectivement parallèles à $M_1M''_1$, $\mu M_1''$, et, par la rencontre O''_1 de ces lignes, menons une parallèle à M''_1m, qui, en son croisement avec la droite $O_1\omega$ prolongée, donne la projection horizontale o du point relevé, point dont la cote, comptée à partir et au-dessus du plan horizontal sur lequel on rabat, est égale à oO''_1 ; par conséquent, en reportant cette cote sur une ligne de rappel menée par o, à partir et au-dessus de h', on trouve la projection verticale o' cherchée.

Autre Solution. — Reportons les données du problème sur la figure 135, et, tout d'abord, relevons la droite de jonction des points M_1O_1 ; elle ira percer la charnière au point qui se projette horizontalement en a et dont la projection verticale a' se trouve à la rencontre de la ligne de rappel du point a et de h' ; il est alors évident que la droite relevée se projettera en ma, $m'a'$.

La perpendiculaire à la charnière du point O_1 croise ma au point o, la ligne de rappel passant par ce dernier point croise à son tour $m'a'$ en o' : ces points o, o' ne sont autres que les projections cherchées.

130. Deuxième tracé. — *Problème direct* (*fig.* 136, pl. VIII). — Soit à rabattre le point m,m' autour de l'horizontale h, h' prise comme charnière.

Conduisons par m, m' une ligne de front ma, $m'a'$ du plan que l'on veut rabattre ; puis, observant que cette ligne de front conserve sa longueur, et en projection verticale et en rabattement, nous en conclurons que le point cherché sera sur un arc de cercle décrit du point a comme centre avec $a'm'$ pour rayon ; et comme, d'autre part, il doit se trouver également sur la perpendiculaire $m\mu$ à la charnière menée par m, on le trouvera à la rencontre M_1 de ces lignes.

Problème inverse. — Soit à relever le point O_1 ; pour y parvenir, nous reproduirons le tracé direct en modifiant l'ordre des constructions. En vue de ce but, conduisons par le point donné O_1 des parallèles à M_1a, M_1m ; la première de ces lignes croise la charnière en ω, point dont la projection verticale se fait en ω', sur la ligne de rappel correspondante et sur h' ; de ce point ω,ω' conduisons une ligne de front du plan de la figure relevée, la projection horizontale de cette ligne détermine, en son point de croisement o avec la perpendiculaire à la charnière que nous venons de construire, la projection horizontale cherchée, et, d'autre part, la projection verticale de cette ligne rencontre la ligne de rappel du point o en o', qui est la seconde projection du point O_1 relevé.

131. Rabattement sur le plan horizontal. — Fréquemment on doit rabattre une figure plane sur l'un des plans coordonnés, sur le plan horizontal par exemple ; c'est là un cas particulier de la question développée plus haut, dont les tracés, identiques aux précédents, sont indiqués sur les figures 134 *bis*, 135 *bis* et 136 *bis*.

132. Rabattement d'une droite. — Pour rabattre comme pour relever une droite on rabat ou on relève, par l'un des procédés déjà expliqués, deux de ses points : lorsque le point de croisement de la droite avec la charnière ne sort pas de la feuille, ou se trouve rejeté à l'infini, ce point se maintenant fixe, il suffit alors de faire le tracé pour un second point de la droite donnée.

133. Groupement des constructions. — Le plus souvent on doit, pour appliquer la méthode des rabattements, effectuer les constructions qui viennent d'être expliquées sur un grand nombre de points; il importe alors, par un groupement convenable des lignes et des points, non-seulement de simplifier le tracé, mais encore, et surtout, d'en rendre la lecture facile.

Ce groupement variera avec l'épure, et le lecteur devra dans chaque cas chercher la disposition convenable. On trouvera, dans la suite de ce traité, plusieurs applications de cette importante question ; pour l'instant, bornons-nous à indiquer la construction du rabattementde plusieurs points situés dans un même plan, sans nous préoccuper des tracés devant précéder ou suivre ce rabattement.

Soit $P\alpha P'$ (*fig.* 137, pl. VIII) le plan que l'on veut rabattre autour de αP en entraînant les points A, B, C, D; ces points étant situés dans le plan $P\alpha P'$ seront déterminés par l'une de leurs projections; nous donnerons, par exemple, leurs projections horizontales a, b, c, d.

Tout d'abord, avant d'exécuter le rabattement, changeons le plan vertical afin de rendre le plan donné perpendiculaire au nouveau plan de projection : la nouvelle ligne de terre sera la droite x_1y_1 perpendiculaire à αP, et, en se servant du point commun aux deux traces verticales du plan donné, on trouvera la nouvelle trace verticale $\alpha_1P'_1$ de ce plan (§ **111**).

Par ce changement on construit d'abord, en prenant les points de rencontre des lignes de rappel menées par a, b, c, d,..., et de la nouvelle trace α_1P_1', les projections verticales a', b', c', d' des points, et, en outre, leurs distances $\alpha_1a'_1$, $\alpha_1b'_1$, $\alpha_1c'_1$, $\alpha_1d'_1$,..., à la charnière. Tout est maintenant préparé pour exécuter, avec simplicité, et par un tracé d'une lecture facile, le rabattement des divers points. Effectivement, pendant le mouvement de la figure, les projections verticales a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 décrivent des arcs de cercle concentriques dont le centre commun est en α_1, et qui, partant de ces projections verticales, viennent aboutir sur x_1y_1 en a''_1, b''_1, c''_1, d''_1.

Les perpendiculaires à x_1y_1 menées de ces derniers points sont les rabattements des projetantes verticales des points donnés, et ces droites coupent respectivement les perpendiculaires à la charnière menées par a, b, c, d, en A_1, B_1, C_1, D_1, qui sont enfin les points cherchés.

134. Rabattement par changement d'échelle. — Dans le cas d'une figure nécessitant le rabattement ou le relèvement d'un très-grand nombre de points, on peut passer de l'une de ses projections à son rabattement sur le plan de projection considéré, ou, réciproquement, du rabattement à la projection en conservant les abscisses des points comptées sur la charnière, et, pour les ordonnées perpendiculaires à cette ligne, en employant soit le compas de réduction, soit un changement d'échelle. En effet, comme il y a affinité entre la projection d'une figure sur un plan et son rabattement sur ce même plan, pour résoudre, soit le problème direct, soit le problème inverse qui nous occupent, il ne s'agit que de construire les longueurs des ordonnées des points de la figure inconnue en multipliant celles de la figure donnée par le rapport d'affinité.

Construction de l'échelle des ordonnées (*fig.* 138, pl. VIII). — Soient $P\alpha P'$ les traces du plan à rabattre sur le plan horizontal ; adoptons un nouveau plan vertical perpendiculaire au plan donné, la ligne de terre nouvelle x_1y_1 est perpendiculaire à la trace αP, et la nouvelle trace verticale $\alpha_1P'_1$ se construit par la méthode précitée (§ **133**).

Portant ensuite sur x_1y_1 l'unité de longueur u en $\alpha_1 b$, la perpendiculaire à x_1y_1 menée par b donnera sur $\alpha_1 P'_1$ le point d, et la longueur $\alpha_1 d$ sera l'unité de longueur u' des nouvelles ordonnées, l'échelle correspondante à cette unité se construira alors par le procédé habituel.

L'échelle étant construite, nous avons, sur la même figure, rabattu en C_1 la courbe C du plan $P\alpha P'$ dont la projection horizontale est en c.

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DES RABATTEMENTS

135. Problème. — *Mener, par un point m, m', une droite inclinée d'un angle connu α sur une droite donnée d, d' (fig. 139, pl. VIII).* — Il faut rabattre le plan conduit par la droite d, d' et par le point m, m'; construire ensuite sur ce rabattement la droite inconnue et enfin relever cette droite.

Pour exécuter le rabattement conduisons par m, m' une horizontale mn, $m'n'$ du plan passant par (m, m'), (d, d'), et rabattons la figure autour de cette horizontale prise comme charnière : le point de rencontre n, n' de l'axe et de d, d' reste fixe, et un point a, a', pris arbitrairement sur la droite donnée, vient, en appliquant le tracé connu du lecteur (§ **128**), en A_1; la droite de jonction des points n, A_1 fournit le rabattement D_1 de la droite donnée.

D'ailleurs le point m, m' qui se trouve sur la charnière est resté fixe; conséquemment, en conduisant par ce point une droite mB_1 faisant avec D_1 l'angle α donné, on trouve le rabattement d'une droite répondant à la question; relevant alors B_1 en b, b', la droite de jonction de ce point à m, m' répond à la question.

Le problème offre une seconde solution non figurée sur notre épure.

136. Problème. — *Construire les projections d'une circonférence placée dans un plan donné, connaissant la projection horizontale du centre et le rayon en véritable grandeur.* — On sait que la projection d'un cercle est une ellipse; établissons, avant de construire l'épure, quelques propriétés de cette courbe.

Théorème. — *Lorsqu'une ellipse résulte de la projection orthogonale d'un cercle, ses axes sont les projections d'un système de diamètres rectangulaires, dont l'un est parallèle au plan de projection.* — Effectivement, le rapport de deux segments d'une même droite est projectif, c'est-à-dire que le rapport des deux segments est égal à celui de leurs projections : on en conclut que deux diamètres rectangulaires du cercle se projettent suivant deux diamètres de l'ellipse, tels que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, où, en d'autres termes, que les projections de deux diamètres rectangulaires du cercle sont des diamètres conjugués de l'ellipse; or, lorsque l'un des diamètres est parallèle au plan de projection, l'angle de ces lignes se conserve en projection (§ **42**) donc, dans ce cas, les diamètres conjugués sont rectangulaires et fournissent les axes de l'ellipse.

En somme, on voit que les axes de l'ellipse sont les projections de deux diamètres du cercle, l'un parallèle au plan de projection, l'autre dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan du cercle par rapport au plan coordonné considéré.

137. Cercle osculateur. — On appelle cercle osculateur en un point d'une courbe la limite d'un cercle tangent à la courbe en ce point, et passant par un autre point qui, mobile sur la courbe, tend vers le premier.

A l'aide du calcul, on démontre que le centre de ce cercle est la limite de l'intersection de la normale à la courbe au point considéré et d'une normale mobile qui tend vers la première.

138. *Rayons des cercles osculateurs aux sommets d'une ellipse* (*fig.* 140, pl. VIII). — Soit une ellipse rapportée à ses axes xoy, prenons la sous-normale PN au point M arbitrairement choisi sur la courbe; lorsqu'on fait tendre le point M vers le sommet A, AP a pour limite zéro; par suite, le rayon du cercle osculateur au sommet A est la limite de la sous-normale PN; or en général on a

$$PN = -yy';$$

prenant la dérivée y' de l'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

on aura

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

d'où

$$PN = \frac{b^2x}{a^2}.$$

Faisons maintenant tendre M vers le sommet A, l'abscisse x du point M tendra vers a, et, en désignant par ρ_1 le rayon du cercle osculateur au sommet A, on aura

$$\rho_1 = \frac{b^2}{a}.$$

En désignant par ρ_2 le rayon du cercle osculateur au sommet B du petit axe, et en changeant dans la formule précédente a en b, b en a, ρ_1 en ρ_2, on trouve

$$\rho_2 = \frac{a^2}{b}.$$

Proposons-nous maintenant de construire les centres de ces cercles; reprenons l'ellipse donnée et, dans ce but, traçons (*fig.* 141, pl. VIII) les tangentes aux sommets A, B; tirons la droite AB, puis, par le point de rencontre D de ces tangentes, menons une perpendiculaire à la droite AB et prenons ses points de croisement C_1, C_2 avec les axes, qui sont les centres cherchés; effectivement, par la similitude des triangles C_1DA, OBA, dont les côtés sont respectivement perpendiculaires, on a

$$\frac{C_1A}{DA} = \frac{OB}{OA}, \quad \text{d'où} \quad C_1A = \frac{b^2}{a};$$

donc C_1 est le centre du cercle osculateur en A; on verra de même que C_2 est le centre du cercle osculateur en B.

139. *Tracé pratique d'une ellipse dont les axes sont donnés* (*fig.* 141, pl. VIII). — Lorsque les axes ne sont pas très-différents, on obtient la courbe avec une exactitude suffisante en décrivant, après avoir construit les centres C_1, C_2 et leurs symétriques C'_1, C'_2, de ces points comme centres des arcs mn, pq, rs, tu, des cercles osculateurs aux sommets de l'ellipse, et en les raccordant par de nouveaux arcs np, qr, st, um, tracés à la main.

140. *Construction des projections d'un cercle.* — Revenons au problème principal; soient o (*fig.* 142, pl. VIII) la projection horizontale du centre et O_1 son rabattement autour de la trace horizontale P du plan donné construit par l'un des procédés maintes fois employés.

Achevons la construction du rabattement en décrivant, de O_1 comme centre avec le rayon donné, une circonférence de cercle; puis traçons parallèlement à P, le rabattement A_1B_1 du diamètre horizontal et celui du diamètre dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan du cercle, qui prend la position C_1D_1 perpendiculaire à A_1B_1.

Pour déterminer par ses sommets l'ellipse projection horizontale du cercle, il ne s'agit plus que de construire (§ **136**) les projections des points A_1, B_1, C_1, D_1 après que l'on a remis le cercle dans sa position primitive; A_1B_1 se relève en ab sur la parallèle à P menée par o, qui se limite à la rencontre de cette ligne et des perpendiculaires abaissées des points rabattus A_1, B_1 sur la charnière P; C_1 vient en c au point de croisement de la perpendiculaire $C'_1\,o$ à la charnière avec la droite de jonction des points A_1C_1 relevés, laquelle va du point fixe α au point a.

Actuellement, on obtient par symétrie le quatrième sommet d de l'ellipse, qui se tracera soit par le procédé pratique en construisant les centres ω_1, ω_2 des cercles osculateurs et en appliquant la méthode du paragraphe **139**, soit par l'une des méthodes données en géométrie analytique.

141. — *Construction des projections des divers points d'une circonférence.* — Proposons-nous de déterminer la projection du cercle en construisant celles de ses points relevés; dans ce but, reportons sur la figure 143 (pl. VII) les données de l'épure précédentes, et sur la circonférence rabattue considérons un point M_1 arbitrairement placé; pour le relever, joignons-le au centre d'affinité en conduisant par M_1 une perpendiculaire à la charnière qui sera un premier lieu du point cherché; on en trouvera un second en relevant la droite de jonction des points M_1, O_1, qui va couper la charnière en un point fixe μ, et se relève suivant $o\mu$; par la rencontre de ses deux lieux on a le point cherché m.

142. — *Construction de la tangente en un point de la projection.*

Théorème. — *La projection de la tangente en un point d'une courbe n'est autre que la tangente à la projection de la courbe menée par celle du point considéré* (*fig.* a_3). — Soient S, P le centre et le plan de projection, C, c la courbe et sa projection; M, m le point donné et sa projection, M_1, m_1, un point voisin du premier et sa projection. La droite de jonction des points M, M_1 a pour projection celle qui unit les projections m, m_1, et, si l'on fait mouvoir le point M_1 sur C en le rapprochant de plus en plus de M, m_1 se mouvra à son tour sur c en se rapprochant de m, et comme la sécante mm_1 est constamment la projection de la sécante MM_1, elle la sera encore à la limite lorsque les points M_1, m_1 se confondront simultanément, l'un avec M, l'autre avec m, ou, en d'autres termes, la projection de la tangente à C au point M est tangente à la projection c en m.

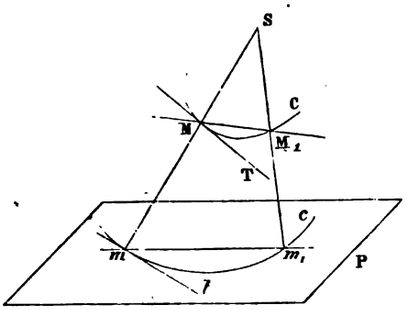


Fig. a_3.

Revenons à l'épure (*fig.* 143) et cherchons à construire la tangente à la projection du cercle en m; dès lors que cette ligne n'est autre que la projection de la tangente à la circonférence, la solution du problème consistera à rabattre la circonférence et le point de contact, comme nous l'avons déjà fait, puis à construire, par le rabattement M_1 du point, la tangente à la circonférence rabattue,

laquelle ira percer la charnière en un point θ commun au rabattement et à la projection de la tangente, et à tracer enfin la droite de jonction des points m, θ, qui fournira la tangente cherchée.

143. *Projections du point le plus haut et du point le plus bas, point le plus haut et point le plus bas de la projection.* — Les points le plus haut et le plus bas d'une courbe sont ceux en lesquels la tangente est horizontale. Dans notre épure ces points se trouvent, par leur définition même, aux sommets du petit axe, dont la construction a été indiquée sur la figure 142.

En ce qui concerne la construction des points le plus haut ou le plus bas de la projection, observons que la direction des tangentes en ces points s'obtient très-simplement; en effet, conduisons pour cela par le centre o une horizontale $o\omega$ dont le rabattement est $O_1\omega$, les parallèles à $O_1\omega$ sur le rabattement fourniront sur la figure relevée des parallèles à $o\omega$; on obtiendra alors aisément les points cherchés et leurs tangentes en conduisant des tangentes $C_1\gamma_1$, $C_2\gamma_2$ à la circonférence dans la direction $o_1\omega$, puis en relevant ces lignes suivant des horizontales menées par γ_1, γ_2, ainsi que leurs points de contact qui se placent aux points de croisement c_1, c_2 des tangentes relevées et des perpendiculaires à la charnière menées par C_1, C_2 : c_1, c_2 sont les points qu'il s'agissait de construire.

144. *Points limites dans le sens latéral.* — On entend par points limites d'une courbe dans une direction donnée, ceux dont les tangentes sont perpendiculaires à cette direction. Les points cherchés, que l'on construit comme les précédents, sont, par définition, ceux dont les tangentes sont verticales. La verticale $o\alpha$ est rabattue en αO_1 et, par les tangentes $B_2\beta_2$, $B_1\beta_1$ au cercle rabattu menées dans la direction $O_1\alpha$, on trouve, après avoir relevé ces deux lignes, ainsi que les points de contact B_2, B_1, les tangentes verticales $\beta_1 b_1$, $\beta_2 b_2$, et leurs points de contact b_1, b_2, qui sont les points limites cherchés.

145. *Tangentes par un point extérieur.* — Pour obtenir directement ces tangentes, sans recourir à la courbe, on rabat le point extérieur, afin de mener du point rabattu les tangentes au cercle qui, après avoir été relevées, donneront les lignes cherchées.

146. *Tangentes parallèles à une ligne donnée.* — C'est là un cas particulier du problème précédent; effectivement, le point extérieur est ici à l'infini dans la direction donnée; le tracé se fera donc aisément en conduisant des tangentes au cercle rabattu parallèlement au rabattement de la direction donnée, et en relevant ces tangentes.

D'ailleurs nous avons déjà appliqué ce procédé aux tangentes limites dans le sens vertical et dans le sens latéral (§§ **143** et **144**).

147. *Points de rencontre de la courbe et d'une droite donnée.* — On rabat, pour construire ces points, la circonférence et la droite donnée, puis on relève les points de croisement de ces rabattements.

Remarque. — Les trois derniers problèmes que nous venons d'expliquer (§§ **145**, **146** et **147**) offriront dans la suite de ce traité un grand intérêt pour la résolution de certaines questions dans lesquelles nous aurons à construire, sans qu'il soit utile de tracer les projections d'une circonférence, des tangentes aux projections de cette ligne, ou leurs points de croisement avec une droite donnée.

148. Méthodes combinées. — Lorsqu'on doit effectuer le changement des deux plans coordonnés en modifiant leurs directions, soit pour rendre perpendiculaire à l'un d'eux une droite, soit pour

rendre un plan parallèle à l'un d'eux ; ou lorsqu'on vient, en vue du même but, imprimer à une figure deux rotations successives autour de deux axes respectivement perpendiculaires aux plans coordonnés, l'application des méthodes offre de graves inconvénients ; effectivement, dès que le plan horizontal se trouve changé, ou, ce qui conduit aux mêmes résultats, dès que la figure a tourné autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical coordonné, la verticale perd, par rapport au spectateur ou bien par rapport à la figure, sa direction naturelle, ce qui rend la lecture de l'épure très-pénible. En outre, dans les applications, pour représenter une machine, une voûte, un terrain, il convient d'opérer sur des corps en place. Ces inconvénients n'existent pas lorsqu'on se borne à changer le plan vertical ; car, dans ce cas, la direction de la verticale se conserve, et, en ce qui concerne la place naturelle de la figure, la projection horizontale fournit une indication suffisante : on peut donc dans tous les cas changer sans inconvénient le plan vertical de projection.

Pour les épures théoriques, la lecture ne peut être rendue difficile qu'autant que la direction du fil à plomb est modifiée, c'est-à-dire qu'après un changement du plan horizontal coordonné ; quant à la direction naturelle de la verticale par rapport à la figure représentée, on peut ne point s'en occuper, elle n'offre, en effet, que fort peu d'intérêt.

On pourra donc, pour les épures théoriques, résoudre les problèmes d'amener une droite ou un plan dans une position perpendiculaire ou parallèle à l'un des plans coordonnés, en changeant d'abord le plan vertical, puis, en exécutant une rotation de la figure autour d'un axe perpendiculaire au nouveau plan vertical de projection; on est ainsi conduit à employer une combinaison des deux premières méthodes.

Dans d'autres circonstances il pourrait y avoir lieu de prendre une autre combinaison des méthodes : ainsi, par exemple, on sait que pour faciliter la construction du rabattement d'un plan on peut préalablement exécuter un changement du plan vertical, afin d'amener le nouveau plan dans une position perpendiculaire à celui qui doit être rabattu, et combiner ainsi la méthode des rabattements à celle des changements de plans coordonnés.

149. Application. — *Rendre, par l'emploi des méthodes combinées, un plan parallèle au plan horizontal.* — Soit $P\alpha P'$ le plan donné (*fig.* 144, pl. IX); en premier lieu, pour nous conformer aux conclusions de l'article précédent, rendons-le perpendiculaire au plan vertical de projection, en choisissant à cet effet une ligne de terre x_1y_1 qui, tout en occupant une position que l'on devra dans chaque cas particulier fixer en vue d'obtenir une réduction des tracés, est dirigée suivant une perpendiculaire à la droite αP (§ **111**); dans ce système de plans coordonnés, le plan donné se trouve déterminé par ses traces $P\alpha_1P'_1$, que l'on a d'ailleurs obtenues sur l'épure, en adoptant la construction générale relative au changement de plan par rapport à un plan (§ **107**, 2me tracé).

En second lieu, afin de placer le plan dans la position indiquée par l'énoncé, exécutons, autour d'un axe z, z'_1 perpendiculaire un plan vertical, dont la position, bien que quelconque sur notre épure, sera convenablement réglée suivant les circonstances particulières du problème à résoudre, une rotation telle que la trace verticale du plan $P\alpha_1P'_1$ vienne sur une parallèle P'_2 à la ligne de terre x_1y_1. Le plan se trouve, dans la position actuelle, complètement déterminé par sa trace verticale P'_2, attendu que sa trace horizontale est ici la droite de l'infini des plans horizontaux (§ **3**).

150. Problème. — *Remplacer les deux plans de projection par deux plans quelconques perpendiculaires entre eux.* — Si l'on voulait, à l'aide des deux premières méthodes, donner une solution du problème qui

nous occupe, on serait conduit à exécuter trois déplacements de la figure ou de ses plans coordonnés. En effet, il faudrait : 1° rendre le premier plan perpendiculaire à l'un des plans de projection ; 2° l'amener ensuite dans une position parallèle à l'autre plan de projection ; 3° enfin adopter l'autre plan donné pour second plan coordonné.

Habituellement cette question, qui offre un grand intérêt par suite de ses applications à la charpente, se résout plus simplement en employant, soit un rabattement précédé d'une rotation, soit plutôt un changement de plan et un rabattement.

Déterminons, avant d'aborder les tracés relatifs à ce dernier mode de transformation des plans de projection, les nouveaux plans coordonnés en fixant : 1° la position, par rapport aux anciens, du plan $P\alpha P'$ que l'on doit employer comme plan horizontal (*fig.* 145, pl. IX), et 2° celle vh, $v'h'$ de la nouvelle ligne de terre ; alors, pour achever de déterminer les données du problème, traçons sur l'épure les projections m, m' d'un des points de la figure F que l'on doit rapporter aux nouveaux plans coordonnés.

Une fois les données du problème mises en place, rendons d'abord, en adoptant pour seconde ligne de terre la perpendiculaire x_1y_1 abaissée du point v sur la trace horizontale du plan $P\alpha P'$, le plan vertical perpendiculaire à ce dernier ; dans ce second système, le plan donné est déterminé par ses traces $P\beta P'_1$, qui s'obtiennent d'ailleurs facilement par la méthode que nous avons déjà expliquée (§ **107**, 2me tracé). Quant à la ligne de terre vh, $v'h'$, elle se trouve, dans le présent système de plans coordonnés, projetée verticalement sur la trace $\beta P'_1$ du plan perpendiculaire au plan vertical qui la contient, et conserve sa projection horizontale primitive vh ; enfin la projection verticale nouvelle m'_1 du point M de la figure F se construit sans difficulté en changeant de plan vertical par rapport au point m, m' (§ **103**).

Passons maintenant à la seconde partie du tracé qui nous occupe, c'est-à-dire au rabattement autour de βP du plan $P\beta P'_1$, que nous devons, pendant le mouvement, afin d'entraîner la figure F, lier invariablement à celle-ci ; dans ces conditions, h reste fixe, v'_1 vient au point de rencontre v'_2 de l'arc de cercle que décrit le point v'_1 sur le second plan vertical et de ligne de terre x_1y_1 ; conséquemment la ligne de terre vh, $\beta v'_1$ se trouve, après le rabattement, en x_2y_2. Quant au point m, m'_1 de la figure F, observons que la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan $P\beta P'_1$ est une ligne de front par rapport aux plans coordonnés conduits par x_1y_1, dont la projection verticale $m'_1\mu'_1$ s'obtient en abaissant du point m'_1 une perpendiculaire sur la trace verticale P'_1 du plan, dont la projection horizontale se confond avec la perpendiculaire $m\gamma$ à la charnière αP, menée par m, et qui donne en outre : 1° en son pied rabattu m_2 l'une des projections cherchées du point M ; 2° la cote finale $m'_1\mu'_1$ de ce point en véritable grandeur, laquelle permet de mettre en place la seconde projection m'_2 du point considéré en reportant, dans le sens convenable, sur la ligne de rappel perpendiculaire à x_2y_2, menée par le point m_2, la longueur $\mu'_1m'_1$ en $m'_2\mu'_2$.

En somme, nous venons de construire les projections m_2, m'_2 qui déterminent le point M, dans le système de plans coordonnés formé par le rabattement autour de αP du nouveau plan horizontal $P\alpha P'$ sur l'ancien, et du plan vertical conduit par la droite vh, $v'h'$, laquelle se trouve également rabattue sur le même plan horizontal en x_2y_2 ; et comme le tracé indiqué pour le point M peut se reproduire pour tous les points de la figure F, on doit considérer la question comme résolue en principe.

151. Application. — *Déterminer la plus courte distance de deux droites quelconques.* — Tout d'abord

observons que, dans le cas de droites parallèles au même plan de projection, au plan horizontal par exemple, les projections de la plus courte distance des droites données (d,d'), (d_1, d'_1), ainsi que sa vraie grandeur, s'obtiennent simplement (*fig.* 146, pl. IX) par la verticale ab, $a'b'$ du point de rencontre des projections horizontales d, d_1, et dont on limite la projection verticale aux deux droites d', d'_1.

En effet, il est manifeste que la droite ab, $a'b'$ rencontre les droites données orthogonalement; elle fournit donc les projections de leur plus courte distance. Quant à la vraie grandeur, elle est en évidence en $a'b'$ sur le plan vertical, attendu que la droite de l'espace AB est parallèle à ce plan coordonné.

De quelque manière que les droites soient données, on peut retomber dans le cas simple qui vient d'être préalablement résolu, en adoptant un plan de projection parallèle aux deux droites, et, dans ce plan, une ligne de terre quelconque, que l'on pourra même ne pas déterminer en se dispensant de la figurer sur l'épure.

Abordons maintenant la construction du cas général en prenant (*fig.* 147, pl. IX) les droites données (d, d'), (d_1, d'_1) dans une position quelconque, et en conduisant par la première, afin d'obtenir le nouveau plan de projection, un plan parallèle à l'autre; ce plan sera déterminé par la droite d, d' et par une parallèle à la seconde droite d_1, d'_1 menée par l'un des points de la première; nous avons choisi pour plus de simplicité, le point a, a' dont la projection verticale se trouve à la rencontre des doites d', d'_1 : dans ces conditions, le nouveau plan de projection est déterminé par la droite d, d' et par la parallèle δ_1, d'_1 à la droite d_1, d'_1, qui offre avec celle-ci une projection verticale commune.

Ayant ainsi déterminé le nouveau plan de projection, adoptons, conformément au tracé précédent, une seconde ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à sa trace horizontale $\theta\theta_1$ et changeons de plan vertical; dans ce nouveau système de plans coordonnés le point a, a' se projette en a, a'_1, alors la droite $\beta a'_1$ fournit la trace verticale du plan conduit par (d, d'), (δ_1, d'_1); on trouve en continuant le changement de plan, que la nouvelle trace verticale de la droite d_1, d'_1 se projette dans l'ancien système en m, m' et dans le nouveau en m, m'_1, et que la projection de ce point sur le plan $\theta_1\beta a'_1$ se fait au pied μ'_1 de la perpendiculaire abaissée de m'_1 sur la trace $\beta a'_1$.

Tout étant ainsi préparé en vue du rabattement du plan $\theta_1\beta a'_1$, effectuons-le autour de la charnière $\theta\theta_1$ et en entraînant celle d_1, d'_1 des droites données qui se trouve en dehors de ce plan. Tout d'abord nous trouvons le rabattement A_1 du point a, a' ; alors, comme les points θ, θ_1 restent fixes, les droites (d, d'), (δ_1, d'_1) viennent se rabattre en $A_1\theta$, $A_1\theta_1$; d'autre part, μ'_1 prend la position M_1 et donne la projection d'un point de la droite d_1, d'_1, après qu'elle a subi le mouvement que lui imprime le plan $\theta_1\beta\mu'_1$.

Quant à la projection horizontale de la droite ainsi déplacée, on l'obtient en conduisant par le point M_1 la parallèle D_1 à la droite $A_1\theta_1$. Actuellement la figure offre la disposition qui conduit au tracé réduit indiqué au début de la question; par conséquent, dans le système final de plans coordonnés, la plus courte distance présente une de ses projections B_1, C_1 au point de rencontre des projections nouvelles θA_1, D_1 des deux droites données, et la cote $m'_1\mu'_1$ de la droite d_1, d'_1, par rapport au dernier plan de projection, fournit la vraie grandeur de la plus courte distance. Cela fait, on revient au système primitif des plans coordonnés et on trouve sans difficulté les projections cherchées cb, $c'b'$ de la plus courte distance.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

152. Problème I. — *Rendre un plan perpendiculaire à la ligne de terre.*

1° Méthode des changements de plans coordonnés (*fig.* 148, pl. IX). — Prenez une première ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à la trace horizontale P du plan donné $P_\alpha P'$ et changez de plan vertical, puis changez de plan horizontal en adoptant une ligne de terre x_2y_2 perpendiculaire à la nouvelle trace P'_1 : vous trouverez ainsi le plan de profil $P_2P'_1$.

2° Méthode des rotations (à résoudre).

153. Problème II. — *Rendre parallèle à la ligne de terre un plan quelconque.*

1° Méthode des changements de plans coordonnés (*fig.* 149, pl. IX). — Prenez la ligne de terre x_1y_1 parallèle à l'une des traces du plan $P_\alpha P'$ donné, à la trace horizontale P, par exemple, et changez le plan de nom différent : vous trouverez le plan P_1P' parallèle à la nouvelle ligne de terre x_1y_1.

2° Méthode des rotations (à résoudre).

154. Problème III. — *Faire tourner une droite d, d' d'un angle donné α autour d'un axe horizontal z, z'* (*fig.* 150, pl. IX). — Changez de plan vertical en prenant la ligne de terre nouvelle x_1y_1 dans une direction perpendiculaire à la projection horizontale de l'axe ; exécutez ensuite, dans le nouveau système de plans coordonnés, la rotation des points $(c, c'_1)(m, m'_1)$; puis revenez aux plans primitifs : la droite $\gamma'\mu'$, $\gamma_1\mu_1$ sera la position de d, d' après sa rotation.

155. Problème IV. — *Faire tourner un plan d'un angle donné autour d'un axe de front* (à résoudre).

156. Problème V. — *Faire tourner une droite d'un angle donné autour d'un axe quelconque* (à resoudre).

157. Problème VI. — *Entre deux droites quelconques, placer une droite parallèle à un plan donné et offrant une longueur connue* (*fig.* 151, pl. IX). — Rabattez, en entraînant les droites, le plan donné autour de sa trace horizontale; soient, après ce mouvement, (d, d'), (d_1, d'_1) les droites données. Observez alors que la projection oblique d'une droite parallèle au plan de projection se fait en vraie grandeur, et projetez sur le plan horizontal les deux droites données dans la direction de l'une d'elles, de d_1, d'_1, par exemple; vous aurez : pour d_1, d'_1 la trace horizontale o de cette ligne ; pour d, d' la droite qui unit sa trace θ à la projection oblique α d'un quelconque a, a' des points de cette ligne. Cela fait, vous décrirez du point o comme centre avec la longueur donnée pour rayon un arc de cercle, et aux points β, β_1, résultant de la rencontre de cet arc et de la droite $\theta\alpha$, vous obtiendrez la projection oblique d'un point de chacune des droites qui répondent aux conditions de l'énoncé. Dès lors, relevez le point β en b, b', et, par ce point, conduisez une droite horizontale bc, $b'c'$ rencontrant les droites données ; ce sera, après que vous aurez relevé le plan donné en entraînant cette ligne, l'une des solutions du problème.

Vous construirez d'une manière toute semblable la seconde solution.

L'épure est soumise à cette vérification que la projection orthogonale bc de la droite BC doit être égale et parallèle à sa projection oblique $o\beta$.

158. Problème VII. — *Déterminer un point sur une droite, connaissant sa distance à une seconde droite donnée* (à résoudre).

159. Problème VIII. — *Rendre parallèles les projections verticales de deux droites données* (*fig.* 152, pl. IX).

Méthode des Changements de plans de projection. — On voit tout d'abord que dans le nouveau système de plans coordonnés les droites données (d, d'), (δ, δ') auront leurs plans projetants perpendiculaires au plan vertical et parallèles entre eux; ces plans seront par suite également parallèles aux deux droites données (d, d'), (δ, δ'). Afin de déterminer simplement l'un d'eux, conduisez par le point a, a' pris sur la droite d, d', et dont la projection verticale résulte de la rencontre des droites d', δ', une parallèle d_1, δ' à la seconde droite donnée δ, δ'; puis, prenez la trace horizontale θ'_1, θ_1 du plan déterminé par les droites (d, d'), (d_1, δ'); cette trace appartiendra à l'un des plans projetants perpendiculaires au plan vertical nouveau ; alors, en prenant une ligne de terre x_1y_1 qui lui soit perpendiculaire, vous aurez, après avoir exécuté le changement du plan vertical par rapport aux deux droites, les projections parallèles cherchées d'_1, δ'_1.

160. Problème IX. — *Rendre parallèles les traces verticales de deux plans* (*fig.* 153, pl. IX).

Méthode des changements de plans. — Pour que les traces verticales de deux plans soient parallèles, il faut et il suffit qu'ils se rencontrent suivant une ligne de front. Vous résoudrez donc la question, en construisant la projection horizontale vh de la droite suivant laquelle les plans donnés $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ se coupent, et en plaçant la nouvelle ligne de terre x_1y_1 dans une position quelconque parallèle à cette droite : les plans cherchés auront, après le changement du plan vertical, pour traces $P\alpha_1P'_1$ $Q\beta_1Q'_1$.

161. Problème X. — *Résoudre les deux questions précédentes par la méthode des mouvements de rotation* (à trouver).

162. Problème XI. — *Achever de construire la projection verticale d'un angle droit dont on donne la projection horizontale ainsi que la projection verticale de l'un des côtés* (*fig.* 154, pl. IX). — Soient (δ, δ'), d' les projections données. Construisez une projection auxiliaire sur le plan vertical projetant de la droite δ, δ', afin de mettre l'angle droit en évidence sur ce plan (§ **42**); la ligne de terre (x_1y_1) du nouveau plan vertical coïncidera avec la droite δ ; et, en exécutant ce changement, vous trouverez pour le côté δ, δ' la nouvelle projection δ'_1 et pour le sommet s, s' le point s'_1 ; d'où vous déduirez en élevant la perpendiculaire à δ'_1, qui passe au point s'_1, la projection d'_1, sur le plan vertical auxiliaire, du second côté de l'angle. Ce second côté sera donc déterminé, dans le nouveau système de plans coordonnés, par ses projections d'_1, d; qui donnent, en revenant à l'ancien système, les projections t, t' de la trace horizontale de cette ligne et par suite la projection verticale cherchée d'.

163. Problème XII. — *Amener, au moyen de trois rotations, deux plans rectangulaires à coïncider avec les plans de projection* (*fig.* 155, pl. IX). — On donne l'un des plans par ses traces $P\alpha P'$, l'autre est alors déterminé par l'intersection vh, $v'h'$ des deux plans.

1° Amenez, à l'aide d'une rotation autour de l'axe vertical z_1, z'_1, le plan donné $P\alpha P'$ dans une position $P_1\theta_1P'_1$ perpendiculaire au plan vertical en entraînant la droite vh, $v'h'$ qui, après ce mouvement, sera déterminée par ses traces v', h_1.

2° Appliquez-le sur le plan horizontal au moyen de l'axe z_2, z'_2, en entraînant toujours la droite vh, $v'h'$, dont la troisième position sera la droite $h_1v'_1$ du plan horizontal.

3° Enfin l'axe perpendiculaire au plan horizontal z'_3, z_3 permettra d'amener l'intersection vh, $v'h'$ sur xy et, par suite, le second plan donné sur le plan vertical.

164. Problème XIII. — *Amener, au moyen de trois changements de plans de projection, deux plans rectangulaires à coïncider avec les plans de projection* (à résoudre).

165. Problème XIV. — *Connaissant la projection horizontale de l'angle trièdre trirectangle et la côte de son sommet, trouver sa projection verticale* (*fig.* 156, pl. IX).—Soient *sa*, *sb*, *sc* les projections horizontales des arêtes. Mettez en place s' d'après la cote donnée; et, afin de construire les projections verticales d'un point de chaque arête, prenez les traces des faces sur un plan horizontal de cote inconnue; elles seront perpendiculaires aux projections de ces arêtes (§ **40**); il suffira donc pour les obtenir de placer à volonté un point α sur la projection horizontale $s\alpha$ de l'une des arêtes et de conduire par ce point deux droites respectivement perpendiculaires aux projections *sb*, *sc* des deux autres arêtes; puis, de joindre les points de rencontre γ, β de ces perpendiculaires et des arêtes placées sur les faces qui les contiennent, par la droite $\gamma\beta$, laquelle devra, comme vérification, se présenter suivant une direction perpendiculaire à la projection $s\alpha$ de la première arête.

Après avoir construit les traces $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\alpha\beta$ du plan horizontal auxiliaire sur les faces du trièdre, cherchez la cote de ce plan à l'aide d'une section faite dans le trièdre, limité au plan horizontal auxiliaire, par le plan vertical projetant l'arête SA; comme cette section donne un triangle rectangle de base αd dont le sommet se confond avec celui du trièdre, vous aurez le rabattement de ce sommet autour de la base αd, à la rencontre S_1 d'une demi-circonférence de cercle décrite sur αd comme diamètre, et de la perpendiculaire à cette droite élevée par le point s. Conséquemment la différence de niveau du sommet du trièdre et du plan horizontal sera sS_1, et, en reportant cette longueur en $s'\sigma'$, la parallèle à la ligne de terre menée par σ' vous donnera la trace verticale H′ du plan auxiliaire, en y relevant les points α, β, γ au moyen de lignes de rappel, vous trouverez les projections verticales α', β', γ' des traces fournies par les arêtes sur le plan H′; unissant enfin les derniers points obtenus au point s' par les droites $s'\alpha'$, $s'\beta'$, $s'\gamma'$, vous obtiendrez les lignes qui répondent aux conditions de l'énoncé. Il faut et il suffit, pour que le problème soit possible, que les angles $\alpha s\beta$, $\beta s\gamma$, $\gamma s\alpha$, formés par les projections horizontales des arêtes limitées, d'une part, au sommet, de l'autre au plan H′, soient compris entre 90° et 180°. Que l'on prenne, en effet, un angle droit situé d'abord dans un plan horizontal, puis qu'on le rende mobile autour d'un axe horizontal pris comme charnière et rencontrant ses côtés, les projections horizontales du sommet mobile seront toujours soit dans le triangle formé par la charnière avec les côtés de l'angle initial, soit dans son symétrique par rapport à la charnière, la projection de l'angle sera donc comprise entre 90° et 180°; par suite, la condition est nécessaire. Je dis qu'elle suffit; effectivement, si les angles $\alpha s\beta$, $\beta s\gamma$, $\gamma s\alpha$ sont obtenus, les perpendiculaires $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ rencontreront les côtés, $s\beta$, $s\gamma$, $s\alpha$ prolongés au delà du sommet, et le point s sera compris dans le triangle $\alpha\beta\gamma$; le cercle auxiliaire coupera la perpendiculaire à αd, menée par s et on pourra constituer le trièdre.

166. Problème XV. — *Transporter par rapport à un point, par rapport à une droite et par rapport à un plan, l'un des plans de projection parallèlement à lui-même* (à résoudre).

167. Problème XVI. — *Mener par un point donné une droite assujettie à couper une droite et un cercle, non situés dans un même plan* (*fig.* 157, pl. X). — Soient $P\alpha P'$ les traces du plan contenant le cercle; d, d' les projections de la droite; m, m' celles du point donné; o la projection horizontale du centre du cercle et R son rayon.

Solution générale. — 1° Conduisez par le point m, m' et par la droite d, d' un plan Q; 2° cherchez ensuite l'intersection I des plans $P\alpha P'$ et Q; 3° enfin prenez les points de rencontre de la droite I

et du cercle donné, puis joignez-les au point m, m', les deux droites ainsi obtenues vous donneront les solutions du problème.

Exécution des tracés. — Sans construire préalablement les traces du plan Q, employez, pour chercher son intersection avec le plan donné, la droite d, d', et le point m, m' qui le déterminent; à cet effet, prenez comme plan auxiliaire le plan de front conduit par le point m, m', lequel rencontre d'une part le plan $P\alpha P'$ suivant la droite tf, $t'f'$; et, d'autre part, le plan Q suivant mn, $m'n'$; par la rencontre a, a' de ces droites, vous aurez un point de l'intersection cherchée. Pour en obtenir un second, vous pourrez recourir aux traces horizontales des plans en profitant toutefois, pour construire celle du plan Q, de la droite mn, $m'n'$ donnée par le tracé relatif à la détermination du premier point de rencontre a, a'; il suffira en effet, pour l'obtenir, de joindre par une droite les traces horizontales h, h_1 des lignes (d, d'), $(mn, m'n')$; cette ligne hh_1 donnera enfin en son point de croisement avec la droite αP la trace horizontale θ de l'intersection des plans.

Ayant ainsi déterminé l'intersection I des plans, pour construire, conformément à la méthode connue (§ **147**), la rencontre de la droite I et du cercle, sans tracer les projections de cette courbe, rabattez le plan $P\alpha P'$, ainsi que la droite et le cercle qui nous occupent, autour de αP, en profitant de la ligne de front ta, $t'a'$.

Ce rabattement et le retour à la vraie position de la figure donnent lieu à des tracés maintes fois employés, que le lecteur suivra facilement sur l'épure.

168. Problème XVII. — *Connaissant la longueur des six arêtes d'un tétraèdre, le plan de l'une des faces et la position d'une arête de cette face; construire la projection du tétraèdre* (*fig.* 158, pl. X). — Soient $P\alpha P'$, $(ab, a'b')$ les traces du plan de la base et les projections, supposées construites à l'aide d'un tracé préalable, indiqué sur l'épure d'une des arêtes de cette base.

Rabattez, en entraînant le tétraèdre, le plan $P\alpha P'$ autour de sa trace horizontale, et, sur ce rabattement, à l'aide de tracés déjà décrits, mettez en place le côté de la base ab, $a'b'$, qui vient en A_1B_1, et la base elle-même $A_1B_1C_1$ que vous obtiendrez en employant la construction donnant un triangle dont on connaît la vraie grandeur des côtés.

Dès que le quatrième sommet aura subi son mouvement d'entraînement, rabattez-le, tour à tour, avec chacun des triangles formant les faces latérales, sur le plan horizontal en D_1, D_2, D_3. Ces rabattements se construisent par les rencontres des arcs de cercle qui ont pour centres les sommets A_1, B_1, C_1 de la base et pour rayons les longueurs des arêtes latérales qui aboutissent aux centres respectifs.

Ces constructions étant effectuées, si, laissant la base fixe, on voulait reconstruire le tétraèdre, il suffirait de faire tourner les points D_1, D_2, D_3 autour des arêtes respectives de cette base jusqu'à ce que ces trois points vinssent se réunir dans l'espace en un point unique D. Donc, pour trouver la projection du sommet sur le plan de la base vous prendrez la rencontre D_4 des perpendiculaires aux charnières respectives menées par les points D_1, D_2, D_3, et l'épure offrira cette vérification que ces trois perpendiculaires doivent se couper en un seul point.

Pour compléter la détermination du quatrième sommet D, il faut construire la hauteur du tétraèdre, c'est-à-dire la cote de ce sommet par rapport au plan de la base; à cet effet rabattez autour de sa trace δD_4 le triangle de l'espace $D\delta D_4$, dont vous connaissez un côté de l'angle droit δD_4, et l'hypoténuse qui se trouve une première fois rabattue suivant sa vraie grandeur en δD_1. Après la construction de ce rabattement $D_4\delta D_5$, vous connaîtrez la hauteur D_4D_5 de la pyramide, et vous pourrez, avec les

éléments dont la détermination vient d'être indiquée, relever le plan de la base sur $P\alpha P'$ en entraînant le sommet D.

Autre solution (*fig.* 159, pl. X). — Soit, après que l'on a rabattu le plan de la base du tétraèdre autour de sa trace horizontale, $A_1B_1C_1$ le triangle qui constitue cette base. Concevez, pour déterminer le sommet opposé à la base, trois sphères ayant leurs centres aux sommets A_1, B_1, C_1 de cette base et dont les rayons seraient respectivement égaux aux longueurs données des arêtes latérales ; l'un des points de rencontre de ces sphères donnera évidemment, après le rabattement de la base, le sommet inconnu du tétraèdre.

Pour déterminer ces trois sphères, figurez leurs traces horizontales qui ne sont autres que les cercles dont les centres se confondent avec ceux des sphères correspondantes, et dont les rayons sont respectivement égaux aux longueurs des arêtes latérales.

Cela fait, construisez, dans le but de déterminer l'un des points de rencontre des trois sphères, les lignes d'intersection de ces surfaces combinées deux à deux.

Ces lignes, respectivement placées dans les plans radicaux des sphères qui les déterminent, ont pour projections horizontales les axes radicaux *ef*, *gh*, *lk* des grands cercles que vous venez de figurer sur l'épure, et comme elles doivent passer par le sommet cherché, leurs projections horizontales, c'est-à-dire les trois axes radicaux *ef*, *gh*, *lk*, devront, comme vérification, concourir en un point unique D_4.

Ce point D_4 sera donc la projection sur le plan de la base du sommet qui lui est opposé. Pour trouver la vraie grandeur de la cote de ce point, vous pourrez, afin de simplifier le tracé précédemment expliqué, remarquer qu'elle est égale à la demi-corde interceptée par l'une quelconque des sphères sur leur axe radical commun (cet axe se confond ici avec la verticale du point D_4). Alors, rabattant autour de la droite unissant les points C_1D_4 le grand cercle de la sphère C_1 conduit par l'axe radical des trois sphères, vous retrouverez précisément la trace horizontale de la sphère C_1, et, attendu que l'axe radical des sphères se rabattra suivant la perpendiculaire à la charnière C_1D_4 menée par le point D_4, cette perpendiculaire D_5D_4, limitée d'une part au pied D_4 de l'axe radical et de l'autre au grand cercle rabattu, vous donnera la vraie grandeur de la cote. Il restera à relever de même que dans le cas précédent le plan de la base en entraînant les sommets. Vous remarquerez en terminant que les deux solutions conduisent pour la détermination de la projection D_4 du sommet sur le plan de la base, au même tracé.

Méthode de transmutation des figures (§ 1).

169. *Toute épure de géométrie descriptive conduit à un théorème de géométrie.* — Effectivement, les propriétés de la figure de l'espace et de ses projections sont corrélatives, c'est-à-dire qu'à toute propriété de la figure de l'espace correspond une propriété de ses projections et réciproquement. Cette simple remarque, qui permet d'établir un grand nombre de propriétés géométriques, sert de base à la méthode de transmutation des figures.

170. Méthode de Monge. — La méthode de Monge a pour but de donner aux propriétés géométriques établies à l'aide de la méthode de transmutation des figures une plus grande généralité que celle qui serait fournie en introduisant dans la conclusion les restrictions nécessitées par la construction même de ces figures. Pour atteindre ce but, Monge admettait le principe suivant :

Toute démonstration faite sur une figure générale contenant des éléments réels (points, lignes ou surfaces), mais susceptibles de devenir imaginaires, est vraie dans tous les cas.

Le dernier problème que nous venons de traiter (§ 168, 2me sol.) offre l'une des belles applications de la méthode de MONGE. Effectivement, en appliquant la méthode de transmutation des figures à l'épure donnée par la figure 159 dans le cas de cercles ou de sphères se coupant en des points réels on est conduit aux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Les axes radicaux de trois cercles combinés deux à deux concourent en un seul point, qui est le centre radical de ces cercles.*

Théorème II. — *Les plans radicaux de trois sphères combinées deux à deux se rencontrent suivant une seule droite, qui est l'axe radical des trois sphères.*

Cela fait, en considérant le principe de la méthode de MONGE comme établi, on peut dire que les deux théorèmes précités sont généraux.

Principe de continuité. — MONGE appliquait sa méthode tacitement, sans lui donner la forme d'un principe général et sans démonstration. C'est à PONCELET que l'on doit d'avoir donné à la méthode de MONGE, dans son *Traité des propriétés projectives des figures*, un caractère général, mais sans en indiquer de démonstration rigoureuse, et en la transformant en un principe de géométrie des plus féconds qu'il appelle principe de continuité et dont voici l'énoncé :

Si une figure présente plusieurs cas qui offrent tous le même caractère de généralité, toute propriété reconnue vraie pour l'un d'eux est applicable à tous les autres.

Pour *justifier* la méthode de MONGE, ou le principe de continuité, il suffit de remarquer que, sauf pour un petit nombre d'exceptions, le calcul appliqué aux questions de géométrie conduit à des solutions indépendantes de la position des éléments de la figure, pourvu toutefois que ces positions soient générales.

REMARQUE. — Il importe, si l'on veut donner leur plus grande généralité aux propositions résultant de l'application de la méthode de transmutation des figures, de substituer à l'épure étudiée, sa projection centrale sur un plan quelconque; car, après cette modification, les lignes parallèles de l'épure, et en particulier les lignes de rappel, deviendront concourantes (§ 13).

171. Problème XVIII. — *Déduire, en appliquant la méthode de transmutation des figures, de l'épure qui donne l'intersection de trois plans déterminés par leurs traces (fig. 83 pl. V) le théorème suivant :*

Théorème. — *Si, dans un plan, les côtés de deux triangles concourent deux à deux en trois points situés sur une même droite* D, *et que par un point pris à volonté, dans le plan de la figure, on trace des droites passant au sommet de l'un des triangles, que l'on prenne ensuite les points de rencontre de ces droites avec* D, *et qu'on les joigne aux sommets respectifs du second triangle, ces trois dernières droites concourront en un seul point.*

La figure 83 (§ 73) donne, par le point de concours des lignes de rencontre de trois plans combinés deux à deux, le point d'intersection a, a' de ces plans. Afin d'obtenir, conformément à la remarque faite en terminant l'article précédent, une plus grande généralité, construisez sur un plan quelconque une projection centrale de l'épure précitée.

En plaçant le centre de projection dans une position arbitraire, et en projetant : 1° les triangles $h_1h_2h_3$, $v'_1v'_2v'_3$; 2° les lignes de rappel $h_1h'_1$, $h_2h'_2$, $h_3h'_3$; 3° les projections verticales des intersections des plans combinés deux à deux $h'_1v'_1$, $h'_2v'_2$, $h'_3v'_3$, et 4° la ligne de terre xy (*fig.* 83, pl. V), vous obtiendrez (*fig.* 160, pl. X) successivement : 1° les deux triangles $H_1H_2H_3$, $W'_1W'_2W'_3$; 2° les projections $H_1H'_1$, $H_2H'_2$, $H_3H'_3$ des lignes de rappel, qui devront concourir en un point β_∞ donné

en projetant le point à l'infini des droites perpendiculaires à la ligne de terre primitive (§ **13**); 3° les droites $H'_1W'_1$, $H'_2W'_2$, $H'_3W'_3$, qui devront passer par la projection centrale α' du point a'; et enfin 4° la projection centrale D de la ligne de terre qui devra passer par les trois points de rencontre des côtés des triangles $H_1H_2H_3$, $W'_1W'_2W'_3$ pris deux à deux. En un mot, les conditions que nous venons d'énumérer pour effectuer convenablement le tracé sont précisément celles indiquées dans l'énoncé.

172 Problème XIX. — *Déduire de l'épure qui donne l'intersection de trois plans déterminés par leur traces* (*fig.* 83, pl. V) *le théorème de Desargues.* — Énoncé du théorème de *Desargues*:

Si deux triangles, situés dans l'espace, ou dans un même plan, ont leurs sommets placés deux à deux sur trois droites concourant en un même point, leurs côtés se rencontrent deux à deux en trois points situés en ligne droite (à résoudre).

173. Problème XX. — *Déduire de l'épure, qui donne les traces d'un plan conduit par deux droites qui se coupent, la réciproque du théorème de Desargues* (à résoudre).

174. Problème XXI. — *Projeter coniquement une circonférence suivant une deuxième circonférence de rayon donné* (*fig.* 161, pl. X). — Énumérons les propriétés du système formé par les deux cercles, qui conduisent à la solution du problème :

1° *Il faut que les deux circonférences des cercles se coupent en des points réels ou imaginaires.* — Car les circonférences doivent se trouver sur la surface du cône projetant l'une d'elles suivant l'autre, et deux lignes tracées sur une même surface se rencontrent en des points réels ou imaginaires.

2° *Les circonférences doivent être sur une même sphère.* — En effet, assujettir une sphère à passer par deux circonférences qui se coupent, c'est l'astreindre à passer par les deux points de croisement de ces lignes et par un autre point de chacune d'elles; soit en tout quatre points qui doivent se trouver sur la sphère, et par ce fait que ces quatre points se trouvent dans les plans des cercles, qui sont ici essentiellement différents, on voit que les deux circonférences peuvent toujours se placer sur une même sphère.

3° **Théorème.** — *Par deux cercles sur une même sphère on peut conduire deux cônes* (*fig.* 161, pl. X). — Soit $abh\theta$ le grand cercle de la sphère perpendiculaire aux plans des cercles donnés ; soit encore, en adoptant pour plan de la figure celui de ce grand cercle, ab, θh les projections sur ce plan des cercles donnés. Tirons deux couples de cordes (ah, $b\theta$), ($a\theta$, bh) leurs points de croisement S et Σ donnent les sommets des cônes cherchés; effectivement l'égalité des angles α, β résulte de leur mesure commune sur la circonférence $abh\theta$. On en déduit que les plans perpendiculaires au plan de la figure, conduits par les cordes ab, $h\theta$, déterminent dans le cône qui aurait pour sommet Σ ou S et pour base commune l'une des circonférences données, deux sections antiparallèles, et comme l'une d'elles est un cercle, l'autre sera également circulaire.

Exécution de l'épure. — Amenez d'abord le plan du cercle donné dans une position $P\alpha P'$ perpendiculaire au plan vertical (*fig.* 162, pl. X); soient ensuite ($a'b'$), (o, o') la projection verticale du cercle et les deux projections de son centre; cherchons à projeter coniquement le cercle ainsi déterminé suivant un cercle de rayon donné sur l'un des plans coordonnés, sur le plan horizontal par exemple.

Les circonférences des cercles doivent se couper en des points réels ou imaginaires sur la ligne de rencontre αP de leurs plans, et, si l'on rabat le plan $P\alpha P'$ avec la circonférence qu'il contient, autour de αP les points de rencontre des circonférences primitives ne bougeront pas; par conséquent en astreignant le cercle rabattu en ω_1, à l'aide du tracé bien connu, à rencontrer le cercle cherché sur

αP vous aurez exprimé par là même que les cercles dans leurs positions naturelles se coupent. Or, pour que deux cercles se rencontrent sur une droite il faut et il suffit qu'ils aient la droite pour axe radical.

Quand, sur l'épure, le cercle ω_1 et la droite αP se couperont en des points réels, la construction de la circonférence inconnue n'offrira aucune difficulté, car cette dernière sera déterminée par deux de ses points et par son rayon.

Supposons donc que, conformément à la disposition de notre épure, ces points de rencontre soient imaginaires ; et appuyons notre tracé sur le théorème suivant :

Théorème. — *L'axe radical de deux cercles est le lieu des centres des cercles qui les coupent orthogonalement.* — D'après ce théorème un point ω, pris à volonté sur l'axe radical αP, est le centre d'un cercle qui coupe orthogonalement ω_1 et le cercle inconnu ; en ce cas-là, le rayon du cercle auxiliaire est égal à la longueur ωd_1 de l'une des tangentes que l'on peut conduire par ω à la circonférence ω_1.

Si l'on conçoit d'autre part l'une des tangentes au cercle inconnu passant au même point ω, elle est égale, comme rayon d'un même cercle, à la première. On en déduit que la distance du centre du cercle inconnu au point ω est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont respectivement égaux à ωd_1 et au rayon du cercle cherché ; par suite en prolongeant $O_1 d_1$ d'une longueur $d_1 c_1$ égale au rayon du cercle de position inconnue, vous aurez par la circonférence décrite du point ω comme centre avec ωc_1 pour rayon, un premier lieu du centre du cercle dont la construction nous occupe; d'un autre côté, la perpendiculaire menée du centre O_1 sur l'axe radical donne un second lieu de ce point. Vous obtiendrez donc à la rencontre de ces deux lieux deux points répondant à la question ; adoptez l'un d'eux, γ par exemple, et décrivez, avec le rayon donné, la circonférence correspondante, puis projetez verticalement cette ligne en $h't'$. Observez alors que le plan de front conduit par les deux centres (γ, γ'), (o, o') est précisément le plan adopté pour constituer la figure 161; vous en conclurez qu'en y reproduisant identiquement le tracé déjà établi, tracé qui se reproduit également en projection sur le plan vertical, vous trouverez les sommets cherchés (s', s), (σ', σ).

CHAPITRE V

APPLICATION DES MÉTHODES AUX PROBLÈMES RELATIFS AU POINT

A LA DROITE ET AU PLAN

MESURE DES DISTANCES

175. Problème I. — *Trouver la longueur de la droite qui joint deux points donnés par leurs projections* (a, a'), (b, b') (*fig.* 163, pl. X).

MÉTHODE DES CHANGEMENTS DE PLANS DE PROJECTION. — Traçons les projections ab, $a'b'$ de la droite de l'espace qui mesure la distance des points donnés, et, en adoptant une nouvelle ligne de terre x_1y_1 parallèle à ab, rendons le plan vertical de projection parallèle à la droite de l'espace AB. Sur ce nouveau plan vertical, les projections des points A, B s'obtiendront (§ **103**) en reportant les distances $\alpha a'$, $\beta b'$, en $\alpha_1 a'_1$, $\beta_1 b'_1$, sur des perpendiculaires à x_1y_1 menées des points a, b.

Dans le nouveau système de plans coordonnés, on obtient la ligne de front ab, $a'_1b'_1$, dont la projection verticale $a'_1b'_1$ donne la vraie grandeur de la distance des points qui nous occupent.

Méthode des rabattements (*fig.* 163, pl. X). — Rabattons le trapèze bi-rectangle ABab, autour de ab, sur le plan horizontal; les projetantes Aa,Bb se placent, après le rabattement, sur les perpendiculaires aa_2, bb_2 élevées des points a, b, à la charnière, et leurs longueurs sont respectivement égales aux cotes $\alpha a'$, $\beta b'$ des points donnés; conséquemment la droite a_2b_2, unissant les points rabattus, est égale à la vraie grandeur de leur distance.

On peut tout à la fois simplifier cette solution et réduire la place généralement occupée par le tracé; à cet effet rabattons la droite AB autour de l'horizontale $a'\beta'_1$, ab du plan projetant vertical de cette droite (*fig.* 163, pl. X); dans ce mouvement le point a, a' reste fixe, et la projection horizontale du second point rabattu vient sur une perpendiculaire menée par b à la projection ab de la charnière, à une distance de cette ligne égale à la différence des cotes β'_1b' des points donnés; si donc, après avoir reporté la distance β'_1b' en bb_3, on trace la droite ab_3, on aura, par cette dernière ligne, le nouveau rabattement, et par suite la vraie grandeur de la distance cherchée.

Méthode des mouvements de rotation (*fig.* 163, pl. X). — Amenons, à l'aide d'une rotation autour de la verticale du point A, la droite AB dans un plan de front. Dans ce mouvement le point A et ses projections a, a' restent fixes, la droite ab vient, en conservant sa longueur, s'arrêter en ab_4, sur une parallèle à la ligne de terre; d'autre part, comme la cote du point B conserve également sa longueur, on aura la nouvelle projection verticale de ce point par la rencontre b'_4 de la parallèle à xy menée par b', et de la ligne de rappel du point b_4. La projection verticale de la droite déplacée, obtenue en joignant par une droite les points $a'b'_4$, fournira enfin la vraie grandeur de la distance cherchée.

176. Problème inverse. — *Porter sur une droite, à partir d'un point et dans un sens déterminé, une longueur donnée* (*fig.* 164, pl. X). — Soient (d, d'), (a, a') la droite et le point donnés; proposons-nous de porter sur cette droite, dans le sens déterminé par la flèche f, une longueur donnée l. Amenons, pour résoudre la question, la droite dans un plan de front, au moyen d'une rotation effectuée autour de la verticale du point a', a : ce point pendant le déplacement de la figure sera fixe, et un second point b, b', pris arbitrairement sur la droite mobile, viendra, en opérant le tracé suivant la méthode donnée au sujet du problème direct, se projeter en b_1, b'_1; il suit de là que la droite donnée se projettera, dans sa nouvelle position, en ab_1, $a'b'_1$. Cela fait, en portant $a'o'_1 = l$, on trouvera, après avoir ramené la droite dans sa position primitive d, d', en entraînant avec elle celui de ses points qui se projette verticalement en o'_1, les projections o', o demandées.

177. Problème II. — *Trouver la distance d'un point à un plan.*

Solution générale. — 1° Par le point on conduit une droite perpendiculaire au plan (§ **40**); 2° on construit ensuite le point de rencontre de la perpendiculaire et du plan (§ **69**); 3° enfin, en opérant suivant la méthode du paragraphe **175**, on détermine, en véritable grandeur, la distance du point donné au pied de la perpendiculaire, c'est-à-dire la distance cherchée. Bien que la solution du problème se réduise, comme nous venons de le voir, à celle de trois problèmes connus du lecteur, nous reproduirons, vu l'importance de la question, l'ensemble des tracés pour les deux cas principaux suivants : 1° le plan est donné par ses traces ; 2° le plan se trouve déterminé par deux de ses droites, ou trois de ses points.

1° *Le plan est donné par ses traces* (*fig.* 165, pl. X). — Soient $P\alpha P'$, (a, a') les traces du plan et les projections du point; conduisons, conformément à la solution générale, par le point a, a' une droite perpendiculaire au plan, dont les projections $a'm'$, am sont aussi respectivement perpendiculaires aux traces de ce plan, et, afin d'obtenir le pied de cette droite sur ce plan, employons le plan vertical projetant de la droite comme plan auxiliaire; ce plan coupera celui qu'on nous donne suivant la droite projetée en vh, $v'h'$, qui par sa rencontre p, p' avec la droite am, $a'm'$ fournit le pied cherché. Alors, pour continuer l'application de la méthode générale, nous amènerons la droite ap, $a'p'$, au moyen d'une rotation, autour de la verticale du point a,a', en ap_1, $a'p'_1$, et nous aurons de la sorte non seulement la vraie grandeur $a'p'_1$ de la distance du point a,a' au plan $P\alpha P'$, mais encore en ap, $a'p'$ les projections, qu'il est souvent utile de connaître, de la perpendiculaire abaissée du point a,a' sur le plan $P\alpha P'$.

2° *Le plan est déterminé par trois de ses points* (*fig.* 166, pl. X). — Soient (a, a'), (b, b'), (c, c') les points qui déterminent le plan, et soit o, o' le quatrième point donné (on a supprimé la ligne de terre [§ **23**]). D'abord pour pouvoir déterminer la perpendiculaire qui mesure la distance, construisons la direction de la trace horizontale du plan donné ; joignons, dans ce but, les points (a, a'), (b, b') par une droite ab, $a'b'$; puis, en coupant le plan donné par un plan auxiliaire horizontal conduit par c, c', la ligne de rencontre se projettera en cm, $c'm'$, et, par suite, la projection horizontale de la perpendiculaire cherchée s'obtiendra en conduisant par le point o la perpendiculaire oq à la droite cm. Cela fait, en adoptant un nouveau système de plans coordonnés formé du plan horizontal conduit par mc, $m'c'$, et du plan vertical projetant la perpendiculaire, construisons simultanément le pied de cette perpendiculaire, et la vraie grandeur de la distance : la nouvelle ligne de terre x_1y_1 coïncide avec oq, et comme le plan horizontal se déplace parallèlement à lui-même, rien n'est changé en projection horizontale, quant à la projection verticale nouvelle pour la droite mc, $m'c'$ on trouvera le point c'_1, pour les points (o, o'), (b, b') on obtiendra en prenant $oo'_1 = \omega'o'$, $\beta_1 b'_1 = \beta b'$, les projections o'_1, b'_1 ; enfin la droite qui unit les points c'_1, b'_1 donnera la nouvelle trace verticale P'_1 du plan des trois points. Actuellement, le problème se réduit à chercher, dans le second système de plans coordonnés, la distance du point o, o'_1 au plan $P_1 C'_1 P'_1$: dans ces conditions on construit sans difficulté les projections $o'_1p'_1$, op, de la droite qui mesure la distance, laquelle se trouve projetée en véritable grandeur sur le nouveau plan vertical. Pour obtenir les projections de la perpendiculaire dans le système primitif de plans coordonnés, nous reviendrons à l'ancien plan vertical ; la projection du point p, p'_1 s'obtiendra en reportant, dans le sens convenable, sur la ligne de rappel relative au point p et au système primitif, la longueur pp'_1, en $\pi'p'$; dès lors, après avoir tracé la droite $o'p'$, nous connaîtrons : 1° la vraie grandeur $o'_1p'_1$ de la droite qui mesure la distance cherchée, et 2° les projections op, $o'p'$ de cette ligne dans le système primitif de plans coordonnés.

178. — *Distance de plusieurs points donnés* (a,a'), (b, b'), (c, c'), etc., *à un même plan* $P\alpha P'$ (*fig.* 167, pl. X). — Dans ce cas, afin de simplifier l'ensemble des constructions, on rend le plan donné perpendiculaire au plan vertical, ce que l'on sait faire (§ **111**) ; la nouvelle ligne de terre x_1y_1 est perpendiculaire à la trace αP, la trace verticale nouvelle $\alpha_1 P'_1$ du plan donné s'obtient en joignant le point α_1 au point v'_1 que l'on trouve par la rencontre $v\,v'$ des deux plans verticaux de projection et du plan $P\alpha P'$, rapportée au nouveau système de plans coordonnés. Enfin le tracé maintes fois employé donne les projections a'_1, b'_1, c'_1,... sur le plan vertical auxiliaire des points (a, a'), (b, b'), (c, c').... Pour achever de résoudre le problème il suffit, dans le nouveau système de plans coordonnés, de chercher les distances des points (a, a'_1), (b, b'_1), (c, c'_1),... au plan $P\alpha P'_1$; comme ces distances sont données par des droites de

front, et que, d'autre part, leurs points de rencontre avec le plan $P\alpha P'_1$ se projettent verticalement sur la trace $\alpha_1 P'_1$ de ce plan, on les obtient en véritable grandeur en prenant simplement les distances $a'_1 a_2$, $b'_1 b_2$, $c'_1 c_2$,... des points a'_1, b'_1, c'_1,... à la trace $\alpha_1 P'_1$.

179. Problème III. — *Conduire par un point un plan perpendiculaire à une droite* (*fig.* 168, pl. XI). — Soient (d, d'), (m, m') les projections de la droite et du point. Les traces du plan devant être respectivement perpendiculaires aux projections de la droite (§ **40**), on pourra le déterminer au moyen de la ligne de front et de l'horizontale qui, situées dans le plan cherché, se croisent au point m, m' ; l'horizontale se projette verticalement suivant une parallèle à la ligne de terre $m'h'$, et, horizontalement, suivant la perpendiculaire mh, à la droite d, menée par m ; de même la ligne de front offre une projection horizontale mv parallèle à la ligne de terre et, sur le plan vertical, une projection $m'v'$ perpendiculaire à d'. Le plan est ainsi déterminé par le couple de droites $(mv, m'v')$, $(mh, m'h')$.

180. Problème IV. — *Abaisser d'un point une perpendiculaire sur une droite* (*fig.* 169, pl. XI).

Solution générale. — La solution de ce problème se réduit à celle de deux questions précédemment traitées, en employant la méthode suivante : 1° par le point donné on conduit un plan perpendiculaire à la droite (§ **179**). 2° On prend le point d'intersection de ce plan et de la droite (§ **69**), que l'on joint au point donné. Pour exécuter l'épure on a, en se conformant à la solution générale et au tracé qui résulte du paragraphe **179**, déterminé le plan perpendiculaire à l'aide des parallèles à ses traces $(mh, m'h')$, $(mv, m'v')$, qui se croisent en m, m' ; puis, en recourant au plan auxiliaire vertical projetant la droite D, on a déterminé le point de rencontre p, p' du plan perpendiculaire et de la droite d, d', enfin le point p, p', joint à celui qu'on nous donne, a fourni les projections mp, $m'p'$ de la perpendiculaire cherchée.

181. Problème V. — *Trouver la distance d'un point* m, m' *à une droite* d, d', (*fig.* 169, pl. XI). — Construisez (§ **180**) la perpendiculaire mp, $m'p'$, abaissée du point m, m', sur la droite d, d', et, par une rotation autour de la verticale du point m, m', amenez-la dans un plan de front, en $mp_1, m'p'_1$: cette dernière ligne $m'p'_1$ vous donnera la vraie grandeur de la distance du point à la droite.

182. Problème VI. — *Construire la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan.*

Solution générale. — Tout d'abord, par la ligne de croisement de deux plans respectivement perpendiculaires aux droites données, on obtient aisément la direction de la plus courte distance : car tout plan perpendiculaire à l'une des droites données est nécessairement parallèle à leur perpendiculaire commune ; conséquemment, la rencontre de deux plans respectivement perpendiculaires aux deux droites données sera également parallèle à la plus courte distance. Une fois la direction de la plus courte distance connue, on trouvera sa position en construisant une droite qui, tout en étant parallèle à cette direction, s'appuiera sur les droites données ; c'est là un problème dont nous avons donné la solution (§ **75**).

Exécution de l'épure (*fig.* 170, pl. XI). — Soient (d, d'), (d_1, d'_1) les projections des droites données. Plaçons deux points α, β d'une manière arbitraire sur xy, mais, pour plus de clarté dans l'épure, éloignons-les des droites (d, d'), (d_1, d'_1), et, par chacun d'eux, conduisons des droites (P, P'), (Q, Q') respectivement perpendiculaires aux projections données, ces droites détermineront les traces $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ des plans dont la rencontre δ, δ' fournira la direction de la ligne cherchée.

Pour obtenir, en opérant suivant la méthode du paragraphe précité, la position de la plus courte distance, par un point o, o' pris arbitrairement sur l'une des lignes données, conduisons une parallèle δ_1, δ'_1 à la direction δ, δ' de la ligne cherchée, et observons que le point de rencontre m, m' du plan conduit par les droites qui se croisent en o, o' et de celle des droites données qui se trouve en dehors de ce dernier plan, appartient à la plus courte distance, que, par suite, cette droite sera la portion $mn, m'n'$, de la parallèle à δ, δ' menée par m, m', et limitée aux droites données ; l'épure devra offrir cette vérification que les points n, n' appartiendront à la même ligne de rappel. On construira ensuite sans difficulté (§ 175) la vraie grandeur de la plus courte distance.

Bien que nous eussions déjà traité les questions qui conduisent à la solution du problème actuel, nous avons dû, à cause de son extrême importance, donner les constructions avec tous les détails qu'elles comportent.

ANGLES FORMÉS PAR DES DROITES ET DES PLANS

183. Problème I. — *Construire l'angle de deux droites données* (*fig.* 171, pl. XI). — Si les droites données $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ ne sont pas situées dans un même plan, leur angle est, par définition, celui de l'une des droites données et d'une parallèle à l'autre menée par l'un des points de la première.

Pour exécuter l'épure par le point s', s de la droite $ab, a'b'$, dont la projection verticale s' se trouve au croisement des droites $a'b', c'd'$, conduisons une parallèle à la seconde droite donnée, sa projection verticale coïncide, par suite de la position attribuée au point s, s', avec $c'd'$; quant à sa projection horizontale, on l'obtient en conduisant par le point s la parallèle $s\delta$ à la droite cd. Actuellement pour obtenir en véritable grandeur l'angle des droites $(a'b', ab)$, $(c'd', s\delta)$, construisons les projections $ef, e'f'$ d'une horizontale du plan de ces lignes, et rabattons-les autour de cette horizontale : deux de leurs points (e, e'), (f, f') resteront immobiles et le sommet s, s' se rabattra en un point S_2 (§ 128); alors, en tirant les droites S_2f, S_2e, on a l'angle fS_2e cherché.

Si l'on veut avoir les projections de la bissectrice de l'angle des droites qui se croisent en s, s', on mènera la bissectrice S_2g de l'angle rabattu ; puis on la relèvera facilement suivant la droite $sg, s'g'$: car le sommet se relève en s, s', et la rencontre g, g' de la bissectrice avec la charnière ne bouge pas.

184. Problème II. — *Construire l'angle d'une droite et d'un plan.*

Solution générale. — Soient (*fig.* 172, pl. XI) P, D le plan et la droite ; leur angle est, par définition, celui que forme la droite D avec sa projection CB sur le plan P. La recherche directe de cet angle est un peu longue, habituellement on simplifie la solution du problème en observant que l'angle CAB, formé par la droite donnée et par la projetante, sur le plan donné, de l'un quelconque de ses points, est le complément de celui que nous cherchons ; ce qui réduit la question à la construction de l'angle de deux droites. En un mot, pour trouver l'angle d'une droite et d'un plan, on cherchera, par la méthode donnée plus haut, l'angle de la droite avec la perpendiculaire abaissée d'un de ses points sur le plan donné, et on en prendra le complément.

Exécution de l'épure (*fig.* 173, pl. XI). — Soient $P_\alpha P'$ les traces du plan ; d, d' les projections de la droite et s, s' celles de l'un quelconque de ses points. Menons, pour déterminer la perpendiculaire au plan, par les points s, s' deux droites δ, δ' respectivement perpendiculaires aux traces don-

nées, et, conformément à la méthode du paragraphe 183, construisons, en rabattant les droites (δ, δ'), (d, d') autour de la trace horizontale $t\theta$ de leur plan, la vraie grandeur $tS_2\theta$ de l'angle de ces lignes ; enfin déterminons, à l'aide de la perpendiculaire S_2k à la droite $S_2\theta$, le complément β de cet angle, c'est-à-dire l'angle cherché.

185. Problème III. — *Construire les angles que fait une droite avec les plans de projection* (*fig.* 174, pl. XI). — Ce problème est un cas particulier du précédent; mais, comme les projections de la droite sur les plans sont connues, il est plus simple, contrairement à ce qui a lieu pour le cas général, de chercher directement l'angle de la droite avec ses projections sur les plans coordonnés.

D'abord construisons l'angle de la droite donnée d, d' et du plan horizontal, c'est-à-dire l'angle de la droite D et de sa projection horizontale d; dans ce but rabattons, après avoir construit les traces (v, v'), (h, h') de la droite donnée, son plan vertical projetant autour de la trace verticale vv' de ce plan, pendant ce mouvement le point v, v' demeure fixe, le point h décrit, sur le plan horizontal, un arc de cercle de centre v et de rayon vh, pour venir s'arrêter en h_1 sur la ligne de terre. Cela fait, on voit que la projection horizontale d se trouve rabattue sur xy, tandis que la droite de l'espace, également rabattue, s'obtient en tirant la droite $v'h_1$; l'angle de la droite D avec sa projection horizontale est donc donné directement par $\widehat{v'h_1v} = \alpha$.

On trouve, d'une manière toute semblable, en rabattant sur le plan horizontal celui qui projette verticalement la droite, l'angle β qu'elle fait avec le plan vertical. Si la droite donnée avait ses traces hors des limites de l'épure, on pourrait la remplacer par l'une de ses parallèles dont les traces seraient dans les limites voulues, ou plutôt, en adoptant des axes menés par un point de la droite perpendiculairement aux plans de projection, la rendre successivement parallèle à chacun d'eux.

186. Problème IV. — *Construire les projections d'une droite passant par un point donné et faisant avec les plans de projection des angles donnés* (*fig.* 175, pl. XI). — Soient m, m' les projections du point donné et α, β les angles donnés (on a supprimé la ligne de terre).

Mettons en évidence, en rendant la droite inconnue parallèle au plan horizontal à l'aide d'une rotation autour d'un axe conduit par le point M et perpendiculaire au plan vertical de projection, l'angle β que fait cette droite avec ce plan vertical; dans sa nouvelle position, la droite se projettera verticalement suivant la parallèle $m'\delta'$ à la ligne de terre, et horizontalement suivant la droite $m\delta$, qui fait avec mm' un angle égal au complément $\frac{\pi}{2} - \beta$ de celui que doit faire la droite inconnue avec le plan vertical de projection. Mettons également en évidence, en imprimant à la droite cherchée une rotation autour d'un axe vertical conduit par M de manière à l'amener dans le plan de front de ce point, l'angle α qu'elle doit faire avec le plan horizontal, alors les projections de la droite seront : sur le plan horizontal, la parallèle md à la ligne de terre, menée par m, et, sur le plan vertical, la droite $m'd'$ inclinée sur mm' d'un angle égal au complément $\frac{\pi}{2} - \alpha$ du second angle donné. Un point pris arbitrairement sur la droite inconnue de l'espace est actuellement dédoublé, donnons-lui, sur d, d', une position quelconque a_1, a'_1, il prendra, par suite, sur l'autre droite, deux positions correspondantes dont les projections horizontales a_2, a_3 s'obtiendront évidemment en portant $ma_2 = ma_3 = m'a'_1$. Actuellement la question se réduit à trouver les positions que prendra le point dédoublé quand les droites (δ, δ'), (d, d') se seront réunies de nouveau, en tour-

nant : la première, autour de la perpendiculaire au plan vertical mené par m, m', la seconde, autour de l'axe vertical conduit par le même point. Dans ces mouvements les points choisis sur les droites dédoublées décrivent chacun un arc de cercle, et, pour le point a_1, a'_1 de la droite d, d', cet arc se projette verticalement suivant la parallèle $a'_1b'_1$ à la ligne de terre menée par le point a'_1, horizontalement, suivant un arc de cercle de centre m et de rayon égal à ma_1. Pour les points de la droite δ, δ' projetés, avant la rotation, en a_2, a_3, les arcs décrits offrent des projections qui, passant respectivement par chacun de ces points, sont parallèles à la ligne de terre ; alors par les rencontres c, g, e, f, des projections horizontales des arcs que nous venons de déterminer, on obtient les projections de même nom de quatre points répondant à la question. Quant à leurs projections verticales, par suite de la symétrie de la figure, elles se confondent deux à deux, et se trouvent aux points de croisement des lignes de rappel eg, fc et de la projection verticale $a'_1 b'_1$ de l'un des arcs servant à déterminer les points cherchés ; dès lors, en remarquant que le point m est placé sur les droites joignant les points (c,e), (g,f) et en traçant ces droites ainsi que celles qui vont du point m', soit au point g', soit au point f', on aura les deux projections de quatre droites répondant à la question, lesquelles sont ici : $(mg, m'g')$, $(mc, m'c')$, $(mf, m'f')$, $(me, m'e')$.

Discussion. — Il faut et il suffit, pour que le problème offre quatre solutions, que les cercles se coupent, ou que mp soit plus petit que le rayon ma_1 ; mais, comme on a : $mp = ma_2 \sin\beta$ et $ma_1 = \mu a'_1 = m'a'_1 \cos\alpha$, la condition précitée pourra s'exprimer par l'inégalité $ma_2 \sin\beta < m'a'_1 \cos\alpha$; comme par construction $ma_2 = m'a'_1$, cette condition se réduit à $\sin\beta < \cos\alpha$ ou à $\sin\beta < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ou encore à $\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$, qu'on peut écrire $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Si l'on avait $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, les cercles seraient deux à deux tangents, le problème ne donnerait plus que deux solutions, lesquelles seraient fournies par deux droites de profil.

Enfin si l'on avait $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, les cercles seraient extérieurs et le problème serait impossible. En résumé : 1° quand la somme des angles donnés est inférieure à $\frac{\pi}{2}$, le problème offre quatre solutions, deux à deux symétriques par rapport au plan de front et au plan de profil du point donné ; 2° dans le cas d'angles complémentaires, on trouve deux droites de profil ; 3° enfin le problème est impossible quand la somme des angles donnés est supérieure à $\frac{\pi}{2}$.

187. Problème V. — *Construire l'angle de deux plans.* — On ramène ce problème à la recherche de l'angle de deux droites par l'emploi de l'une des deux méthodes suivantes.

1° Méthode indirecte. — D'un point quelconque de l'espace conduisons une perpendiculaire sur chacun des plans donnés; ce point tombe nécessairement dans l'un des quatre dièdres formés par les deux plans ; or, l'angle des perpendiculaires étant le supplément de celui de ces quatre dièdres qui contient le point arbitrairement choisi, et, d'autre part, les angles formés par les deux plans étant eux-mêmes deux à deux supplémentaires, on en conclura que la mesure de l'angle aigu de deux plans est la même que celle de l'angle aigu de leurs perpendiculaires.

2° Méthode directe. — Menons, en un point quelconque de l'intersection des plans donnés un plan auxiliaire perpendiculaire à cette ligne, lequel, par ses rencontres avec ceux qu'on nous donne, fournit deux droites formant entre elles le rectiligne du dièdre cherché.

Malgré l'avantage que présente la méthode indirecte de conduire à un tracé déjà connu, l'autre méthode doit lui être préférée, non seulement parce qu'elle est directe, mais encore, et surtout, parce qu'elle conduit à la solution de certains problèmes qu'on ne saurait résoudre commodément en recourant à la méthode indirecte; ainsi, par exemple, on doit, pour déterminer le plan bissecteur du dièdre formé par deux plans, comme nous le verrons bientôt, construire directement l'angle de ces plans. Les tracés relatifs à la méthode indirecte n'offrent rien de nouveau, le lecteur les exécutera sans difficulté; quant au tracé direct, il conduit d'abord à déterminer les lignes de rencontre des plans donnés et du plan auxiliaire perpendiculaire à leur intersection, ensuite à construire l'angle de ces lignes ; mais, bien que ces deux tracés soient également connus du lecteur, il importe de les reproduire, en élaguant dans chacun d'eux les lignes inutiles à leur ensemble, et en adoptant, pour le premier, des constructions propres à simplifier le second.

Cela dit, exécutons l'épure : Supposons données les traces $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ (*fig.* 176, pl. XI) des deux plans dont on cherche l'inclinaison, et construisons d'abord la projection horizontale vh de leur intersection ; puis, concevons qu'en un point quelconque de cette intersection on mène un plan qui lui soit perpendiculaire; la trace horizontale de ce plan sera la droite ab menée perpendiculairement à vh par un quelconque p des points de cette ligne, et l'angle cherché est l'angle au sommet d'un triangle dont la base est ab et dont le sommet se trouve à la rencontre S du plan du triangle et de l'arête du dièdre qui nous occupe.

Pour achever de déterminer ce triangle, considérons la droite de l'espace Sp, qui appartient à la fois au plan du triangle et au plan vertical projetant l'arête du dièdre cherché ; cette ligne, attendu que les plans qui la déterminent sont perpendiculaires respectivement à l'arête du dièdre et à la base ab, est elle-même perpendiculaire à ces deux lignes ; d'où l'on déduit que Sp est la hauteur du triangle cherché, que p en est le pied, et que cette hauteur est également perpendiculaire à l'arête du dièdre demandé.

Maintenant, il ne s'agit plus, pour déterminer le triangle dont on connaît la base ab et le pied de la hauteur p, que de construire la vraie grandeur de sa hauteur ; dans ce but, en adoptant x_1y_1 pour ligne de terre, prenons pour nouveau plan vertical coordonné celui qui projette horizontalement l'arête du dièdre, et rapportons cette arête au nouveau plan : h est un point de la projection cherchée, on en obtient un second en reportant la longueur vv', en vv'_1, sur une perpendiculaire à x_1y_1, à l'aide d'un arc de cercle; alors, unissant ces deux points par la droite hv'_1, on obtient la projection cherchée.

La hauteur du triangle est une droite qui, comme nous venons de le voir, passe au point p, est perpendiculaire à l'arête du dièdre, et appartient au nouveau plan vertical ; conséquemment, la projection de cette ligne, sur le nouveau plan, se fera en vraie grandeur suivant la perpendiculaire pS'_1 à la droite hv'_1 menée par le point p.

Actuellement rabattons le triangle de l'espace Sab autour de ab ; sa hauteur, après ce mouvement, viendra sur la perpendiculaire pv à la base ab et le rabattement S_2 du sommet s'obtiendra en reportant, au moyen d'un arc de cercle, pS_1 en pS_2; par suite, comme ab ne bouge pas, le triangle rabattu se tracera en tirant les droites aS_2, bS_2, et l'angle $\widehat{aS_2b}$ de ces dernières droites a même mesure que celui des plans donnés.

Si l'on veut déterminer le plan bissecteur de l'angle des plans, on mènera la bissectrice $S_2\theta$ de l'angle rabattu $\widehat{aS_2b}$, et, comme en la relevant le point θ demeure fixe, le plan bissecteur sera alors

déterminé par l'arête du dièdre, qu'il doit nécessairement contenir, et par le point θ du plan horizontal de projection ; donc sa trace horizontale R sera la droite unissant les points h, θ, et, en joignant le point γ où cette ligne vient croiser la ligne de terre, au point v', on aura enfin la trace verticale R' de ce plan bissecteur.

188. Problème VI.—*Construire l'angle d'un plan* $P\gamma P'$ *avec les plans de projection* (*fig.* 177, pl. XI). — Cherchons, en remarquant que le problème qui nous occupe est un cas particulier du précédent, l'angle du plan donné et du plan horizontal ; à cet effet coupons, conformément au tracé direct expliqué plus haut, les deux plans donnés par un troisième QvQ' perpendiculaire à leur intersection γP ; ce plan auxiliaire détermine sur le plan horizontal la droite vh, sur le plan $P\gamma P'$ la droite de l'espace dont les traces sont en h, v', et, sur le plan vertical, la ligne de rencontre vv', laquelle forme avec les deux premières un triangle rectangle en v, dont l'angle opposé au côté vv' a même mesure que le dièdre cherché ; rabattons donc, afin d'obtenir ce triangle en vraie grandeur, le plan QvQ' autour de vv' ; pendant ce mouvement la charnière vv' demeurera fixe, le point h décrira sur le plan horizontal de projection un arc de cercle de centre v_1 et s'arrêtera à la rencontre h_1 de cet arc et de la ligne de terre ; par conséquent, on obtient, en traçant la droite $v'h_1$, le triangle rabattu $vv'h_1$ dont l'angle α a même mesure que celui du plan $P\gamma P'$, et du plan horizontal.

On a obtenu sur l'épure, d'une manière toute semblable, l'inclinaison β du plan donné et du plan vertical de projection.

189. Problème VII. — *Conduire par un point un plan faisant des angles donnés avec les plans de projection.* — Nous donnerons, après l'étude des plans tangents, une solution directe de la question ; pour l'instant proposons-nous de la résoudre indirectement, en construisant préalablement la perpendiculaire au plan inconnu qui passe par le point donné. Faisons voir, pour déterminer cette ligne, que les angles formés par un plan et par l'une de ses perpendiculaires avec un plan de projection quelconque sont complémentaires.

Soient, en effet (*fig.* 178, pl. XI), P, AB, H, un plan, l'une de ses perpendiculaires et un plan de projection ; projetons A en a, le plan des droites Aa, AB est à la fois perpendiculaire au plan P et au plan H, il l'est donc également à leur intersection EF, consequemment ses rencontres BC, AC avec les plans P, H, forment le rectiligne α du dièdre EF, comme l'angle CAB est droit on voit que AB s'incline sur H d'un angle qui est le complément de l'un des angles donnés. Nous pourrons donc, à l'aide du tracé connu (§ **186**) construire cette droite ; il suffira ensuite, pour achever la construction, de conduire par le point donné un plan perpendiculaire à la droite auxiliaire. Sans nous arrêter au tracé de l'épure, qui sera pour le lecteur un exercice utile, occupons-nous de la discussion du problème.

Discussion. — Soient α et β les angles donnés, la droite auxiliaire devra faire avec les plans coordonnés les angles $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\beta$, et, comme à toute solution pour cette droite correspond une solution pour le plan cherché, on aura, d'après les conclusions de la discussion donnée à la fin du paragraphe **186**, l'un des trois cas suivants :

1° Si $\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$, ou en réduisant, si $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$ le problème offrira quatre solutions, et les plans répondant à la question seront deux à deux symétriques par rapport au plan de front et au plan de profil du point donné ;

2° Si $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ on trouvera deux solutions, les deux plans satisfaisant aux conditions imposées

seront parallèles à la ligne de terre, et symétriquement placés par rapport au plan de front du point donné;

3° Si enfin $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ le problème sera impossible.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

190. Problème I. — *Construire la plus courte distance des projections d'une ligne droite (fig.* 179, pl. XI). — Soient d, d' les deux projections données ; en premier lieu, afin de déterminer la direction de la plus courte distance, remarquez que cette ligne forme, avec les droites données d, d', deux angles droits qui ont un côté, soit sur le plan horizontal, soit sur le plan vertical; d'où vous conclurez que ces angles conserveront leur grandeur sur l'un des plans de projection, que dès lors la direction cherchée est immédiatement donnée par une droite dont les projections, qu'il est inutile de tracer sur l'épure, seraient respectivement dirigées suivant des perpendiculaires aux droites données d, d'.

La direction de la plus courte distance étant ainsi déterminée, cette ligne le sera à son tour dès que vous en connaîtrez un point, lequel pourra se construire par la rencontre de la droite d' et du plan conduit par l'autre droite donnée d parallèlement à la plus courte distance ; pour déterminer ce plan, par un point h, h', pris arbitrairement sur d, menez une parallèle à la plus courte distance, dont les projections δ, δ', sont respectivement perpendiculaires à d et à d', et construisez la trace verticale v' de cette ligne; puis, joignez par une droite ce dernier point au croisement α de d et de xy, et vous aurez la trace verticale $\alpha v'$ du plan auxiliaire ; la rencontre de ce plan et de la droite d' sera en v'_1, v_1, enfin la parallèle $v'_1h'_1, v_1h_1$ à la direction de la plus courte distance, menée par v_1, v'_1 et limitée aux droites données, fournit les projections $v_1h_1, v'_1h'_1$ de la plus courte distance. Quant à sa vraie grandeur, vous l'obtiendrez par le rabattement de cette droite autour de la verticale $v_1v'_1$ de l'un de ses points : le point h_1, h'_1 viendra à la rencontre h_2 de la ligne de terre et d'un arc de cercle de centre v_1, et de rayon égal à v_1h_1 ; par suite la droite rabattue en véritable grandeur sera en v'_1h_2.

191. Problème II. — *Construire la grandeur du côté d'un cube connaissant :*

1° *les projections d, d' (fig.* 180, pl. XI) *de la droite formée par le prolongement de l'un de ses côtés;*

2° *la projection horizontale δ d'un second côté également prolongé, et non situé dans un même plan avec le premier;*

3° *les deux projections a, a' d'un point de la droite Δ.* — Tout d'abord remarquez que les données du problème suffisent pour déterminer la droite Δ ; en effet cette droite, devant offrir une direction perpendiculaire à D, sera à la rencontre du plan vertical conduit par δ et du plan abaissé perpendiculairement à D du point a, a'. Bien que la construction de la projection verticale de la seconde arête prolongée soit des plus simples, vous pouvez sans passer par ce tracé effectuer immédiatement celui du côté cherché et en déduire même la projection verticale de la seconde arête ; effectivement, en remarquant que l'un des côtés du cube est à la fois perpendiculaire à chacune des droites D, Δ, on réduit la question à la recherche de la plus courte distance de ces deux droites ; laquelle, par suite de la perpendicularité des droites D, Δ, peut s'obtenir par une construction plus facile que celle que

nous avons indiquée pour le cas général ; en effet la plus courte distance de deux droites perpendiculaires en direction peut être obtenue par la rencontre de deux plans respectivement conduits par chacune d'elles perpendiculairement à l'autre.

Cela posé, pour simplifier l'exécution de l'épure, déterminez tout à la fois et les deux plans perpendiculaires conduits par les droites données, et leur ligne de rencontre ; dans ce but coupez ces plans perpendiculaires par un troisième contenant le point a, a' et parallèle au plan horizontal ; en premier lieu, vous trouverez deux horizontales des plans perpendiculaires lesquelles, passant par (a, a'), (b, b') auront des projections verticales confondues en $h' h'_1$, et des projections horizontales h, h_1 qui, menées par les points a et b, seront respectivement perpendiculaires aux droites d, δ ; en second lieu, au point de croisement des horizontales que vous venez de tracer, vous aurez l'un des points de rencontre i, i' des plans perpendiculaires, pour en obtenir un autre point i_1, i'_1 vous emploierez le plan auxiliaire de front du point a, a' ; les projections horizontales des lignes de rencontre des plans perpendiculaires et du plan de front seront confondues suivant la droite $f f_1$, leurs projections verticales seront des droites dont l'une f' s'obtiendra en abaissant du point a' une perpendiculaire sur la droite d', dont l'autre f'_1 sera donnée en joignant les points de rencontre $(m, m')(\mu, \mu')$ du plan de front et des droites (d, d'), (h_1, h'_1) qui déterminent l'un des plans perpendiculaires.

Après ces constructions l'intersection des deux plans, c'est-à-dire la plus courte distance, s'obtiendra en tirant les droites $i'i'_1, ii_1$ et en les limitant en leurs points de rencontre (p, p'), (q, q') avec les projections des droites données. Quant à la vraie grandeur de la plus courte distance $pq, p'q'$ vous l'obtiendrez sans difficulté par l'une des méthodes déjà expliquées (§ **175**).

Pour terminer, vous aurez en joignant par une droite les points $q'a'$, la projection verticale δ' de la seconde arête du cube, et, comme vérification, cette dernière droite devra être perpendiculaire à la projection verticale $m'\mu'$ de la ligne de front du plan perpendiculaire à δ, δ'.

192. Problème III. — *Construire un plan parallèle à un plan donné* $P\alpha P'$, *et qui en soit distant d'une longueur donnée l* (*fig.* 181, pl. XI). — Mettez en évidence, sur un plan vertical dont la ligne de terre x_1y_1 est perpendiculaire à αP, la distance donnée l : la trace verticale du plan donné s'obtient après le changement et d'après le tracé maintes fois employé (§ **107**), en prenant le point de rencontre v' des deux plans verticaux de projection et du plan $P\alpha P'$, puis en rapportant ce point au nouveau système, en v'_1, et en joignant par une droite ce dernier point v'_1 à celui qui provient de la rencontre α_1 des droites x_1y_1, αP.

Dans le nouveau système de plans coordonnés, le plan $P\alpha P'_1$ et celui que nous cherchons sont perpendiculaires au plan vertical, par suite, la distance de leurs traces verticales est égale à celle des plans, conséquemment vous obtiendrez, en traçant la parallèle $Q'_1\beta_1$, à $\alpha_1 P'_1$ distante de cette dernière d'une longueur l, la trace Q'_1 sur le nouveau plan vertical du plan cherché, et sa trace horizontale Q sera la parallèle à $\alpha_1 P$ conduite par le point de rencontre β_1 des droites x_1y_1, Q'_1 ; dès lors, en menant par le point de rencontre β des droites Q et xy, la parallèle Q' à la droite P' vous aurez la seconde trace du plan qu'il s'agissait de construire.

193. Problème IV. — *Trouver la distance de deux droites parallèles* (à résoudre).

194. Problème V. — *Les traces d'un plan* $P\alpha P'$ *et la projection verticale* m' *d'un point étant données, déterminer la projection horizontale de ce point, de telle sorte qu'il soit à une distance du plan égale à une droite donnée, l* (*fig.* 182, pl. XII). — Toujours dans le but de mettre en évidence la longueur donnée,

en adoptant une ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à $\alpha P'$, changeons le plan horizontal de projection; le tracé bien connu du lecteur fournit la trace horizontale nouvelle P_1, et, au point de croisement d'une parallèle à cette ligne qui en soit éloignée de l et de la ligne de rappel perpendiculaire à x_1y_1 menée par m', vous trouverez la projection horizontale nouvelle m_1 du point cherché, alors, en reportant l'éloignement $m'm_1$ de ce point sur une ligne de rappel perpendiculaire à xy, en μm, vous aurez enfin la projection horizontale m du point demandé.

195. Théorème I. — *Quand une droite fait, avec les plans de projection, des angles égaux, ses deux projections font également, avec la ligne de terre, des angles égaux, et réciproquement.* — En effet, par un point quelconque A (*fig.* 183, pl. XII) de la ligne de terre, menez une parallèle AB à la droite considérée, elle devra faire également des angles égaux avec les plans de projection, et projetez l'un quelconque B des points de cette droite et la droite elle-même sur les deux plans coordonnés V, H, soient b, b' les projections du point et Ab, Ab' celles de la droite. Les triangles rectangles BAb', BAb, qui ont leurs hypoténuses confondues et un angle aigu égal, sont égaux; par conséquent, la cote Bb du point B doit être égale à son éloignement Bb', ou, en d'autres termes, le point B, comme le point A, doit appartenir au plan bissecteur de l'un des dièdres formés par les plans de projection, et, par suite, les deux projections de la droite AB, et de ses parallèles, doivent former avec la ligne de terre des angles égaux (§ 34). La réciproque se démontre d'une manière analogue.

196. Problème VI. — *Tracer les épures que peut offrir une droite également inclinée sur les plans de projection* (*fig.* 184, pl. XII). — La droite doit se trouver, d'après le théorème précédent, parallèle à l'un des plans bissecteurs des plans coordonnés, elle peut donc occuper l'une des positions suivantes :

1° a_1b_1, $a'_1b'_1$ droite du plan bissecteur des dièdres 2 et 4.

2° a_2b_2, $a'_2b'_2$ droite parallèle au plan bissecteur des dièdres 2 et 4.

3° a_3b_3, $a'_3b'_3$ droite du plan bissecteur des dièdres 1 et 3.

4° a_4b_4, $a'_4b'_4$ droite parallèle au plan bissecteur des dièdres 1 et 3.

5° a_5b_5, $a'_5b'_5$ droite de profil placée sur le plan bissecteur des dièdres 1 et 3.

6° a_6b_6, $a'_6b'_6$ droite parallèle à la précédente.

7° a_7b_7, $a'_7b'_7$ droite de profil placée sur le plan bissecteur des dièdres 2 et 4.

8° a_8b_8, $a'_8b'_8$ droite parallèle à la précédente.

9° a_9b_9, $a'_9b'_9$ } droites parallèles à la ligne de terre et placées sur l'un des plans bissecteurs
10° $a_{10}b_{10}$, $a'_{10}b'_{10}$ } des plans coordonnés.

11° $a_{11}b_{11}$, $a'_{11}b'_{11}$ droite placée sur la ligne de terre.

197. Théorème II. — *Quand un plan fait, avec les plans de projection, des angles égaux, ses traces font également des angles égaux avec la ligne de terre, et réciproquement.* — L'une des perpendiculaires au plan doit faire, avec les plans de projection, des angles égaux ; les projections de cette ligne doivent donc, d'après le théorème I (§ 195), faire également, avec la ligne de terre, des angles égaux et réciproquement.

198. Problème VII. — *Tracer les épures que peut offrir un plan également incliné sur les deux plans de projection.* — Vous trouverez (*fig.* 185, pl. XII) les sept positions suivantes :

1° P_1, P'_1 plan perpendiculaire au plan bissecteur des dièdres 2 et 4 ;

2° P_2, P'_2 plan perpendiculaire au plan bissecteur des dièdres 1 et 3 ;

3° (P_3, P'_3), (a, a'), plan bissecteur des dièdres 2 et 4 : déterminé par la ligne de terre et par le point a, a' ;

4° (P_4, P'_4), (a, a'), plan bissecteur des dièdres 1 et 3 : déterminé par la ligne de terre, et par un point a, a', dont la cote est égale à l'éloignement ;

5° P_5, P'_5, plan parallèle au plan bissecteur des dièdres 1 et 3 ;

6° P_6, P'_6, plan parallèle au plan bissecteur des dièdres 2 et 4 ;

7° P_7, P'_7, plan de profil.

199. Problème VIII. — *Par un point donné a, a' conduire une droite qui fasse, avec les deux plans de projection, le même angle donné α* (*fig.* 186, pl. XII). —Observez, d'après les conclusions du paragraphe **196**, que les quatre droites qui répondent aux conditions du problème doivent être parallèles deux à deux aux plans bissecteurs des dièdres formés par les plans coordonnés.

Observez encore que, si l'on déplace la ligne de terre parallèlement à elle-même, l'un de ces plans bissecteurs demeurera fixe, tandis que le second se déplacera parallèlement à lui-même, et que, par suite, si vous adoptez une nouvelle ligne de terre x_1y_1 parallèle à l'ancienne passant par le point milieu a_1 de la distance $a'a$, le point a, a' se trouvera sur le plan bissecteur déplacé, et, par conséquent, deux des solutions du problème seront alors dans le plan bissecteur des dièdres 1 et 3 du nouveau système de plans coordonnés.

Pour obtenir ces deux droites, amenez-les, par une rotation autour de la verticale du point a, a', dans le plan de front de ce point : leur projection verticale sera formée par l'une des droites $a'\theta'_1$ conduite par a' et inclinée sur la ligne de terre x_1y_1 de l'angle α donné ; quant à la projection horizontale, ce sera la parallèle $a\theta_1$ à la ligne de terre menée par le point a.

Actuellement ramenez la droite $a'\theta'_1$, $a\theta_1$ sur sa position naturelle, en la faisant tourner autour de la verticale du point a, a' : dans ce mouvement, la trace horizontale θ_1 décrit, sur le plan horizontal de projection, un arc de cercle de centre a et de rayon $a\theta_1$, et, attendu que les droites cherchées se trouvent sur le nouveau plan bissecteur des dièdres 1 et 3, ce point viendra s'arrêter sur la ligne de terre x_1y_1 soit en t_1, t'_1, soit en t_2, t'_2 ; alors, en tirant les projections des droites qui vont du point a,a' aux traces que nous venons de retrouver, on obtient les deux premières solutions $(at_1, a't'_1)$, $(at_2, a't'_2)$ rapportées au nouveau système de plans coordonnés, lesquelles se conservent quand on revient aux plans de projection primitifs. Quant aux deux autres droites cherchées elles sont données, par suite de la symétrie des quatre solutions par rapport au plan de front du point a, a' (§ **190**), par les droites projetées en $(at_1, a't'_2)$ $(at_2, a't'_1)$.

Discussion. — Pour que le problème offre quatre solutions il faut et il suffit que la ligne de terre x_1y_1 coupe le cercle décrit par le point θ_1, c'est-à-dire que la distance aa_1 soit inférieure au rayon $a\theta_1$ de ce cercle, et comme $aa_1 = a_1a'$, et que $a\theta_1 = a_1\theta'_1$, la condition se réduit à $a'a_1 < a_1\theta'_1$,

ou à $\alpha < \frac{\pi}{4}$; si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ la droite et le cercle seront tangents et le problème offrira deux solutions, lesquelles seront données par des droites de profil; enfin, si $\alpha > \frac{\pi}{4}$, le problème sera impossible.

200. Problème IX. — *Construire directement, par un point donné a, a', un plan qui fasse, avec les deux plans de projection, un même angle donné α.*

Première-solution (*fig.* 187, pl. XII). — En changeant les deux plans coordonnés, transportez la ligne de terre parallèlement à elle-même et faites la passer au point a; soit x_1y_1 cette ligne déplacée, à laquelle correspond un plan vertical contenant le point donné a, a'. Cela fait amenez dans un plan de front, par une rotation autour de la verticale du point a, a', la ligne de plus grande pente du plan cherché conduite par ce point, et prise par rapport au plan horizontal : dans sa nouvelle position, cette ligne aura pour projection horizontale la ligne de terre, x_1y_1 et pour projection verticale une droite $a't_1$ faisant, avec la ligne de terre, l'angle α donné. En ramenant cette ligne de plus grande pente à sa position naturelle la trace t_1 décrit, sur le plan horizontal, un cercle de centre a dont le rayon est égal à t_1a, et qui doit être tangent à la trace horizontale du plan inconnu ; par raison de symétrie, la trace verticale de ces plans sera également tangente à la même circonférence, et comme cette dernière doit passer par le point a', on l'obtient en menant par a' les tangentes P'_1, R'_1, à la circonférence figurée sur notre épure, par leurs rencontres β, γ avec x_1y_1, ces lignes donnent des points placés sur les traces horizontales cherchées, conséquemment, les quatre tangentes menées de ces deux points, à la circonférence que vous venez de construire, déterminent les traces horizontales P_1, R_1, S_1, Q_1, des plans $P_1\beta P'_1$, $Q_1\beta P'_1$, $R_1\gamma R'_1$, $S_1\gamma R'_1$ répondant à la question.

Pour revenir au système primitif de plans coordonnés, observez que, dans tout déplacement de la ligne de terre parallèlement à elle-même, les projections des points et des droites se conservent, mais que les traces des plans se déplacent aussi parallèlement à elles-mêmes; par conséquent, la trace P'_1 conservera ses projections qui sont sur le plan vertical P'_1, et, sur le plan horizontal, la ligne de terre x_1y_1, d'où vous déduirez, en prenant la trace horizontale t de cette ligne, l'un des points de la trace horizontale cherchée ainsi que les traces (P, P'), (Q, Q') des deux premières solutions, ensuite, par un tracé absolument semblable au précédent, vous trouverez d'abord le point θ, θ', puis les traces (R, R'), (S, S') des deux derniers plans répondant aux conditions du problème.

201. Deuxième solution (*fig.* 188, pl. XII).—Tout plan qui fait, avec les plans de projection, des angles égaux, est perpendiculaire à l'un des plans bissecteurs des dièdres formés par les plans coordonnés (§ **197** et **48**); donc, en abaissant du point a, a' des perpendiculaires sur ces plans bissecteurs, vous aurez deux droites par lesquelles passent les deux couples de plans qui répondent aux conditions du problème; pour construire ces deux perpendiculaires, observez qu'elles sont dans le plan de profil du point donné a, a', et qu'elles font avec les plans de projection des angles égaux à $\frac{\pi}{4}$, que, par suite, leurs traces, sur le plan horizontal de projection, seront données en prenant, de part et d'autre du point a, sur les verticales de ce point, des longueurs at, $a\theta$ égales à la cote $a'\omega$ du point a, a'.

Dès lors, il est manifeste que ces points t, θ appartiendront aux traces horizontales des plans cherchés. Maintenant, afin d'obtenir ces traces, rendons parallèles au plan vertical les quatre lignes de plus grande pente par rapport au plan horizontal de projection des plans cherchés à l'aide d'une rota-

tion effectuée autour de la verticale du point a, a'; dans cette nouvelle position, on obtient pour ces lignes une seule droite dont la projection horizontale est parallèle à la ligne de terre et passe par a, et dont la projection verticale passe par a' et fait, avec xy, l'angle donné α. Cela fait, construisez la trace horizontale h de la ligne de plus grande pente déplacée, et remarquez que les traces horizontales des plans cherchés doivent être tangentes au cercle de centre a et de rayon égal à ah; si donc, après avoir décrit ce cercle, vous lui menez deux couples de tangentes issues des points t, θ, vous aurez les traces P, R, Q, S, cherchées. Quant aux traces sur le plan vertical de projection, vous les trouverez fort simplement, attendu que : 1° pour les plans que donne le point t, lesquels sont, d'après la propriété précitée, perpendiculaires au plan bissecteur des dièdres 1 et 3, ce sont les droites P′, R′ symétriques de P et de R par rapport à la ligne de terre (§ 48) ; 2° pour le point θ, qui correspond à deux plans perpendiculaires au plan bissecteur des dièdres 2 et 4, ces traces doivent se placer sur les premières prolongées, en S′, Q′.

202. Problème X. — *Construire la plus courte distance de deux droites dont les projections horizontales sont parallèles* (*fig.* 189, pl. XII). Soient (d, d'), (d_1, d'_1) les projections des droites données.

Pour trouver la direction de la ligne cherchée considérez le plan vertical projetant de l'une des droites données; il est parallèle à ces deux droites, par conséquent la plus courte distance lui est perpendiculaire, la direction cherchée est donc fournie par une droite non tracée sur l'épure, mais dont la projection horizontale serait perpendiculaire à d et dont la seconde projection offrirait une direction parallèle à la ligne de terre.

La direction de la plus courte distance étant ainsi connue, il reste à trouver un point de cette ligne ; pour cet effet observez que les projections horizontales d'une horizontale mobile rencontrant les droites données rayonnent autour d'un point; en effet, considérez ces droites mobiles comme situées dans des plans parallèles ; ces plans, aussi bien que les droites qu'ils contiennent, diviseront les droites données en segments proportionnels; par suite, les projections horizontales des droites mobiles diviseront à leur tour les lignes parallèles d, d_1 proportionnellement, elles seront donc concourantes.

Cette propriété se démontre plus simplement en remarquant que les projections des horizontales mobiles donnent sur les droites d, d_1 deux divisions homographiques ayant à l'infini un point commun, que, par suite, les droites joignant les points homologues, c'est-à-dire les projections de la droite mobile concourent en un seul point. Ce point de concours appartient à la ligne cherchée, car cette ligne fait partie du système des horizontales qui s'appuient sur les droites données ; pour l'obtenir nous tracerons deux des rayons du faisceau considéré. En vue de ce but coupons d'abord les droites données (d, d'), (d_1, d'_1) par le plan horizontal de projection, qui détermine les deux traces θ, θ_1, la droite de jonction de ces points donne l'un des rayons $\theta\theta_1$ du faisceau; quant au second rayon, on observera que la perpendiculaire au plan vertical passant au croisement des droites d', d'_1 fait partie du système des horizontales et que, par suite, sa projection horizontale ab n'est autre que le rayon demandé. Par la rencontre s des deux rayons on a la projection horizontale de l'un des points de la plus courte distance et la perpendiculaire aux droites d, d_1 menée de ce point fournit la projection horizontale pp_1 de la commune perpendiculaire, des lignes de rappel déterminent les projections verticales p', p'_1 des extrémités de cette ligne, en tirant alors la droite $p'p'_1$, vous aurez cette projection verticale et l'épure sera soumise à cette vérification que les points p', p'_1 devront appartenir à une parallèle à xy; ajoutons que la droite pp_1 sera la commune perpendiculaire en véritable grandeur.

203. Problème XI. — *Déduire de l'épure précédente la construction de la plus courte distance de deux droites quelconques.* — Soient (d, d'), (δ, δ') les droites données (*fig.* 190, pl. XIII).

Rendons parallèles, par le procédé déjà expliqué (§159), les projections verticales des droites D, Δ : la parallèle δ_1, δ'_1 à δ, δ', menée par le point a, a', de cette dernière dont la projection verticale se fait au croisement a' des droites d', δ', détermine avec d, d' un plan perpendiculaire au nouveau plan vertical, dont la trace horizontale $t\theta$ est, par suite, perpendiculaire à la ligne de terre inconnue, et permet de construire cette ligne en x_1y_1; alors, projetant, par la méthode maintes fois expliquée, θ, h en θ'_1, h'_1 sur le nouveau plan vertical et a, a' en a'_1 sur ce même plan, tirent la droite $\theta'_1a'_1$ et sa parallèle δ'_1 menée par h'_1, on a, en (d, d'_1) (δ, δ'_1), les droites données rapportées au nouveau système. On retombe ainsi sur la précédente épure dont le lecteur suivra facilement le tracé reproduit sur l'épure actuelle en substituant simplement, pour plus de commodité, au premier rayon du faisceau obtenu dans l'épure précédente par les traces des droites données, la projection verticale $h'_1f'_1$ de la ligne de front située dans le plan hf et rencontrant les droites données. On trouve ainsi la vraie grandeur $p'_1q'_1$ de la commune perpendiculaire et ses projections $pq, p'q'$ sur les plans coordonnés primitifs.

204. Problème XII. — *Les projections d'une ligne droite et la projection horizontale d'une autre droite, parallèle à la première, étant données, construire la projection verticale de la seconde droite, la distance des deux parallèles étant également connue.* — Soient d, d' les projections de la droite donnée (*fig.* 191, pl. XIII), δ la projection horizontale de la droite inconnue et l la distance des deux parallèles (on a supprimé la ligne de terre). Que l'on prenne un cercle décrit dans un plan perpendiculaire à d, d', du pied de cette droite comme centre avec un rayon égal a l, et que l'on cherche la rencontre du plan vertical projetant de la seconde droite et de ce cercle, on aura des points de la droite inconnue ; menant ensuite de ces points des parallèles à la droite donnée on trouvera deux droites répondant aux conditions du problème.

Cela dit, passons à l'exécution du tracé en adoptant un système auxiliaire de plans de projection formé: 1° par le plan horizontal H' qui passe au point b, b' pris arbitrairement sur la droite d, d', et, 2° par le plan vertical projetant de cette droite. La ligne de terre nouvelle x_1y_1 se confond avec d, le point b, b' a ses deux projections confondues en b, le point a, a' se projette sur le nouveau plan vertical au point a'_1 que l'on obtient en reportant la cote $\alpha a'$ en aa'_1, la nouvelle projection verticale de la droite d, d' se trouve en ba'_1 et les traces du plan mené par B perpendiculairement à la droite D sont en PbP'.

Actuellement, pour obtenir l'intersection du cercle auxiliaire que nous tracerons dans le plan PbP'$_1$ et du plan vertical Q projetant de Δ, rabattons le plan PbP'$_1$ et le cercle qu'il contient sur le nouveau plan horizontal ; le cercle rabattu sera simplement donné en décrivant la circonférence de cercle de centre b et de rayon égal à l, et comme, d'autre part, les divers points du plan vertical Q se rabattent sur la trace horizontale de ce plan, on aura aux points de croisement E$_1$, F$_1$ de cette trace Q et du cercle rabattu les rabattements cherchés, ces points se projettent verticalement après le rabattement en e'_2, f'_2 et viennent, lorsqu'ils sont relevés, en (e'_1, e), (f'_1, f) ; on revient aux plans primitifs coordonnés en reportant les distances $\varepsilon_1e'_1, \varphi_1f'_1$ en $\varepsilon e', \varphi f$ de part et d'autre de H'. Menons alors, par les points e', f', des parallèles δ'_1, δ'_2 à d' et nous aurons enfin les deux droites (δ, δ'_1), (δ, δ'_2) répondant à l'énoncé du problème.

205. Problème XIII. — *Trouver directement l'angle d'un plan dont les traces sont en ligne droite et d'une droite dont les projections se confondent sur les traces de ce plan.* — Soient (*fig.* 192, pl. XIII) PαP' les traces confondues du plan; $ab, a'b'$ les projections de la droite.

Observons que la droite donnée est dans le plan bissecteur du deuxième et du quatrième dièdre, que le plan $P\alpha P'$ se trouve précisément dans une position perpendiculaire à ce plan bissecteur, et que, par suite, l'intersection du plan bissecteur et du plan $P\alpha P'$ n'est autre que la projection, sur ce dernier, de la droite donnée.

Cela dit, le problème est réduit à celui de la recherche de l'angle de deux droites dont l'une ab, $a'b'$ est donnée, et dont on trouve facilement deux points de la seconde en prenant d'abord α, ensuite la rencontre n, n' du plan bissecteur avec une horizontale quelconque h, h' du plan donné (§ 31).

Dans le cas particulier qui nous occupe, les droites dont on cherche l'angle appartenant au plan bissecteur du deuxième et du quatrième dièdre, donneront la solution du problème après qu'on les aura rabattues, avec ce plan bissecteur, autour de la ligne de terre prise comme charnière et sur le plan vertical de projection, par exemple.

Pour plus de simplicité dans le tracé, construisons le rabattement de la droite mn, $m'n'$: le point m, m' vient en M_1 sur la droite mv, à une distance de v égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle ayant l'un de ses côtés de l'angle droit en mv, et dont le rabattement, autour de ce côté, est figuré en $vm\mu$; le rabattement de la droite mn, $m'n'$ s'obtient en conduisant par M_1 une parallèle à la ligne de terre, et, par la rencontre de cette parallèle avec la droite de jonction du point n, n' au centre d'affinité, on trouve le rabattement N_1 du point n, n' ; d'un autre côté, α ne bougeant pas, on en déduit que les côtés rabattus de l'angle s'obtiennent en tirant les droites $M_1\alpha$, $N_1\alpha$, et que leur écartement angulaire β donne enfin la solution du problème.

206. Problème XIV. — *Trouver directement l'angle d'une droite de profil ab, a'b' et d'un plan déterminé par la ligne de terre et par un de ses points o, o'* (*fig.* 193, pl. XIII). — Nous chercherons tout d'abord, appliquant le principe de la solution du problème précédent, la rencontre du plan donné et du plan de profil conduit par ab, $a'b'$: α en est un point ; la rencontre ω, ω' de la droite de jonction du point o, o' au point c, pris arbitrairement sur la ligne de terre, en donne un second ; puis, rabattant les droites $(ab, a'b')$, $(\alpha\omega, \alpha'\omega')$ sur le plan horizontal, autour de la trace αb prise comme charnière, en A_1B_1, $\alpha\Omega_1$, nous trouvons l'angle β qu'il s'agissait de construire.

207. Problème XV. — *Trouver l'angle d'une droite de profil ab, a'b' et d'un plan quelconque* $P\alpha P'$ (*fig.* 194, pl. XIII). — Appliquez la méthode générale en rabattant autour de l'horizontale $a'm'$, am, prise comme charnière ; le plan conduit par la droite donnée ab, $a'b'$ et par la perpendiculaire bc, $b'c'$ abaissée du point b, b' sur $P\alpha P'$; vous trouverez ainsi deux droites aA_2, mA_2 qui comprendront le complément de l'angle cherché, et, par la perpendiculaire à aA_2 menée du point A_2, vous aurez enfin l'angle β de la droite et du plan.

208. Problème XVI.—*Construire la distance d'un point quelconque o, o' à une droite de profil ab, a'b'* (*fig.* 195, pl. XIII). — Le tracé général est en défaut dans ce cas particulier, car l'horizontale et la ligne de front menées par le point o, o' dans le plan perpendiculaire à ab, $a'b'$, qui passe par ce même point, se confondent.

Pour résoudre la question, par o, o' conduisons une perpendiculaire $o\omega$, $o'\omega'$ sur le plan de profil qui contient la droite donnée ; du pied ω, ω' de cette perpendiculaire menons une perpendiculaire sur ab, $a'b'$ dont le pied rabattu est en P_1, point qui se relève en p, p' ; la droite de jonction des points (o, o'), (p, p') n'est autre, d'après le théorème des trois perpendiculaires, que la droite cherchée ; pour obtenir la vraie grandeur de cette ligne, on peut la rendre, à l'aide d'une rotation autour de

la perpendiculaire au plan vertical passant par o, o', parallèle au plan horizontal, en op_2, ou, encore, construire la vraie grandeur du triangle rectangle de l'espace $o\omega p, o'\omega' p'$ en reportant ωo en P_1O_1 et en tirant la droite $O_1\Omega_1$ qui est la vraie grandeur cherchée.

209. Problème XVII. — *Construire, par la méthode des rabattements, la distance d'un point o, o' à une droite d, d' (fig. 196, pl. XIII).* — Traçons par le point o, o' une horizontale $o'a'$, oa, du plan conduit par la droite d, d' et par le point o, o', et rabattons ce plan autour de cette horizontale; un point quelconque b, b', pris arbitrairement sur d, d', vient en B_2; les points (a, a'), (o, o') ne bougeant pas, aB_2 est le rabattement de la droite donnée, et celui de la perpendiculaire cherchée s'obtient en conduisant par o la perpendiculaire P_1 à la droite aB_2. Le point P_1 se relève en p, p', et, après avoir tiré les droites op, $o'p'$, on a : en oP_1 la vraie grandeur de la perpendiculaire répondant aux conditions du problème, en op, $o'p'$ les projections de cette ligne dans sa position naturelle.

210. Problème XVIII. — *On propose de construire les traces d'un plan conduit par une ligne de front et placé à une distance connue d'un point donné* (à résoudre).

211. Problème XIX. — *Construire quatre plans parallèles équidistants, connaissant un point de chacun d'eux.* — Soient A, B, C, D les points donnés et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (fig. a_4) les plans cherchés; considérons une des droites de jonction des points donnés pris deux à deux, soit AD, par exemple; les plans β, γ doivent

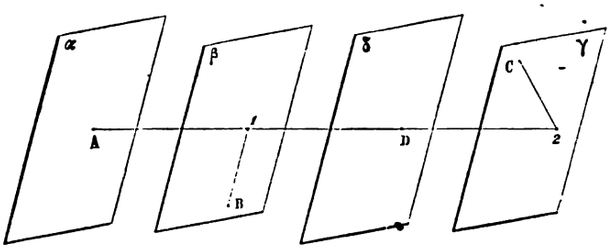


Fig. a_4.

la diviser aux points 1 et 2, en segments additifs ou soustractifs égaux entre eux. Ces points sont donc faciles à déterminer; on en déduit les droites C2, B1 qui doivent être parallèles aux plans cherchés; ces plans seront alors déterminés en conduisant par les points donnés des plans parallèles aux deux droites C2, B1.

Examinons maintenant les diverses positions que peuvent occuper les points 1 et 2 par rapport à A, D.

Plaçons-les d'abord à l'intérieur du segment AD, nous aurons les deux figures a_5, a_6 qui suivent :

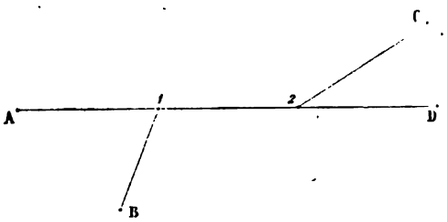


Fig. a_5.

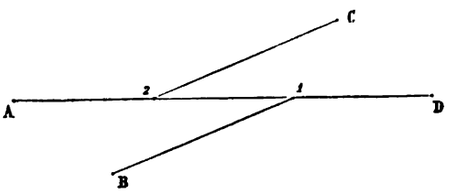


Fig. a_6.

En les plaçant l'un à l'intérieur du segment AD et l'autre à l'extérieur et à la droite de AD, nous trouvons les deux nouvelles figures qui suivent :

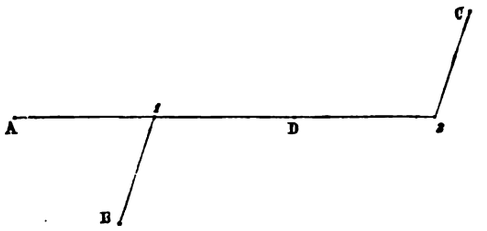


FIG. a_7.

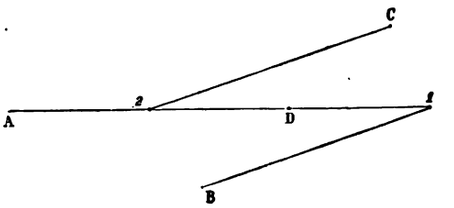


FIG. a_8.

Plaçons les points de division à l'extérieur et à la droite de AD, nous trouvons les combinaisons figurées ci-dessous :

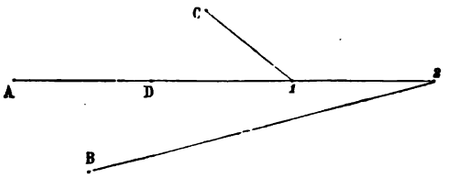


FIG. a_9.

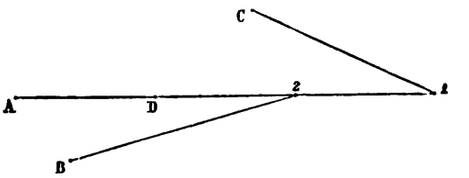


FIG. a_{10}.

Supposant l'un des points de division à l'intérieur et l'autre à l'extérieur et à la gauche du segment, on trouve encore deux combinaisons figurées ci-dessous :

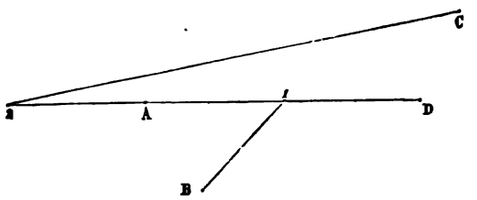


FIG. b_1.

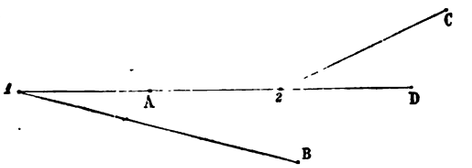


FIG. b_2.

Enfin, en plaçant les deux points de division à la gauche et extérieurement au segment AB, on obtiendrait deux dernières dispositions, soit en tout dix solutions relatives à la jonction de deux des points, et comme les quatre points donnés produisent lorsqu'on les joint deux à deux un nombre de droites égal à

$$C_4^2 = \frac{4.3}{2} = 6,$$

le problème offre 60 solutions.

La figure 197, pl. XIII, donne, pour une solution, quatre plans déterminés chacun par un couple de droites parallèles.

212. Problème XX. — *Étant données les traces horizontales de deux plans, faisant entre eux un angle donné, et la projection horizontale de leur commune intersection, trouver leurs traces verticales.* — Exécutez, en intervertissant l'ordre des constructions, l'épure donnant l'angle de deux plans.

213. Problème XXI. — *Par une droite située dans un plan donné, conduire un plan faisant avec le premier un angle donné* (à résoudre).

214. Problème XXII. — *Étant données les deux projections d, d' d'une droite, la projection horizontale δ d'une seconde droite, et celle ab de la plus courte distance entre* D *et* Δ, *trouver les projections verticales des droites* AB, Δ, *et la vraie grandeur de leur plus courte distance* (*fig.* 198, pl. XIII). — Adoptons pour nouveau plan vertical de projection celui qui projette D sur le plan horizontal; en conservant ce dernier plan coordonné, la ligne de terre nouvelle x_1y_1 se confond avec d; nous savons construire les projections d'_1, a'_1 sur le nouveau plan vertical de la droite D et du point A; quant à la plus courte distance, elle s'y projettera, d'après un théorème bien connu du lecteur (§ 42), suivant une perpendiculaire à d'_1 menée par la projection a'_1 du point A, et se limitera, d'une part, au point a'_1; de l'autre, à la rencontre b'_1 de la projection qui vient d'être construite et de la ligne de rappel perpendiculaire à x_1y_1 menée par b. La commune perpendiculaire est donc, dans le système nouveau des plans coordonnés, déterminée par ses projections ab, $a'_1b'_1$, et rien de plus facile que de revenir au système primitif, dans lequel la perpendiculaire commune se projette en ab, $a'b'$; la vraie grandeur de cette ligne, que nous n'avons point figurée sur l'épure, se ferait également avec la plus grande facilité.

Il reste alors à construire δ'; pour le faire adoptons un troisième plan vertical parallèle à celui qui passe par Δ, la nouvelle ligne de terre x_2y_2 est alors parallèle à δ; on construit aisément la projection nouvelle $a'_2b'_2$ de la commune perpendiculaire, et celle de Δ qui se trouve être, d'après le théorème cité à l'alinéa précédent, placée sur la perpendiculaire δ'_2 à $a'_2\,b'_2$ qui passe par b'_2; la trace horizontale de δ, δ'_2 se fait en t'_2, t dans le système de projection actuellement employé, et sa projection t' sur l'ancien plan vertical permet de tracer la droite δ', ce qui achève la résolution de la question.

215. Problème XXIII. — *Étant données les projections d'une droite* D, *la projection horizontale d'une seconde droite* Δ, *la vraie grandeur de la plus courte distance entre* D *et* Δ, *ainsi que les projections du point où elle rencontre la droite* D, *trouver la projection verticale de la droite* Δ, *et les deux projections de la plus courte distance* (à résoudre).

216. Problème XXIV. — *Étant donné un plan* PβP$'$, *conduire dans ce plan et par un de ses points* A, *une droite qui fasse avec la direction de la ligne de terre un angle* α *donné* (*fig.* 199, pl. XIII). — Le point A, étant donné dans le plan PβP$'$, sera déterminé par l'une de ses projections, sa projection verticale a', par exemple.

Construisons tout d'abord la parallèle à la droite inconnue qui passe au point β; pour le faire mettons en évidence l'angle α formé par cette parallèle avec la ligne de terre, en la faisant tourner autour de xy, afin de la rabattre sur le plan vertical suivant une droite d'_1 inclinée de α sur la ligne de terre et passant par β.

Il faut maintenant relever un point de la droite d'_1; à cet effet coupons le plan PβP$'$ et les diverses positions que prend la droite mobile, par un plan de profil quelconque RγR$'$ qui détermine : sur le plan PβP$'$, la droite dont les traces sont en t', θ; sur la droite mobile, des points placés à la circonférence d'un cercle de centre γ et de rayon égal à $\gamma m'$. Par la rencontre de cette droite et de ce cercle on trouvera le point cherché.

Afin d'obtenir cette rencontre rabattons autour de γR, d'abord le cercle auxiliaire en décrivant du point γ comme centre, avec un rayon égal à $\gamma m'$, une circonférence de cercle; puis l'intersection des plans, en joignant, après avoir rabattu t en t'_1, ce dernier point à θ par une ligne droite; les points de croisement B_1, B_2 de ces lignes donnent les rabattements de deux points répondant à la question.

Occupons-nous du point B_1 et abandonnons la solution qui se rapporte à B_2, dont la construction serait identique à celle que nous allons indiquer; relevons B_1 en b, b' et tirons les droites βb, $\beta b'$; nous aurons ainsi une parallèle à la droite inconnue ; menant alors par a' une parallèle à $\beta b'$, nous trouverons la projection verticale δ' d'une droite répondant à l'énoncé du problème. Pour construire sa projection horizontale, observons que la droite cherchée étant au plan $P\beta P'$ aura sa trace verticale en v', v, et que, par conséquent, la parallèle à d menée par v fournira en δ cette projection horizontale.

217. Problème XXV. — *Connaissant l'une des projections d'une droite, les deux projections de l'un de ses points et l'angle qu'elle doit faire avec un plan, on demande de construire la seconde projection de cette droite* (à résoudre).

218. Problème XXVI. — *Construire la distance d'un point o, o' à une droite de front d, d'* (*fig.* 200, pl. XIII). — On abaisse directement du point o, o' donné la perpendiculaire $o'p'$, op sur la droite (§ **42**), et l'on en construit la vraie grandeur o'_1p' par la méthode connue (§ **175**).

219. Problème XXVII.—*Construire les traces d'un plan incliné de 45 degrés sur l'horizon, connaissant : 1° la projection verticale $a'b'$ de l'une de ses lignes de front, et 2° la projection c', sur le même plan coordonné, d'un des points du plan inconnu dont l'éloignement est double de celui de la droite* AB. — La solution se trouve suffisamment indiquée par la *fig.* 201, pl. XIV.

220. Problème XXVIII. — *Construire l'angle de deux plans* (P, P')(Q, Q') *et les traces du plan bissecteur de l'un des dièdres qu'ils forment, dans les cas particuliers suivants :*

1° *Les traces verticales sont parallèles* (*fig.* 202, pl. XIV). — L'intersection des plans est une ligne de front projetée verticalement en $h'f'$; en coupant les plans donnés par un plan perpendiculaire à cette droite, puis en rabattant les intersections, on trouve l'angle demandé $a'h_1b'$, et les traces B', B du plan bissecteur.

2° *Les deux plans donnés ont même trace horizontale* (*fig.* 203, pl. XIV). — Cette trace horizontale est alors la commune intersection des deux plans, et l'on obtient sans difficulté le rabattement $a'h_1b'$ de l'angle en véritable grandeur, ainsi que les traces B, B' du plan bissecteur.

3° *Les plans donnés sont parallèles à la ligne de terre* (*fig.* 204, pl. XIV). — La commune intersection étant parallèle à la ligne de terre, on aura l'angle cherché en rabattant sur le plan horizontal les intersections des plans donnés avec un plan auxiliaire de profil : sur notre épure, l'inclinaison des droites $V'h$, V'_1h_1 est égale à celle des plans et les traces du plan bissecteur sont en B, B'.

4° *Le premier plan est perpendiculaire à la ligne de terre et le second quelconque* (*fig.* 205, pl. XIV). — Par l'application de la méthode générale, on trouve le rectiligne de l'angle cherché en $aS\alpha$ et les traces B, B' du plan bissecteur.

5° *L'un des plans donnés est quelconque, l'autre passe par la ligne de terre et par un point connu* (*fig.* 206, pl. XIV). — Soient $P\alpha P'$ les traces du premier plan et o, o' le point qu'on doit adjoindre à la ligne de terre pour déterminer le second.

Le point α appartient à la commune intersection des plans donnés ; d'un autre côté, le plan horizontal conduit par o, o' détermine un second point a, a' de cette ligne ; la projection horizontale de l'intersection se fait donc en αa; en menant alors une perpendiculaire hh_1 à αa, on a la trace horizontale du plan déterminant le rectiligne du dièdre inconnu.

Après avoir rabattu en αA_1 l'intersection des plans, on obtient la hauteur θS_1 du triangle donnant l'angle demandé, d'où l'on déduit le rabattement hS_2h_1 de ce triangle, et alors l'angle de même nom

n'est autre que le rectiligne cherché. Lorsqu'on aura tracé la bissectrice $S_2\beta$ de cet angle, le plan bissecteur sera déterminé par les points α, (a, a'), β, et l'on en construira les traces B, B' à l'aide de l'horizontale av, $a'v'$.

6° *Les plans ont leurs traces en ligne droite* (*fig.* 207, pl. XIV). — Les deux plans donnés (P, P'), (Q, Q') sont alors perpendiculaires au plan bissecteur des dièdres 2 et 4 (§ **46**); coupons-les donc par ce plan bissecteur, qui détermine d'abord sur les plans donnés deux points de rencontre en α, β, puis sur l'arête du dièdre le sommet de l'angle dont les projections sur les deux plans coordonnés tombent au milieu s, s' de la droite vh, $v'h'$ et qui se rabat autour de $\alpha\beta$ en S_1. Le rectiligne rabattu en vraie grandeur est donc en $\alpha S_1\beta$, et les traces du plan bissecteur se trouvent confondues en B, B'.

7° *Les traces de noms différents se confondent sur l'épure* (§ **91**) (à résoudre).

221. Problème XXIX. — *Construire, par un point donné, un plan également incliné sur les deux plans coordonnés et dont les traces forment, dans l'espace, un angle donné* (à résoudre).

222. Problème XXX. — *Connaissant la vraie grandeur d'un angle, les deux projections de l'un de ses côtés et la projection horizontale de l'autre côté, construire la projection verticale de ce dernier côté.* — Soient d, d' (*fig.* 208, pl. XIV) les deux projections de l'un des côtés, δ la projection horizontale du second côté et α la véritable grandeur de l'angle.

Le second côté, dont la recherche fait l'objet du présent problème, se trouve être à la fois placé sur le plan vertical projetant de ce côté, plan que la droite δ détermine, et sur un cône de révolution, également connu, qui aurait pour axe la droite d, d', pour sommet s, s', et dans lequel le demi-angle au sommet vaudrait l'angle α donné; tout se réduit donc à la détermination de l'intersection du cône et du plan. Pour l'obtenir, changeons de plan vertical en plaçant la ligne de terre sur d; alors la droite donnée d, d' se projette, dans le nouveau système, en d, d'_1, elle appartient au nouveau plan vertical et les deux génératrices du cône situées dans ce plan font avec elle l'angle α donné; on peut donc facilement tracer l'une d'elles $S'_1g'_1$. Conduisons, par la trace horizontale h de la droite d, d'_1, un plan P_1, P'_1 perpendiculaire à cette droite, et cherchons ses intersections avec le cône et avec le plan vertical conduit par δ; la première est un cercle de centre h et de rayon égal à hb'_1; la seconde est une droite placée au croisement de deux plans, dont l'un P, P'_1 est perpendiculaire au nouveau plan vertical, tandis que le second est perpendiculaire au plan horizontal et passe par δ; il en résulte que les projections de cette droite ne sont autres que δ, P'_1.

Il faut actuellement chercher la rencontre de la droite et du cercle en rabattant ces deux lignes autour de hP_1, prise pour charnière, et sur le plan horizontal; le cercle rabattu est donné par celui que nous avons tracé sur l'épure en prenant h pour centre et hb'_1 pour rayon; quant à la droite, sa trace horizonale θ ne bouge pas, et en prenant l'un quelconque de ses points a, a'_1, on en construit facilement le rabattement A_1, d'où l'on déduit celui θA_1 de la droite elle-même; M_1 est le rabattement de l'un des points de croisement cherchés (on a négligé d'employer le second point de rencontre donnant une autre solution du problème).

Le point M_1 se relève sans difficulté et ses projections sont, dans le nouveau système, m, m'_1, et dans l'ancien, les points m, m' que l'on obtient par un changement de plan exécuté sur m, m'_1. La droite de jonction des points s', m' fournit la projection verticale δ' du second côté de l'angle, et la question se trouve ainsi résolue.

223. Problème XXXI. — *Construire l'angle de deux droites à projections de noms différents confondues* (*fig.* 209, pl. XIV). — Soient (d, d') (δ, δ') les droites données. On a recours, pour obtenir l'angle

qu'elles font entre elles, à la méthode générale, qui consiste à les rabattre sur le plan horizontal en adoptant pour charnière la trace horizontale θt du plan qu'elles déterminent; ce que l'on fait en remarquant simplement que le sommet de l'angle s, s', placé sur le plan bissecteur des dièdres 2 et 4, se rabat en S_2 et donne l'angle $\theta S_2 t$ qu'il fallait construire.

224. Problème XXXII. — *Une droite est donnée par ses deux projections qui se rencontrent en un même point de la ligne de terre ; mener par la droite un plan tel, que ses deux traces, étant relevées, forment un angle bissecté par la droite donnée* (*fig.* 210, pl. XIV). — Soient d, d' les projections de la droite donnée et α leur point de croisement sur xy.

Cherchons à déterminer la perpendiculaire à la droite donnée menée, dans le plan cherché, par un point arbitrairement choisi sur cette droite ; cette ligne doit appartenir à un plan quelconque perpendiculaire à d, d', dont on sait construire les traces $R\beta R'$; il faut, en outre, qu'elle passe par la rencontre m, m' du plan $R\beta R'$ et de la droite donnée, que l'on a construite en recourant au plan $Q\alpha Q'$; enfin la portion de la perpendiculaire cherchée comprise entre ses traces doit être divisée en deux parties égales au point m, m' ; et comme le rapport des segments d'une droite est projectif lorsque le centre de projection est à l'infini, la projection verticale de la portion de la perpendiculaire que nous considérons est un segment de droite inscrit dans l'angle $R'\beta x$, passant par m' et divisé en ce point en deux parties égales. D'après un problème de géométrie, on sait que cette droite s'obtient en conduisant par m' une parallèle $m'a'$ à la ligne de terre, en reportant $a'\beta$ en $a't'$ et en joignant t', m' par une droite que l'on prolonge jusqu'au point θ' ; ayant ainsi trouvé la projection verticale $\theta' t'$ de la perpendiculaire, on construit sa trace horizontale θ et, joignant le point α aux points θ, t' par deux droites, on obtient les traces $P\alpha P'$ du plan cherché.

225. Problème XXXIII.—*Mener par trois points donnés* A, B, C *trois plans parallèles à une même droite* D, *et tels, que les deux premiers forment entre eux un angle donné* φ *bissecté par le troisième* (*fig.* 211, pl. XIV). — Rien n'empêche de supposer que l'on a préalablement exécuté un changement du plan vertical coordonné afin de placer la droite D dans un plan de front. Soient donc x_1y_1 et d, d'_1 la nouvelle ligne de terre et les projections de D dans le nouveau système; supposons également que les points donnés se projettent en (a, a'_1), (b, b'_1), (c, c'_1) dans ce même système; en menant par chacun d'eux une parallèle à d, d'_1 et en prenant les traces de ces trois lignes en $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, on obtient une droite de chaque plan inconnu et un point sur chacune de leurs traces horizontales.

L'intersection des trois plans cherchés sera parallèle à d, d'_1 ; par suite, le plan P, P'_1, conduit perpendiculairement à cette droite, donnera sur ceux que nous cherchons des droites formant les rectilignes des dièdres de ces plans, et dont l'une devra, par conséquent, bissecter l'angle des deux autres; un point de chacune de ces droites est donné par la rencontre des trois parallèles à d, d'_1 et du plan P, P'_1 ; ces points ont leurs projections verticales en $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$, et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, sont leurs rabattements effectués autour de la droite P prise pour charnière et sur le plan horizontal : leurs projections horizontales, inutiles à l'épure actuelle, n'ont pas été tracées.

Il faut actuellement résoudre, pour obtenir le rabattement des rencontres du plan P, P'_1 et des trois plans cherchés, un simple problème de géométrie, en décrivant sur $\alpha_2\beta_2$ un segment capable de φ, en joignant le milieu m de l'arc $\alpha_2\omega\beta_2$ au point γ_2, et en prenant le point de rencontre S de cette ligne avec le segment pour le joindre aux points α_2, β_2 ; l'angle $\alpha_2 S \beta_2$ est égal à φ et se trouve bissecté par la droite $S\gamma_2$; d'où l'on conclut que les trois divergentes du point S sont les rabattements de droites placées respectivement dans les plans cherchés.

En relevant la figure, les points h_1, h_2, h_3 ne bougent pas; conséquemment, les droites de jonction de ces points à $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, qui doivent, si l'épure est exactement faite, concourir en un seul point θ, ne sont autres que les traces horizontales des plans qu'il s'agit de construire. Chacun de ces plans se trouve alors déterminé par deux droites, et rien n'est plus simple que d'obtenir leurs traces sur le plan vertical primitif.

226. Problème XXXIV. — *Construire quatre droites non situées deux à deux dans un même plan, équidistantes et qui offrent une même perpendiculaire commune, connaissant un point de chacune d'elles* A, B, C, D *et un point* O *de leur commune perpendiculaire* (*fig.* 212, pl. XIV). — Soient (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), (o, o') les projections des points donnés (on a supprimé la ligne de terre).

Concevons quatre plans conduits par les droites cherchées, perpendiculairement à la commune perpendiculaire; il est manifeste que ces plans sont parallèles et qu'ils sont équidistants; nous savons donc les déterminer (§ **211**). Nous allons reprendre leur construction en ayant soin d'élaguer les lignes inutiles à l'épure actuelle; en vue de ce but, tirons les projections ad, $a'd'$ de l'une des droites de jonction des points A, B, C, D pris deux à deux et divisons-la en trois parties égales au moyen des points (β, β'), (γ, γ'); alors, en traçant les projections des droites de jonction des deux couples de points (c, c'), (γ, γ') et (b, b'), (β, β'), on obtient deux parallèles $(c\gamma, c'\gamma')$, $(b\beta, b'\beta')$ à la direction générale des quatre plans équidistants, pour l'une des soixante solutions du problème (§ **211**); cette direction est donc maintenant déterminée. On en peut déduire, en lui menant simplement par o, o' une perpendiculaire, la commune perpendiculaire aux quatre droites cherchées. Pour exécuter le tracé de cette perpendiculaire menons par γ, γ' une parallèle $\gamma f, \gamma' f'$ à la droite $\beta b, \beta' b'$, et traçons une horizontale cf, $c'f'$ et une ligne de front $cg, c'g'$ du plan conduit par $(\gamma c, \gamma' c')$, $(\gamma f, \gamma' f')$; puis du point o, o', menons, en traçant les droites op, $o'p'$ respectivement perpendiculaires à cf, $c'g'$, les projections de la commune perpendiculaire.

Cela fait, on obtient un second point de chaque ligne cherchée par la rencontre des quatre plans parallèles et de la perpendiculaire commune op, $o'p'$. Cherchons le point de rencontre de la droite op, $o'p'$ et du plan défini par les divergentes du point γ, γ'; on trouve, en adoptant le plan projetant verticalement OP comme plan auxiliaire, d'abord deux points de l'intersection des plans en (k, k'), (m, m'), et, par suite, la droite $k'm'$, km commune à ces deux plans, laquelle donne le point de rencontre γ_1, γ'_1 de la droite et du plan. En tirant alors les droites $c\gamma_1$, $c'\gamma'_1$ on a l'une des droites demandées.

Une autre droite a été de même obtenue en joignant b, b' au point de rencontre de la droite op, $o'p'$ avec le plan passant par β, β' et parallèle à la direction générale des quatre plans équidistants; à cet effet, on a cherché, sans déterminer autrement ce plan, son intersection avec le plan auxiliaire déjà conduit par $o'p'$, lequel rencontre βb, $\beta' b'$ au point n, n'; en menant de ce point une parallèle à mk, $m'k'$, on obtient sur le plan horizontal nl, qui détermine la projection horizontale β_1 de la rencontre de la droite et du plan; une ligne de rappel donne alors le point β'_1; en tirant ensuite les droites $b\beta_1$, $b'\beta'_1$, on trouve les projections d'une nouvelle droite satisfaisant aux conditions du problème.

Les deux derniers points que nous devons construire sont susceptibles d'un mode de détermination analogue à celui qui vient d'être indiqué pour β_1, β'_1; mais, afin d'obtenir une plus grande simplicité du tracé, observant que les segments interceptés sur op, $o'p'$ par les droites cherchées doivent être par l'énoncé même égaux entre eux, nous avons simplement pris $\beta'_1\alpha'_1 = \delta'_1\gamma'_1 = \gamma'_1\beta'_1$, ce qui nous a donné les points α'_1, δ'_1 que nous cherchions; nous en avons déduit α_1, δ_1.

La résolution du problème s'achève alors en traçant les droites $(a\alpha_1, a'\alpha'_1)$, $(d\delta_1, d'\delta'_1)$.

CHAPITRE VI

PROBLÈMES RELATIFS AUX ANGLES TRIÈDRES

227. Un trièdre a six éléments : les trois faces a, b, c et trois dièdres respectivement opposés à ces faces, A, B, C. On a vu, en géométrie, qu'etrois quelconques de ces éléments étant donnés, on peut toujours déterminer les trois autres.

Le présent chapitre a pour objet la construction des trièdres, c'est-à-dire la détermination graphique des éléments inconnus d'un trièdre, dont trois éléments sont donnés; question qui conduit à chercher la solution des six problèmes distincts suivants :

	Données.	Inconnues.
1°	a, b, c	A, B, C
2°	c, b, A	B, C, a
3°	b, c, C	A, B, a
4°	A, B, c	a, b, C
5°	A, C, c	a, b, B
6°	A, B, C	a, b, c

Les trois derniers cas peuvent se résoudre indirectement au moyen des premiers, en s'appuyant sur les propriétés du trièdre supplémentaire. La géométrie nous apprend, en effet, que les faces du trièdre supplémentaire sont les suppléments des dièdres du trièdre proposé, et que, réciproquement, les dièdres du trièdre supplémentaire sont également les suppléments des faces de l'autre trièdre. Cela posé, que l'on donne, par exemple, les trois dièdres A, B, C d'un trièdre, les faces du trièdre supplémentaire 180 — A, 180 — B, 180 — C seront par là même connues; la construction du trièdre supplémentaire, faite d'après la méthode du premier cas, donnera trois dièdres de ce trièdre; enfin on connaîtra, en prenant leurs suppléments, les faces du trièdre primitif.

Bien que, par l'emploi du trièdre supplémentaire, on eût pu, comme nous venons de le démontrer, se borner à traiter les trois premiers cas, nous allons donner une solution directe des quatre premiers problèmes, nous réservant d'ailleurs de traiter directement, après l'étude des plans tangents, les deux dernières questions.

228. Problème général. — *Déterminer les éléments inconnus d'un trièdre, connaissant une face c, la projection o d'un point de l'arête opposée sur le plan de cette face, et la cote de ce point par rapport au plan de la même face* (*fig.* 213, pl. XV). — Rien n'empêche de supposer, pour la simplification du tracé, que la face donnée soit appliquée sur le plan horizontal. Soient donc ASB la face ainsi placée, o la projection horizontale d'un point de la troisième arête et l la cote de ce point. Pour obtenir les dièdres B, A adoptons deux plans verticaux de projection respectivement perpendiculaires aux arêtes SB, SA et menés par le point o; les deux lignes de terre x_1y_1, x_2y_2 passent par O et sont, à leur tour, respective-

ment perpendiculaires aux mêmes arêtes. Le point O se projette, soit en o, o_1, soit en o, o_2 sur des perpendiculaires aux lignes de terre, et à des distances oo_1, oo_2 de chacune d'elles égales toutes deux à l.

Dès lors les droites de jonction des points (o_1, B), (o_2, A) ne sont autres que les traces des plans des faces BSO, ASO; il faut en conclure que deux des rectilignes cherchés se trouvent en évidence en A_1B_1.

Les rabattements des triangles rectangles de l'espace SAO, SBO sur le plan horizontal, effectués autour des arêtes SA, SB prises comme charnières respectives, font connaître les vraies grandeurs ASo_3, BSo_4 des faces a, b.

Enfin, pour construire le rectiligne du dièdre C, menons un plan perpendiculaire à son arête, dont la trace horizontale pq est une perpendiculaire menée à la projection So de cette arête par un quelconque de ses points. Ce plan détermine sur le trièdre un triangle de section dont pq est un côté et dont les deux autres côtés sont perpendiculaires dans l'espace à l'arête SO, et se trouvent, après les rabattements précédemment effectués des faces SBO, SAO, sur les perpendiculaires $p\Sigma_1$, $q\Sigma_2$ abaissées des extrémités p, q de la base sur la troisième arête dédoublée.

Nous connaissons actuellement les trois côtés pq, $p\Sigma_1$, $q\Sigma_2$ d'un triangle dont l'un des angles n'est autre que le rectiligne qu'il sagit de construire; le rabattement $p\Sigma_3q$ de ce triangle sur le plan horizontal, en prenant pq pour charnière, se construit facilement à l'aide de la vraie grandeur de ses côtés, et l'angle de même nom donne en véritable grandeur le rectiligne C_1 que nous devions construire.

Vérifications. — Notre épure comporte trois vérifications, savoir :

1° Les droites So_3, So_4, qui sont les rabattements d'une même droite SO dédoublée, doivent être égales.

2° Il faut encore, pour le motif précité, que l'on ait $S\Sigma_1 = S\Sigma_2$.

3° Le point Σ_3, rabattement du sommet du rectiligne du dièdre C, doit tomber sur So; effectivement, si l'on projetait sur le plan horizontal le sommet Σ du rectiligne, on trouverait un point de la projection de l'arête SO, ou, en d'autres termes, un point de So; d'autre part, cette droite So est, par construction, perpendiculaire à la charnière pq; et comme les projections d'un point et son rabattement sur le plan de projection considéré sont constamment placés sur une même perpendiculaire à la charnière, on voit que Σ_3 doit bien appartenir à So.

229. Premier cas. — *Connaissant les faces a, b, c d'un angle trièdre, construire les angles plans de ses dièdres.* — La géométrie donne dans ce cas les conditions de possibilité, qui sont : $a < b + c$ et $a + b + c < 2\pi$, en désignant par a la plus grande des trois faces du trièdre.

Plaçons, en supposant ces conditions remplies, la plus grande face CSB (*fig.* 214, pl. XV) sur le plan horizontal et rabattons les deux autres autour des arêtes SB, SC sur le plan de la première, elles viendront recouvrir deux espaces angulaires CSA_1, BSA_2 respectivement égaux aux deux faces c, b données.

Prenons deux points A_1, A_2 équidistants du point S et sur l'arête dédoublée; ils décriront, lorsqu'on les fera tourner autour des charnières respectives SC, SB pour reconstituer le trièdre, des arcs de cercle projetés horizontalement suivant les perpendiculaires abaissées des points A_1, A_2 sur leurs charnières SC, SB; le point α de rencontre de ces lignes est donc la projection horizontale du point de la troisième arête donné par A_1, A_2 remis en place sur cette ligne. Quant à la cote de ce point, c'est précisément celle d'un point de même projection horizontale appartenant à une sphère dont le centre serait en S et qui aurait pour rayon celui du cercle figuré sur notre épure. En faisant dans la

sphère auxiliaire une section par le plan vertical projetant de l'arête SA, on obtient un grand cercle qui, rabattu sur le plan horizontal autour de $S\alpha$, s'applique précisément sur le cercle déjà tracé sur notre épure. En entraînant avec ce cercle la projetante du point A, on trouve pour cette ligne rabattue la perpendiculaire αA_3 à la charnière, qui n'est autre que la cote cherchée.

Au point où nous en sommes, le problème se réduit à celui du cas général précédemment traité; effectivement, on connaît, outre la face a donnée, la projection α d'un point de l'arête opposée et sa cote αA_3.

230. Deuxième cas. — *Construire les éléments inconnus d'un trièdre, connaissant deux faces et le dièdre compris.* — Plaçons sur le plan horizontal, et dans une position arbitraire, l'une des faces données ASB (*fig.* 215, pl. XV), et rabattons la seconde sur ce même plan horizontal autour de l'arête SA prise comme charnière; ce rabattement s'obtient en traçant simplement la droite SC_1 qui fait avec SA un angle égal à celui de la seconde face donnée.

Mettons en évidence, pour faire intervenir utilement le troisième élément donné, le dièdre A sur un plan vertical pris dans une position perpendiculaire à son arête SA; la ligne de terre x_1y_1 est ainsi perpendiculaire à cette arête et la trace P'_1 de la face CSA s'obtient en conduisant par A une droite formant avec x_1y_1 le rectiligne du dièdre donné. Dès lors relevons, pour constituer le trièdre, la face C_1SA qui s'arrêtera sur le plan P'_1AS; le point C_1 décrit dans ce mouvement, sur le plan vertical, un arc de cercle de centre A et de rayon AC_1, pour venir s'arrêter à son tour en c'_2, c. Cela fait, on connaît la face ASB, la projection c sur son plan d'un point de l'arête opposée et la cote cc'_2 de ce point; on est donc encore ramené au problème général. Il résulte du tracé même que le problème de la construction d'un trièdre est toujours possible dans le cas qui vient d'être traité.

231. Troisième cas. — *Construire les éléments inconnus d'un trièdre dont on donne deux faces b, c et le dièdre* C *opposé à l'une d'elles* (*fig.* 216, pl. XV). — Plaçons sur le plan horizontal la face CSA adjacente au dièdre donné SC, en dirigeant la seconde arête SA de cette face suivant une perpendiculaire à la ligne de terre; la grandeur de la deuxième face connue peut être figurée sur notre épure, après son rabattement sur le plan horizontal autour de l'arête SA prise comme charnière; elle recouvre alors en effet un espace angulaire ASB_1, égal à la face donnée c.

Deux des éléments donnés étant ainsi placés, mettons le troisième en évidence par l'emploi d'un second plan vertical de projection perpendiculaire à l'arête SC, dont la ligne de terre x_1y_1 est également perpendiculaire à cette arête; dans ce nouveau système le plan de la face inconnue BSC a pour trace horizontale P la droite SC déjà tracée, et sa trace, sur le second plan de projection, s'obtient immédiatement par la droite P'_1 menée par α et inclinée de l'angle donné C, sur x_1y_1. Pour déterminer ce plan dans le système primitif de plans coordonnés, tout revient à changer de plan vertical par rapport au plan $P'_1\alpha P$; une construction (§ 107) bien connue du lecteur donne la trace P' sur l'ancien plan vertical de projection. Remettons en place la face ASB_1 par une rotation autour de SA : le point B décrit, sur le plan vertical de projection, un arc de cercle de centre A de rayon égal à AB_1, pour venir s'arrêter soit en B'_1, β_1 soit en B'_2, β_2, sur la trace verticale P' du plan de la face inconnue, et le problème offre deux solutions.

Le tracé que nous venons d'exécuter conduit à la connaissance pour chaque solution de la projection β_1 ou β_2 sur le plan de la face connue CSA, d'un point de l'arête opposée à cette face et de la cote $B'_1\beta_1$ ou $B'_2\beta_2$ de ce point, ce qui nous fait encore retomber sur les données du problème général pour chacune des solutions.

Pour que la construction soit possible, il faut et il suffit que le plan PCP' coupe le cône décrit par

la rotation de SB_1 autour de SA. Déterminons, afin d'exprimer cette condition à l'aide des éléments donnés, la distance du point A à l'une des génératrices du cône et celle de ce même point au plan PCP'; la première est donnée par la perpendiculaire Aq menée de A sur la génératrice SB_1; la seconde s'obtient en projetant le point A en a'_1 sur le plan vertical auxiliaire et en abaissant de ce point la perpendiculaire $a'_1p'_1$ sur P'_1; cette perpendiculaire donne évidemment en véritable grandeur la distance du point A, a'_1 au plan $P_\alpha P'_1$.

Pour que la rencontre du cône et du plan ait lieu, il faut et il suffit que l'on ait $Aq \geqq a'_1p'_1$; mais la figure donne $Aq = AS \sin c$, $a'_1p_1' = a'_{1\alpha} \sin C = AS \sin b \sin C$.

En remplaçant dans l'inégalité, on trouve la condition de possibilité

$$\sin c \geqq \sin b \sin C.$$

En outre, pour que le problème offre deux solutions, il faut que B'_2 tombe entre C et B'_1, c'est-à-dire que l'on ait :

$$AB_1 < AC, \quad \text{ou} \quad c < b.$$

232. Quatrième cas. — *Construire les éléments inconnus d'un trièdre dont on donne une face c et les deux angles dièdres adjacents* A, B (*fig.* 217, pl. XV). — Plaçons sur le plan horizontal la face donnée ASB, et, afin de mettre en évidence les rectilignes des dièdres donnés, adoptons deux lignes de terre x_1y_1, x_2y_2 respectivement perpendiculaires aux arêtes SA, SB de ces dièdres; les plans PAP'_2, QBQ'_1, dont les traces verticales s'inclinent sur les lignes de terre respectives des angles A, B donnés, déterminent ceux des faces CSA, CSB.

Il est maintenant facile de construire un point de l'arête opposée à la face donnée et sa cote au-dessus du plan de cette face ; il suffit, en effet, de chercher un point de la commune intersection des plans PAP'_2, QBQ'_1, ce que l'on a fait à l'aide d'un plan horizontal auxiliaire déterminé simplement dans les deux systèmes de plans coordonnés par ses traces verticales H'_1, H'_2 menées parallèlement aux lignes de terre respectives à une même distance arbitrairement choisie de ces lignes. Le plan auxiliaire donne sur ceux dont on cherche l'intersection deux horizontales (h_1, h'_1), (h_2, h'_2) qui déterminent à leur tour le point de rencontre cherché c, c'_1.

Dès lors on est encore ramené au problème général ; car on connaît une face ASB, la projection c d'un point de l'arête opposée et la cote $\gamma c'_1$ de ce point. Ajoutons, pour terminer la question, que, d'après la construction même, le problème est toujours possible et n'a qu'une seule solution.

233. Application. — Réduction de l'angle à l'horizon. — Le présent problème se rencontre quand, dans le levé des plans, on a mesuré, à l'aide du graphomètre, l'angle que deux droites font entre elles et ceux qu'elles font avec la direction du fil à plomb, et que l'on se propose de déterminer le plan de l'angle, ou, en d'autres termes, l'écartement angulaire des projections horizontales de ses côtés.

Dans ces conditions, la verticale du sommet forme avec les deux côtés de l'angle un trièdre dont on connaît les trois faces et dont on cherche l'un des dièdres ; on pourrait donc recourir au tracé précédemment expliqué (§ **229**). Mais comme on ne doit construire qu'un seul dièdre, la question se simplifie au moyen d'une solution directe que nous allons indiquer.

Soient a, b les angles formés par la direction du fil à plomb avec les côtés de l'angle α donné. Plaçons, afin de tenir compte de la position naturelle des données, l'un des côtés de cet angle en BC (*fig.* 218, pl. XV) sur le plan vertical en inclinant cette droite de l'angle a sur la verticale BA; ceci fait, pour mettre en évidence les deux autres éléments connus, rabattons sur le plan vertical la

troisième arête autour des droites BA, BC prises successivement comme charnière; nous obtiendrons ainsi les droites BD, BE formant avec les charnières respectives les angles donnés b et α.

Afin d'obtenir la projection horizontale dont la recherche constitue la présente question, reconstituons l'angle; en vue de ce but, relevons le point de l'arête dédoublée qui offre un premier rabattement D_1 au point de croisement de la ligne de terre et de BD, et dont le second rabattement D_2 s'obtient en reportant la longueur BD_1 en BD_2 sur le second rabattement BE de l'arête dédoublée.

Dans leurs mouvements de rotation autour des charnières respectives, les points D_1, D_2 décriront des arcs de cercle projetés verticalement suivant les perpendiculaires D_1A, $D_2\omega$ abaissées respectivement de chacun de ces points sur les axes de rotation, et le point de croisement d' de ces lignes détermine la projection verticale du point cherché; sa projection horizontale se trouve placée en un des points de rencontre du cercle décrit par le point D_1 et de la ligne de rappel menée par d'; le cercle que décrit D_1 est sur le plan horizontal, son centre est en A, il a pour rayon AD_1; on peut donc le tracer et obtenir d.

La projection horizontale de l'un des côtés de l'angle est donc la droite de jonction des points A, d; celle de l'autre côté se confond avec xy; par suite, l'écartement angulaire α_1 des projections horizontales xy, AD donne l'angle α réduit à l'horizon.

CHAPITRE VII

DES POLYÈDRES

234. La question des polyèdres présente, indépendamment de son utilité propre, un grand intérêt en ce sens qu'elle fournit de très nombreuses applications des divers tracés relatifs à la droite et au plan; et comme ces tracés sont fondamentaux en géométrie descriptive, qu'ils constituent la base même de cette science, nous allons, dans le but de les rendre familiers au lecteur, traiter avec quelques développements les problèmes de géométrie descriptive qui se rattachent aux polyèdres.

Commençons par indiquer les divisions générales du présent chapitre; il comprendra les questions suivantes :

1° *Représentation des polyèdres au moyen de deux projections orthogonales.*

2° *Section plane des polyèdres.*

3° *Intersection d'une droite et d'un polyèdre.*

4° *Intersection de deux polyèdres.*

5° *Développement. Ligne minimum.*

6° *Détermination des sphères inscrites ou circonscrites aux polyèdres.*

235. Représentation des polyèdres. — Pour représenter un polyèdre au moyen de ses projections sur deux plans coordonnés, on construit celles des arêtes du solide, en ayant recours, pour la mise en

place des projections de ces lignes, aux méthodes qui viennent d'être développées et qui servent à la détermination des projections d'un système de droites satisfaisant aux conditions imposées par l'écartement relatif des lignes, leurs longueurs, etc. Après ce premier travail on s'occupera de la visibilité des arêtes du polyèdre. Le contour qui limite la projection considérée du solide est toujours entièrement visible.

Pour les arêtes qui ne font pas partie de ce contour nous distinguerons trois cas :

1° Le polyèdre est supposé convexe et fermé de toutes parts. 2° Le polyèdre convexe est supposé non fermé et réduit à sa surface. 3° Le polyèdre n'est pas convexe.

236. Polyèdre convexe solide ou fermé de toutes parts. — Soit (fig. b_3) ABCD, etc. l'une des projections du polyèdre [1], par exemple la projection horizontale. Considérons le contour extérieur limite ABCDEFG; ce contour est, comme nous venons de le dire, toujours visible; d'autre part, le polyèdre étant convexe et fermé, toute perpendiculaire au plan de projection considéré, dont le pied sur ce plan tombe à l'intérieur du contour limite, rencontre la surface du polyèdre en deux points: l'un supérieur, placé du côté du spectateur et par conséquent visible; l'autre inférieur et par suite caché. D'où l'on conclut que le polyèdre se trouve divisé en deux parties par le contour projeté en ABCDEFG, dont l'une placée, du côté du spectateur, est entièrement visible, tandis que l'autre est entièrement cachée.

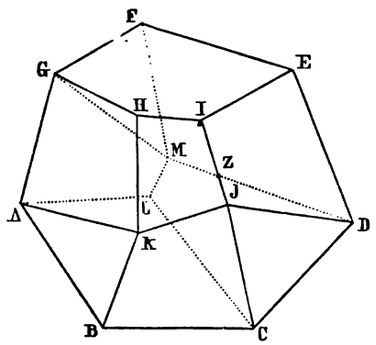


Fig. b_3.

Il suffira donc de déterminer la visibilité d'un point placé sur la surface du polyèdre; et en effet, supposons que le point K soit visible; remarquons alors que tout mobile partant de ce point et parcourant les arêtes, sans traverser le contour limite, se trouve toujours placé sur des arêtes visibles; donc les contours KHIE, KJD, KBCJ, etc., sont visibles. En somme, on peut dire que la visibilité de la figure résulte de celle d'un de ses sommets extérieurs au contour limite.

Nous avons admis que le contour limite sépare seul la partie visible de la partie cachée; le cas contraire est impossible; en effet:

1° Pour qu'une arête intérieure au contour, HK par exemple (fig. b_4); servît à la séparation, il faudrait que l'une des faces ABKH passant par HK fût visible, que la face contiguë PQKH fût cachée, et que, par suite, le corps offrît des faces placées au-dessous des premières et servant à la jonction de la face

[1] Voir, pour les conditions que doivent remplir les sommets, les faces et les angles du polyèdre convexe figuré, l'excellent *Traité de géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, 4e édition, 1879, seconde partie, page 105.

HPQK et du contour limite ABCDEFG. Dans ces conditions, une projetante voisine de HK et coupant les faces qui se touchent suivant cette arête, chacune en un point, couperait encore au moins l'une des faces de jonction dont on vient de parler, ce qui est inadmissible dans le cas d'un polyèdre convexe.

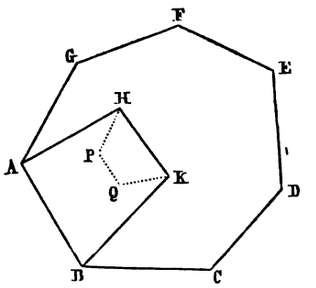


Fig. b_4.

2° Pour qu'un point V, placé sur une arête SR (fig. b_5), servît à la séparation, il faudrait qu'une verticale mobile sur RV donnât d'abord sur le polyèdre deux points d'intersection; puis ensuite, comme les premiers points ne se confondraient pas en V, il faudrait que la verticale passant par ce point V vînt couper le polyèdre en un troisième point placé sur une arête supérieure TU; ce qui ne saurait encore avoir lieu pour un polyèdre convexe.

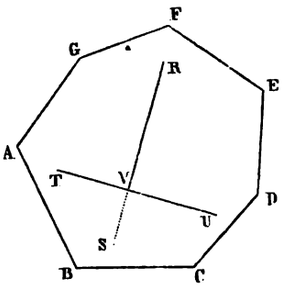


Fig. b_5.

Ceci dit, retournons aux considérations d'où nous sommes partis, et cherchons à déterminer la visibilité d'un point quelconque du polyèdre.

237. Visibilité d'un point quelconque pris sur la face d'un polyèdre.

Première méthode. — Pour déterminer, par exemple, la visibilité d'un sommet quelconque K (fig. b_3), prenons la rencontre de la verticale de ce point et du polyèdre; on pourra dire, ce tracé fait, que le point est visible s'il se trouve être le plus élevé des points d'intersection placés sur sa verticale; sinon il sera caché.

Deuxième méthode. — La question se simplifie le plus souvent en cherchant la visibilité des points qui, placés sur deux arêtes, ont une projection commune sur le plan de projection considéré, comme, par exemple, les points projetés en Z (fig. b_3). Il est alors, en effet, très facile de déterminer la rencontre du polyèdre avec la verticale du point Z, car on en connaît la projection horizontale Z, et, sur le plan vertical, les points de rencontre sont fournis aux croisements de la ligne de rappel du

point Z et des projections verticales des arêtes qui ont IJ, MD pour projections horizontales. Ayant trouvé ces intersections, la visibilité des points projetés en Z se détermine comme on l'a dit en expliquant la première méthode, et celle du polyèdre se règle alors par la méthode du mobile (§ 236).

238. Polyèdre convexe non fermé et réduit à sa surface. — On détermine la visibilité en supposant le polyèdre fermé (§§ 236 et 237); puis, on enlève les faces que l'on avait rétablies; et l'on considère comme visibles toutes les arêtes placées au-dessous des faces enlevées. Si, par exemple, nous reprenons la figure b_3, mais en enlevant la face HIJK et en supposant le polyèdre réduit à sa surface, nous trouverons la figure b_6.

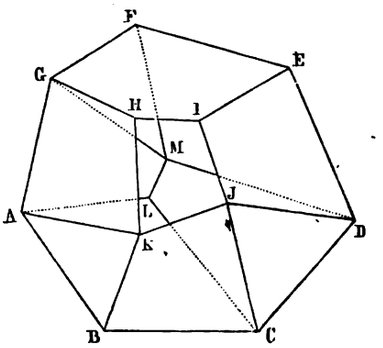


FIG. b_6.

239. Polyèdre non convexe. — Dans ce cas le contour limite sera toujours entièrement visible. Pour les autres arêtes il faudra recourir à l'une des méthodes indiquées (§ 237). — Le plus souvent on simplifie beaucoup la question par un examen attentif de la figure de l'espace et de ses deux projections, qui permet de distinguer, à l'aide de la forme du corps, les arêtes cachées de celles qui sont visibles.

240. Application.—Représentation de la pyramide.—Pour construire les projections d'une pyramide donnée, on trace celles de sa base à l'aide de la méthode connue (§ 60), puis on détermine celles du sommet de la pyramide que l'on joint aux diverses projections de même nom des sommets de la base.

241. Visibilité. — Dans le cas de la pyramide, la méthode donnée pour régler la visiiblité d'un polyèdre quelconque peut être simplifiée; effectivement, le plan de la base partage l'espace en deux régions, dont l'une contient le spectateur; on détermine celle qui contient le sommet de la pyramide, et alors deux cas se présentent :

1° Le spectateur et le sommet de la pyramide sont dans la même région; la base est alors complètement cachée par les faces latérales de la pyramide, sauf cependant les arêtes de cette base qui se trouvent sur le contour limite de la projection considérée du polyèdre, qui sont seules visibles sur cette base. En ce qui concerne la visibilité des arêtes latérales, nous dirons simplement qu'une arête latérale est entièrement visible ou cachée, selon qu'elle vient aboutir en un sommet visible ou caché de la base.

2° Le spectateur et le sommet sont dans deux régions différentes, c'est-à-dire de part et d'autre du plan de la base.

Cette base est alors entièrement visible ; quant aux arêtes latérales, celles qui, en projection sur ce

plan considéré et non prolongées, traversent la projection correspondante de la base, elles sont entièrement cachées; les autres sont au contraire visibles sur toute leur longueur.

En somme, tout se réduit à chercher la visibilité du sommet par rapport au plan de base, ce que l'on fera par l'une des deux méthodes précédemment expliquées (§ **237**).

Nous allons d'ailleurs, afin de préciser la question qui vient d'être traitée, exécuter l'épure de la pyramide en y indiquant la visibilité.

242. Application. — *Construire les projections d'une pyramide quadrangulaire.* — Soient s, s' (*fig.* 219, pl. XV) les projections du sommet et $abcd$, $a'b'c'd'$ celles de la base, déterminées par la construction connue du lecteur (§ **60**). En joignant les points s, s' aux projections correspondantes des sommets de la base, on a les projections des arêtes de la pyramide et par suite celles de ce polyèdre. Reste à déterminer la visibilité. Commençons par la projection horizontale; construisons dans ce but, conformément à la méthode connue, le point de rencontre de la verticale du sommet s, s' et du plan de base.

En employant le plan auxiliaire vertical conduit par as, on trouve pour son intersection avec le plan de base la droite af, $a'f'$ laquelle détermine en s, σ' le point de rencontre cherché.

Le point s' est sur notre épure au-dessus de σ', on en conclut que le sommet de la pyramide est lui-même au-dessus du plan de base; conséquemment, dans le cas figuré le sommet s, s' et le spectateur sont dans la même région par rapport à ce plan d'où résulte, pour la projection horizontale, et d'après les conclusions du précédent paragraphe, la visibilité indiquée sur notre épure. Pour la projection verticale on procède pareillement, en construisant le point σ_1, s' où la perpendiculaire au plan vertical menée par le sommet s, s' de la pyramide perce le plan de sa base, et en observant que, d'après la position de σ_1 sur l'épure, le sommet s, s' est en avant de ce plan, c'est-à-dire que le sommet et le spectateur sont encore dans la même région; on en conclut pour la projection verticale la visibilité indiquée sur l'épure.

L'application de la seconde méthode établie dans le cours du paragraphe **237** permet d'obtenir plus simplement la région contenant le sommet; effectivement, supposons, par exemple, qu'il s'agisse de la projection horizontale, sur ce plan les projections sa, cb (*fig.* 219, pl. XV) de deux arêtes se rencontrent au point f, qui correspond à deux points de l'espace projetés verticalement en f' et en φ'; ce dernier point étant au-dessus du premier, le sommet est aussi au-dessus du plan de base et, par conséquent, dans la région contenant le spectateur; d'où l'on déduit, en suivant les indications données au paragraphe **241**, la visibilité indiquée sur la projection horizontale; on procéderait pareillement pour l'autre projection.

En terminant, il importe de remarquer que les considérations précédentes s'appliquent encore au prisme, attendu que ce solide est une pyramide dont le sommet est le point à l'infini sur les arêtes latérales.

243. Section plan des polyèdres. — On peut construire le polygone d'intersection d'un plan et d'un polyèdre, soit en déterminant ses côtés, qui ne sont autres que les intersections des faces et du plan sécant, limitées au périmètre des faces correspondantes, soit en déterminant les sommets du polygone, qui sont aux points d'intersection des arêtes et du même plan sécant.

Pour employer commodément la seconde méthode, il convient de rendre le plan sécant perpendiculaire à l'un des plans de projection; alors les projections sur ce nouveau plan des sommets du polygone de rencontre se trouvent immédiatement en prenant les points de croisement des projections des arêtes du polyèdre et de la trace du plan; des lignes de rappel et les secondes pro-

jections des arêtes donnent, par leurs rencontres, les sommets de la projection de la section sur le second plan coordonné. Il faut alors, en exécutant le changement de l'un des plans de projection pour les divers sommets du polygone de rencontre, revenir au système primitif de plans coordonnés. Enfin, s'il y a lieu, la vraie grandeur du polygone de section s'obtiendra par un rabattement du plan sécant sur l'un des plans de projection.

Dans le cas d'un polyèdre convexe, la visibilité des projections du polygone que l'on vient de construire s'obtient en remarquant que tout côté qui offre un sommet placé sur une arête cachée du polyèdre est entièrement caché et que, par suite, les seuls côtés visibles sont ceux dont les extrémités tombent sur deux arêtes visibles.

Avant d'aborder l'étude des sections planes de la pyramide et du prisme, rappelons quelques propriétés géométriques qui sont d'un emploi constant en géométrie descriptive.

244. Homologie plane. — D'après PONCELET on dit que deux figures planes sont homologiques lorsqu'elles se correspondent point par point et droite par droite de telle sorte : 1° que les points correspondants se trouvent sur des droites qui convergent en un seul point nommé *centre d'homologie*, et, 2° que les droites correspondantes se croisent sur une même droite appelée axe d'homologie.

245. Théorème. — *Si l'une quelconque des deux conditions qui servent à définir l'homologie est remplie, l'autre l'est également.* — En premier lieu supposons que les points correspondants se trouvent sur des droites issues du centre d'homologie, et démontrons que les droites correspondantes se croisent sur une même droite, qui sera l'axe d'homologie.

Il suffit évidemment d'établir la propriété pour trois couples de droites correspondantes, ou, ce qui revient au même, de démontrer que deux triangles dont les sommets s'appuient sur trois droites qui convergent vers un même point, ont les rencontres de leurs côtés correspondants sur une même droite.

La propriété devient évidente si l'on considère les deux triangles comme les projections de deux sections planes faites sur les faces latérales d'une pyramide, dont le sommet se projetterait au centre d'homologie, et dont les arêtes latérales auraient pour projections les droites de jonction des points correspondants sur la figure primitive.

Effectivement, les côtés des triangles auxiliaires sont ainsi les droites de rencontre des plans des faces latérales et des plans sécants, droites qui se croisent deux à deux sur l'intersection de ces mêmes plans sécants, et dont, par suite, les projections se rencontrent en trois points placés sur la projection de cette intersection.

En second lieu, démontrons que deux figures qui ont un axe d'homologie ont aussi un centre d'homologie. Il suffit d'établir que trois droites quelconques menées par trois couples de points homologiques sont concourantes, ou bien démontrer pour deux triangles la réciproque de la proposition que l'on vient d'établir.

Que l'on imagine deux triangles dans l'espace projetés sur les triangles considérés, et tels que leurs plans se coupent suivant une droite projetée elle-même sur l'axe d'homologie; les côtés de ces triangles se couperont à leur tour, comme ceux de leurs projections, en trois points placés sur une même droite. Ils détermineront, par conséquent, trois plans se croisant au sommet d'une pyramide dont les projections des arêtes latérales, qui ne seront autre chose que les droites de jonction des sommets homologues des triangles primitifs, passeront bien par un même point, qui sera le centre d'homologie.

246. Théorème. — *Les projections sur un plan de deux sections planes faites sur les faces latérales d'une même pyramide sont homologiques.* — En effet, deux côtés des polygones de section placés sur une même face latérale concourent au point d'intersection du plan de cette face et de la droite de rencontre des deux plans sécants; d'ailleurs, les droites qui joignent les sommets correspondants des sections se coupent en un seul point qui est le sommet de la pyramide. Or les deux propriétés que nous venons d'indiquer sont projectives, c'est-à-dire qu'elles se conservent quand on projette les figures d'une manière quelconque sur un même plan; les deux projections des deux sections planes de la pyramide sont donc homologiques. On voit, en outre, que l'axe d'homologie est la projection de l'intersection des deux plans sécants et que le centre d'homologie n'est autre que la projection du sommet de la pyramide.

247. On peut énoncer différemment le théorème que nous venons d'établir en disant :

Lorsque deux figures planes sont en perspective, leurs projections sur un plan quelconque sont homologiques.

248. *Pour déterminer la figure homologique à une figure donnée il suffit de connaître le centre c, l'axe* X *d'homologie, et un couple a, a' de points homologues* (fig. b_7).

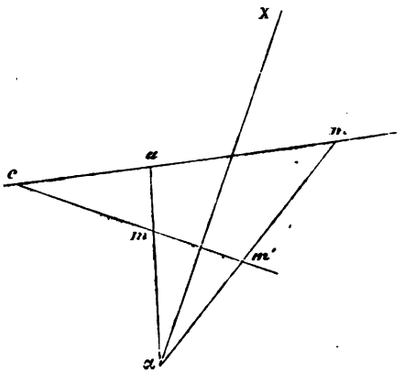


FIG. b_7.

Effectivement, cherchons à construire à l'aide des éléments donnés l'homologue d'un point quelconque m de la figure connue.

Pour cela, menons la droite am qui coupe l'axe en α, joignons par des droites (α, a'), (c, m); le point d'intersection m' de ces lignes est évidemment le point homologue du point m.

249. La réciproque du théorème établi au paragraphe 246 est vraie et s'énonce ainsi :

Deux polygones homologiques situés sur un même plan peuvent être considérés comme les projections sur ce plan de deux sections planes d'une même pyramide.

Soient en effet (fig. b_8) c, x, (a, a'), abd, etc., et P, le centre d'homologie, son axe, un couple de points homologues, les sommets de l'un des polygones considérés et le plan des polygones homologiques; soient encore X, Q et A', une droite quelconque projetée sur P en x, un plan quelconque passant par cette droite, et un point quelconque ayant pour projection sur P le point a'.

Considérons en outre un plan R conduit par la droite X et le point A'; soient encore A, B, D,... les points du plan Q qui ont leurs projections en a, b, d,... et C le point de croisement de la perpendiculaire à P menée par c avec la droite AA'.

Concevons alors la section A′ B′ D′, etc., que donnerait le plan Q sur la pyramide dont le sommet serait C et la base ABD, etc., la projection sur P de cette section serait un polygone $a'b'd'$, etc.,

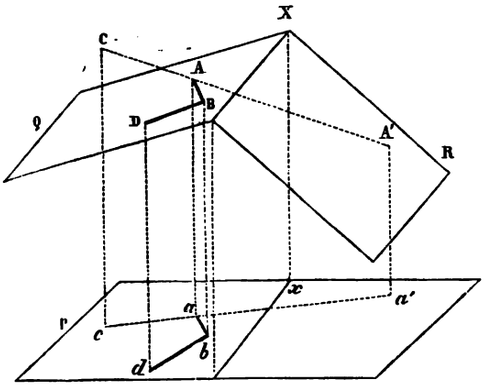


Fig. b_8.

homologique au polygone *abd*, etc., qui serait déterminé (§ **248**), comme l'un des deux polygones donnés, par le centre *c*, l'axe *x* d'homologie, l'une des figures *abd*, etc., et un couple *a*, *a′* de points homologues, ce polygone se confondrait donc avec celui des polygones donnés dont un des sommets est en *a′*; ce qui démontre la propriété.

On eût pu énoncer le présent théorème de la manière suivante :

Deux figures homologiques sont les projections de deux figures planes en perspective.

250. Remarque. — *La transformée homologique d'une droite est une droite.* — Cette remarque résulte immédiatement de la définition donnée plus haut (§ **244**).

La droite à l'infini (§ 3) de l'une des figures a, d'après le théorème de l'alinéa précédent, pour transformée homologique une droite que l'on nomme la *droite limite* de l'autre figure.

251. Problème. — *Connaissant le centre* C, *l'axe d'homologie* X *et un couple de points homologues a, a′, construire les deux droites limites* (fig. b_9).

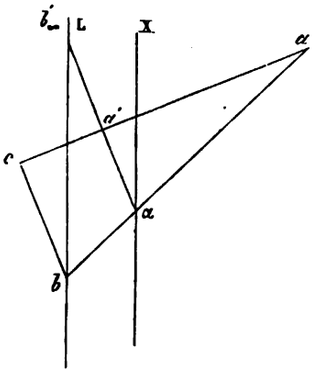


Fig. b_9.

La droite à l'infini du plan coupe l'axe d'homologie à l'infini; donc son homologue devra couper X également à l'infini; par suite *les droites limites sont parallèles à l'axe d'homologie.*

Pour obtenir un point de la droite limite relative à la figure qui comprend le point a, menons par son conjugué a' une droite $\alpha a'$ de direction quelconque et cherchons l'homologue du point à l'infini b'_∞, sur cette droite, il devra se trouver sur la droite qui joint c au point b'_∞, c'est-à-dire sur la parallèle à la droite $\alpha a'$ menée par c, il devra également appartenir à la droite αa qui est l'homologue de $\alpha a'$; ce sera donc le point de rencontre b de ces lignes. La parallèle L à l'axe X menée par le point b est donc la droite limite cherchée.

On construirait de même la seconde droite limite.

252. Remarque. — *Quand le centre d'homologie est à l'infini, il y a affinité* (§ **126**).

En effet, reprenons (fig. b_7 *bis*) la figure b_7 en plaçant c à l'infini dans une direction donnée; les droites aa', mm' deviendront parallèles, et en désignant par a_1, m_1 les points de rencontre des droites (aa', X), (mm', X), on aura $\frac{a_1a}{a_1a'} = \frac{m_1m}{m_1m'}$; les ordonnées des points qui

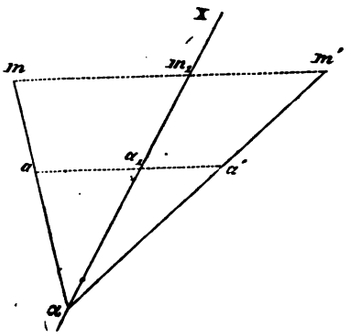


Fig. b_7 *bis*.

correspondent à une même abscisse sont donc proportionnelles; par suite, d'après le paragraphe précité, il y a affinité.

RAPPORT ANHARMONIQUE.

253. M. Chasles appelle rapport anharmonique de quatre points situés en ligne droite, le rapport des distances de l'un de ces points à deux des autres divisée par le rapport des distances du quatrième point à ces deux-là.

Soient les quatre points (fig. b_{10}) a, b, c, x placés sur la même droite; le point c détermine sur ab le rapport de simple section $\frac{ca}{cb}$; le point x détermine de même le second rapport de simple

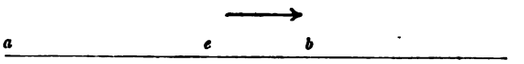


Fig. b_{10}.

section $\frac{xa}{xb}$; en divisant ces deux rapports nous trouvons $\frac{ca}{cb} : \frac{xa}{xb}$; ce résultat est le biquotient ou le rapport anharmonique des quatre points; on le désigne par $(abcx)$.

Remarque. — Les segments doivent être affectés d'un signe convenable, suivant les conventions

indiquées en géométrie. Si, par exemple, on adopte pour sens positif celui de la flèche (fig. b_{10}), *ca* sera négatif, *cb* sera positif, etc.

Connaissant la valeur du rapport anharmonique et la position de trois points a, b, c, on peut évidemment trouver la position du quatrième point x.

254. Théorème. — *Le rapport anharmonique est projectif* (fig. c_4).

Soient $(abcx)$ le rapport donné, S le centre de projection, P le plan de projection A, B, C, X les projections des points a, b, c, x. Nous voulons démontrer que l'on a : $(abcx) = (\mathrm{ABCX})$.

En effet, les triangles acS, cbS donnent

$$\frac{ca}{cS} = \frac{\sin(cS, aS)}{\sin a}, \quad \frac{cb}{cS} = \frac{\sin(cS, bS)}{\sin b},$$

en divisant membre par membre, on obtient

$$\frac{ca}{cb} = \frac{\sin(cS, aS)}{\sin(cS, bS)} \cdot \frac{\sin b}{\sin a};$$

on a de même, pour le second rapport de simple section,

$$\frac{xa}{xb} = \frac{\sin(xS, aS)}{\sin(xS, bS)} \cdot \frac{\sin b}{\sin a};$$

en formant le biquotient, on trouve

$$\frac{ca}{cb} : \frac{xa}{xb} = \frac{\sin(cS, aS)}{\sin(cS, bS)} : \frac{\sin(xS, aS)}{\sin(xS, bS)}.$$

Ce rapport ne dépend que de l'inclinaison des projetantes; il conservera donc sa valeur en projection.

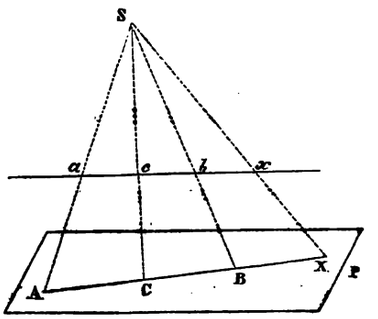


Fig. 4.

On peut encore énoncer le présent théorème de la manière suivante :

Le rapport anharmonique des points déterminés par les rayons d'un faisceau sur une sécante est constant, quelle que soit la position de la sécante.

Quand des plans passent par une même droite, ils constituent *une feuillée de plans;* des plans qui passent par un même point forment un *faisceau de plans.*

255. Théorème. — *Les sections planes d'une feuillée de quatre plans offrent un rapport anharmonique constant.*

Car deux sections planes quelconques forment deux faisceaux de quatre droites qui ont pour sécante commune l'intersection des plans de ces faisceaux; et comme cette sécante commune fixe le rapport anharmonique de chaque faisceau, ce rapport est bien constant.

256. Corollaire. — *Le rapport anharmonique déterminé sur une sécante quelconque par une feuillée de quatre plans est constant.*

En effet, si l'on conduit par une des sécantes un plan quelconque, on obtiendra sur la feuillée un faisceau de quatre droites dont le rapport anharmonique est égal à celui que donne la feuillée sur la même sécante; et comme le rapport anharmonique du faisceau est constant, celui de la sécante l'est également, ce rapport se nomme le rapport anharmonique de la feuillée.

Division harmonique. — On dit qu'un segment de droite ab (fig. c_2) est divisé harmoniquement aux points c et x, quand le rapport anharmonique $(abcx)$ est égal à -1.

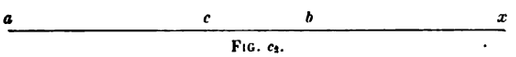


Fig. c_2.

La division harmonique du segment ab se trouve donc caractérisée par la relation

$$\frac{ca}{cb} : \frac{xa}{xb} = -1, \tag{1}$$

qu'on peut écrire

$$\frac{ca}{cb} = -\frac{xa}{xb};$$

les points c et x sont dits conjugués harmoniques par rapport aux points a et b.

Démontrons que *réciproquement a et b sont conjugués harmoniques par rapport aux points c et x.* En effet on a : $ca = -ac$, $cb = -bc$, $xa = -ax$, $xb = -bx$; en remplaçant dans la relation (1) il vient :

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ax}{bx} = -1,$$

ou

$$\frac{ac}{ax} : \frac{bc}{bx} = -1;$$

donc a et b divisent harmoniquement le segment cx.

257. Théorème. — *Le conjugué harmonique du milieu d'une droite est le point à l'infini sur cette droite.* — En effet, quand c se trouve au milieu de ab, on a $ca = -cb$; la relation (1) donne alors :

$$-1 : \frac{xa}{xb} = -1, \text{ ou } \frac{xa}{xb} = 1;$$

cette valeur du rapport de simple section caractérise le point à l'infini sur la droite.

Le théorème est donc démontré; sa réciproque est vraie et se démontrerait sans difficulté.

On dit qu'un faisceau de quatre droites ou qu'une feuillée de quatre plans sont harmoniques, lorsque leur rapport anharmonique est égal à moins un.

258. Théorème. — *Un dièdre et ses plans bissecteurs, ou un angle et ses bissectrices, forment une feuillée harmonique de plans ou un faisceau harmonique de droites.* — Il suffit de considérer le faisceau, car dans les cas de la feuillée on peut toujours substituer à ses quatre plans le faisceau des droites d'intersection qu'ils donnent sur un plan perpendiculaire à leur arête commune.

En ce qui concerne le faisceau, il est manifeste que toute parallèle à l'une des bissectrices se trouve coupée par les rayons de ce faisceau en quatre points dont l'un est à l'infini sur cette bissectrice, tandis que le segment déterminé par deux des autres est divisé en deux parties égales par le quatrième, comme on le voit sur la (fig. c_3).

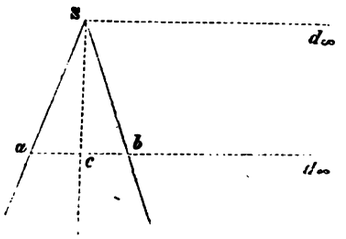


Fig. c_3.

Le théorème se trouve ainsi démontré, car le milieu d'une droite et le point à l'infini de cette droite sont, on le sait, conjugués harmoniques des extrémités de la droite (§ **257**).

259. Section plane du prisme. — Nous considérerons, afin d'appuyer nos tracés sur ceux des figures homologiques, le prisme comme une pyramide dont le sommet serait à l'infini sur les arêtes latérales du prisme. Alors, dans le prisme, une section plane ou sa projection sur l'un des plans coordonnés est, comme dans la pyramide, homologique à la base ou à sa projection sur le même plan coordonné; mais d'autre part, dans le cas du prisme, le centre d'homologie est à l'infini; on peut donc simplement dire qu'il y a affinité entre les projections, sur un même plan coordonné, de la base et d'une section plane du prisme.

260. Application. — *Étant donnés le plan de base* PpP′ *du prisme, la projection horizontale abcdef de cette base ainsi que la direction* δ, δ' *des arêtes latérales, déterminer la commune intersection d'un plan quelconque* QqQ′ *et du prisme* (fig. 220, XV).

Préalablement construisons, à l'aide des droites (vh, $v'h'$) ($b\theta$, $b'\theta'$), les projections verticales a', b', c' de trois sommets de la base, et celles d', e', f' des autres sommets de cette base, en ayant cette fois recours au tracé déjà expliqué (§ **60**).

Ces premières constructions étant effectuées, après avoir également conduit, par les projections des sommets de la base et dans les directions δ, δ', les projections des arêtes latérales du prisme, cherchons la section demandée.

Pour le faire nous eussions pu simplement chercher les rencontres des arêtes et du plan QqQ′; mais comme ces constructions, maintes fois employées, sont bien connues du lecteur, nous leur avons préféré, afin d'appliquer les théories développées plus haut, un tracé nouveau basé sur l'affinité.

Il suffira de construire, par exemple, la projection sur le plan horizontal; la projection verticale se déduira ensuite facilement de la première à l'aide de lignes de rappel partant des points de celle-ci pour aboutir aux projections verticales des arêtes latérales du prisme.

Abordons, tout ceci entendu, la question proprement dite, en déterminant l'axe d'affinité X de la projection horizontale cherchée, cet axe n'est autre que la projection horizontale de la droite de rencontre des plans PpP′, QqQ′ que l'on sait construire.

Passons à la recherche du rapport d'affinité, en construisant tout d'abord, à l'aide du plan projetant vertical de l'arête latérale du point c, c', le croisement γ, γ' de cette arête avec le plan

sécant QqQ', puis en formant simplement le rapport $\frac{\gamma\gamma_2}{c\gamma_2} = K$, qui n'est autre que celui que nous cherchions. Les ordonnées des sommets du polygone inconnu, comptées sur les projections horizontales des arêtes du prisme sont alors égales à $K.a\alpha_2$, $K.b\beta_2$, $K.d\delta_2$, $K.e\varepsilon_2$, $K.f\varphi_2$, ces quantités peuvent se calculer, on peut aussi les obtenir très facilement à l'aide du compas de réduction; mais comme on doit préférer en géométrie descriptive les tracés aux calculs et que le compas de réduction est loin de donner l'exactitude désirable, nous allons les déterminer par une simple construction géométrique.

Portons sur deux droites oy_1, oy_2 (*fig.* 221, pl. XV) formant entre elles un angle quelconque, les longueurs $oc_1 = c\gamma_2$, $o\gamma_1 = \gamma_2\gamma$ et tirons la droite $c_1\gamma_1$; ceci fait, reportons en oa_1, ob_1, od_1, oe_1, of_1 les ordonnées $a\alpha_2$, $b\beta_2$, $d\delta_2$, $e\varepsilon_2$, $f\varphi_2$, de la projection horizontale des sommets de la base et menons par les points a_1, b_1, d_1, e_1, f_1, ainsi trouvés des parallèles à la droite $c_1\gamma_1$, lesquelles, par leurs rencontres avec oy_2, déterminent d'abord les points α_1, β_1, δ_1, ε_1, φ_1, ensuite les ordonnés $o\alpha_1$, $o\beta_1$, $o\delta_1$, $o\varepsilon_1$, $o\varphi_1$ des sommets du polygone cherché. Il reste alors à reporter simplement ces ordonnées en $\alpha_2\alpha$, $\beta_2\beta$, $\delta_2\delta$, $\varepsilon_2\varepsilon$, $\varphi_2\varphi$ et à former, en tirant les droites $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, etc., le polygone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$ qu'il fallait construire.

Actuellement on trouve, comme il a été dit, à l'aide des lignes de rappel menées par les sommets de la projection horizontale que nous venons d'obtenir, ceux de la projection verticale $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\varphi'$ correspondante.

Nous avons représenté sur l'épure le tronc de prisme compris entre la base sur le plan PpP' et le polygone de rencontre avec QqQ', et, afin de régler la visibilité, nous avons, le tronc de pyramide étant en partie dans le dièdre 2, cherché sa trace verticale en prenant simplement les traces, sur ce plan γ'_3, δ'_3, ε'_3 des arêtes latérales non prolongées au-delà des bases du tronc, et les traces θ'_3, θ'_4, encore sur ce même plan, des côtés $(\varphi'\varepsilon', \varphi\varepsilon)$, $(\beta'\gamma', \beta\gamma)$.

On trouve ainsi en $\theta'_4\gamma'_3\delta'_3\varepsilon'_3\theta'_3$ la trace verticale du tronc de prisme. La vraie grandeur de la section s'obtiendrait par un rabattement du plan QqQ' et de la figure qu'il contient sur l'un des plans de projection; nous n'avons pas exécuté cette construction fort simple qui eût rendu plus difficile la lecture de l'épure.

SECTION PLANE DE LA PYRAMIDE

261. Problème. — *Construire l'intersection d'une pyramide et d'un plan.* — Soient sur le plan horizontal, *a b c d* (*fig.* 222, pl. XVI) la projection du polygone de base, *s* et *x* celles du sommet de la pyramide et de la rencontre du plan de base et du plan de section. Nous n'avons pas figuré de projection verticale afin d'éviter l'emploi de lignes inutiles à l'explication du problème actuel, le lecteur pourra toujours, par de simples lignes de rappel, rétablir cette projection nécessaire à la détermination complète des lignes de la figure.

Supposons en outre que l'on ait déterminé, par un tracé préalable bien connu, la projection horizontale α du point de rencontre d'une arête latérale arbitrairement choisie, et du plan de section.

Tout est maintenant préparé pour faire l'application des tracés relatifs aux figures homologiques; en effet, les éléments connus sont : l'axe x et le centre s d'homologie, une première figure *abcd* et un point α de la seconde, homologue du point a de la première, et l'on veut simplement construire la seconde figure. C'est là un problème connu (§ **248**) dont nous allons appliquer le tracé à la présente question. A cet effet, joignons par une droite le point de rencontre n de l'axe x et de la droite *ab*

au point α, ce sera l'homologue de cette droite ab; prenons son point de croisement β avec sb qui sera l'homologue du point b; en continuant de même, nous pourrons achever la construction de la projection horizontale $\alpha\beta\gamma\delta$ du polygone cherché.

262. Problème. — *Construire la section d'une pyramide par un plan qui détermine avec celui de base un axe d'homologie éloigné.*

Soient s la projection du sommet de la pyramide sur le plan horizontal et $abcdef$ celle de la base sur le même plan de projection (*fig.* 223, pl. XVI).

On suppose que l'axe d'homologie se trouve à l'extérieur de l'épure, il faut alors substituer à cet axe, qui équivaut à deux conditions, deux points du polygone de section. Nous construirons donc directement les projections horizontales α, β, φ des trois points de rencontre de trois arêtes latérales arbitrairement choisies, et du plan de section. La question est actuellement réduite à un simple problème de géométrie. On doit, en effet, connaissant le centre s d'homologie, trois couples de points homologues (a, α), (b, β), (f, φ) et l'une des deux figures $abcdef$, construire la seconde. Joignons par une droite deux des points connus β, φ de la figure dont on poursuit la construction et traçons son homologue bf; tirons alors les droites de jonction du point a, homologue du point α donné, aux autres sommets c, d, e de la même base et prenons les rencontres m, m_1, m_2 de ces droites avec bf, leurs homologues seront sur $\beta\varphi$ et sur les droites sm, sm_1, sm_2 en μ, μ_1, μ_2; on en déduit les homologues $\alpha\mu$, $\alpha\mu_1$, $\alpha\mu_2$ des diagonales de la base, et, par les rencontres de ces droites avec celles qui unissent s aux sommets de cette base, on trouve enfin les sommets inconnus γ, δ, ϵ, du polygone cherché; ce qui permet de le tracer.

263. Problème. — *Par un point donné conduire un plan coupant les faces latérales d'une pyramide quadrangulaire suivant un parallélogramme.*

Les sections que des plans parallèles déterminent sur les faces latérales d'une même pyramide étant homothétiques, nous construirons : en premier lieu, la direction des plans qui donnent sur les faces latérales opposées de la pyramide considérée deux couples de parallèles; en second lieu, par le point donné, un plan parallèle à la direction trouvée (§ **65**) qui sera celui que nous cherchons.

Première solution (*fig.* 224, pl. XIV). — Soient ABCD la base sur le plan horizontal de la pyramide donnée et s la projection sur ce même plan de son sommet.

Il est un moyen très direct et très simple de résoudre la question; effectivement, pour qu'un plan détermine sur deux autres des intersections parallèles il faut et il suffit qu'il soit parallèle à l'intersection de ces deux-ci, on en conclut que les couples de plans formés par le prolongement des faces (ASB, DSC), (ASD, BSC) donnent par leurs croisements respectifs deux droites dont les traces sont en t, θ et dont le plan détermine la direction cherchée; cette direction est donc celle d'un plan dont la trace horizontale se fait suivant la droite P de jonction des points t, θ et qui passe en outre par le sommet S de la pyramide. Ceci fait, on déterminera par la méthode du paragraphe **65** la trace horizontale P_1, du plan conduit par le point donné et parallèlement à la direction précédemment trouvée, lequel plan coupera les traces horizontales des deux couples de plans indiqués plus haut, suivant deux couples de points (K, H) (F, G), qui sont les traces horizontales des côtés du parallélogramme de section. En tirant alors par les points du premier couple des parallèles à la droite projetée en st, et par ceux du second des parallèles à la droite qui se projette en $s\theta$ nous aurons les projections horizontales de ces côtés, qui devront, si l'épure est exactement faite, s'entrecouper en quatre poins a, b, c, d, placés sur les projections horizontales des arêtes latérales de la pyramide.

Deuxième solution. — La solution qui vient d'être donnée tombe en défaut lorsque les côtés

opposés du quadrilatère de base se coupent à l'extérieur des limites de l'épure. On peut alors simplement remarquer que le point de concours des diagonales du parallèlogramme doit les diviser en deux parties égales et appartenir à la droite de jonction du sommet de la pyramide au point de croisement des diagonales du quadrilatère de base.

Reprenons (*fig.* 225, pl. XVI) la projection horizontale *s*ABCD de la pyramide. Construisons les diagonales AC, DB de la base, leur point de concours O et la droite *s*O formée par la projection horizontale du croisement des plans diagonaux.

Plaçons sur cette dernière, dans une position arbitraire, un point *o* et cherchons la projection du parallélogramme de section ayant ce point pour centre; les diagonales de ce parallèlogramme sont des segments de droites qui, compris entre les couples de droites formées par les projections des arêtes opposées (*s*A, *s*C), (*s*B, *s*D), passent en outre au point *o* et y sont divisés en deux parties égales; la construction de ces segments est un simple problème de géométrie, résolu, pour l'un d'eux, sur notre épure en conduisant par *o* une parallèle à *sd*, laquelle vient croiser SB en *m*, en prenant $mb = sm$ et en tirant la droite *bo* que l'on prolonge jusqu'au point *d*; cette ligne *bd* n'est autre que l'une des diagonales cherchées. Quant à l'autre, elle s'obtiendrait pareillement et déterminerait avec la première la direction générale des plans cherchés, on achèverait alors la construction en conduisant par le point donné un plan parallèle à celui de ces diagonales.

Troisième solution. — On peut sans le secours de ce qui précède, et en ne se fondant que sur l'homologie, retrouver le tracé établi au commencement du présent paragraphe.

Rappelons d'abord une définition géométrique. On appelle quadrilatère complet la figure ABCDθt (*fig.* 224, pl. XVI) obtenue en prolongeant, jusqu'à leurs points de rencontre *t*, θ, les côtés opposés d'un quadrilatère. Cette figure a six sommets A, B, C, D, θ, *t*, et trois diagonales AC, BD, θt.

La trace horizontale de la pyramide doit être homologique à la projection du parallèlogramme de section, il faut donc que le quadrilatère complet ABCDθt ait pour homologique un second quadrilatère complet dont les sommets homologues à θ, *t* soient à l'infini, c'est-à-dire que θt est la droite limite relative à la base donnée. Soit θ_1 un point de la trace horizontale du plan sécant cherché, comme cette dernière n'est autre que l'axe d'homologie que l'on sait devoir être parallèle à la droite limite, on trouvera cet axe en conduisant par θ_1 la parallèle P_1 à θt. Ceci fait, cherchons l'homologue du côté DA de la base; il doit passer par la rencontre F de ce côté avec l'axe d'homologie P_1, d'autre part, ce même côté rencontre la droite limite en θ dont l'homologue θ_∞ est à l'infini sur $s\theta$; dès lors menant la parallèle à $s\theta$ qui passe en F on a l'homologue cherché. Il faudra le limiter en ses points de croisement *a*, *d* avec la droite de jonction du centre *s* d'homologie et des sommets A, D de la base. On construira pareillement les autres sommets du parallélogramme cherché.

264. Méthode de transmutation des figures. — L'épure 224 montre que tout quadrilatère complet peut être projeté suivant un parallélogramme : on prendra à cet effet pour plan de projection le plan sécant dont P_1 est la trace, pour centre de projection le sommet de la pyramide et pour figure projetée la base de ce polyèdre.

Il suit de là que toute propriété projective du parallélogramme est encore applicable au quadrilatère. Ainsi nous avons vu que le conjugué harmonique du milieu *o* de la diagonale *ac* est à l'infini sur cette droite (*fig.* 224 pl. XVI). Comme cette propriété est projective on est conduit au théorème qui suit :

Théorème. — *Dans tout quadrilatère complet chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.*

Les nombreux théorèmes qui découlent de la transformation du quadrilatère par la méthode projective sont du domaine de la géométrie et ne sauraient, bien que d'un grand intérêt, trouver place dans le cadre de ce traité; nous donnerons, néanmoins, parmi les exercices du présent chapitre d'autres applications de ce mode de transformation.

265. Intersection d'une droite et d'un polyèdre. — Les points de rencontre d'une droite et d'un polyèdre s'obtiennent en conduisant par la droite un plan sécant auxiliaire dont on construit la rencontre avec le polyèdre, et en prenant ensuite les points en lesquels cette ligne de rencontre vient couper la droite donnée. L'application de la méthode n'offre de difficulté que dans le choix du plan sécant auxiliaire, à ce sujet on ne saurait donner de méthode générale, il faut, dans chaque cas particulier et par un examen attentif des données, choisir, comme on le verra tout à l'heure par des exemples, le plan dont la section avec le polyèdre se construit le plus aisément.

266. Application. — *Trouver les points de rencontre d'une droite et d'un prisme.* — Supposons que la base ABCDE du prisme soit placée sur le plan horizontal de projection (*fig.* 226, pl. XVI) et, à l'aide de la direction des arêtes latérales qu'on suppose également connue, traçons les projections du solide sur les deux plans coordonnés, donnons-nous enfin en δ, δ', les projections de la droite dont nous voulons la rencontre avec le prisme.

Le choix du plan sécant auxiliaire est ici des plus facile; effectivement, en coupant le prisme par un plan conduit par δ, δ' parallèlement à ses arêtes latérales, l'intersection se réduit à deux droites parallèles à ces mêmes arêtes.

Exécutons les tracés indiqués; par un point g, g', arbitrairement placé sur δ, δ', menons les parallèles gk, $g'k'$ aux projections des arêtes latérales et prenons la trace horizontale h de la droite qu'elles représentent, ainsi que celle t, t' de la droite δ, δ' donnée; tirons th, nous avons la trace horizontale du plan auxiliaire, qui donne en ses points de rencontre avec celle du polyèdre, les traces horizontales θ_1, θ_2 des droites de rencontre du plan sécant auxiliaire et du prisme. En menant alors, par ces deux points θ_1, θ_2, des parallèles (i_1, i'_1), (i_2, i'_2) aux arêtes latérales et en prenant leurs points de croisement (m_1, m'_1), (m_2, m'_2) avec la droite donnée, on trouve enfin les points qu'il s'agissait de construire, et leurs projections correspondantes (m_1, m'_1), (m_2, m'_2) devront, si l'épure est exactement faite, se trouver sur des lignes de rappel.

267. Visibilité d'une droite par rapport à un prisme. — Cette question est importante en ce sens qu'elle sert, dans la question de l'intersection d'un polyèdre et d'un prisme, à régler la visibilité des arêtes du polyèdre.

Pour la résoudre, on doit tout d'abord déterminer, par le procédé du précédent paragraphe, la rencontre de la droite et du prisme; reprenons donc l'épure de cette intersection (*fig.* 226, pl. XVI) et cherchons la visibilité de la droite δ, δ'.

Il importe d'examiner successivement les divers segments déterminés par le prisme sur la droite, nous trouverons : 1° le segment m_1m_2, $m'_1m'_2$ intérieur au prisme, dont les deux projections sont toujours cachées; 2° ceux dont les projections sont extérieures, sur le plan coordonné considéré, aux droites qui forment le contour limite de la projection du prisme, segments qui ne sont jamais cachés par le prisme. Ainsi, pour l'exemple actuel, ont peut dire que n_1t, μ'_1t', etc., sont visibles; 3° les segments, extérieurs au prisme mais dont les projections sur le plan considéré sont intérieures à celles de ce polyèdre sur ce même plan, qui sont vus ou cachés, suivant que leurs points de rencontre avec le prisme tombent sur des faces visibles ou cachées sur le plan de projection correspondant. Ainsi, par exemple m_2, m'_2 tombant sur une

face visible en projection horizontale et cachée en projection verticale, m_2n_2 sera visible et $m'_2\mu'_2$ caché.

268. Intersection d'une droite et d'une pyramide (*fig.* 227, pl. XVI). — Soient ABCDE, (s, s'), (d, d') la base de la pyramide placée sur le plan horizontal, les projections du sommet et celles de la droite donnée.

Conduisons, par la droite (d, d') et par le sommet s, s' de la pyramide, un plan sécant auxiliaire, dont la trace horizontale th à été obtenue en prenant d'abord celle t, t' de d, d', ensuite celle h, h' de la droite de jonction du point s, s' à l'un quelconque g, g' des points de d, d'; cette trace th du plan auxiliaire détermine, en (θ_1, θ'_1), (θ_2, θ'_2) celles des droites de rencontre du plan sécant auxiliaire et de la pyramide; en tirant les droites $(s\theta_1, s'\theta'_1)$, $(s\theta_2, s'\theta'_2)$ on a les projections de la section de la pyramide et du plan, d'où l'on déduit celles (m_1, m'_1), (m_2, m'_2) que l'on cherche.

On eût pu, sans rien changer aux épures 226, 227, présenter les solutions des deux derniers problèmes de la manière suivante. Prenons sur le plan horizontal coordonné la projection centrale de la pyramide (le prisme est une pyramide particulière) et de la droite d, d', en adoptant le point s, s' (placé à l'infini sur les arêtes latérales dans le cas du prisme) pour centre de projection, et cherchons les points communs aux deux projections. La projection de la pyramide n'est autre que la base de ce corps. Quant à celle de d, d' elle passe d'abord par t, qui est à lui-même sa propre projection centrale et ensuite par h projection de g, g'; c'est donc la droite th. On en conclut que les points de rencontre inconnus ont leurs projections centrales en θ_1, θ_2, en relevant ces points on trouve ceux (m_1, m'_1), (m_2, m'_2) qu'il fallait construire.

269. Visibilité d'une droite par rapport à une pyramide. — La présente question a la même importance que celle du paragraphe **267** et se traite pareillement, on suivra donc facilement sa solution sur l'épure 227.

270. Intersection de deux polyèdres. — La question se résout en principe par la construction de l'intersection des plans conduits par les diverses faces, problème bien connu du lecteur, mais dont l'application faite sans méthode conduirait à de très nombreux tatonnements qu'il importe de réduire, sinon d'éviter.

Pour cet effet, nous allons énumérer et résoudre divers problèmes établissant par leur enchaînement une méthode régulière de construction.

271. Problème. — *Trouver l'intersection de deux faces de polyèdres.* — Soient ABCDEF, GHIJKL (fig. c_3) les faces dont on cherche la commune intersection. On construit celle PQ des plans de ces faces

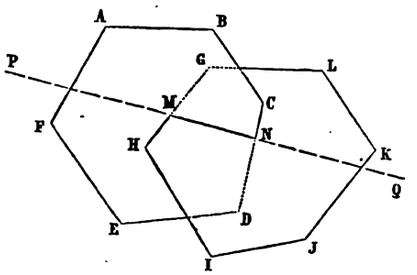


Fig. c_3.

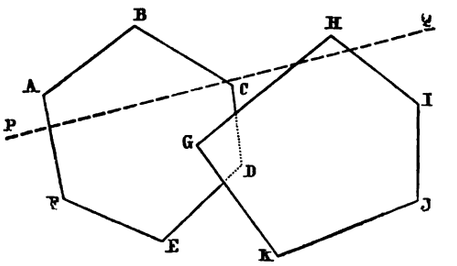


Fig. c_4.

(§ 66) et on la limite en M, N, de manière à ne conserver que la partie de cette droite intérieure aux périmètres des deux faces données, seule utile dans la question. Quand l'intersection PQ (fig. c_4) n'offre pas de partie commune aux faces ces dernières ne se coupent pas.

Enfin, la figure peut offrir une troisième disposition : la partie utile MN de PQ (fig. c_5) peut contrairement à ce qui a lieu dans la figure c_3, se terminer au périmètre de la même face.

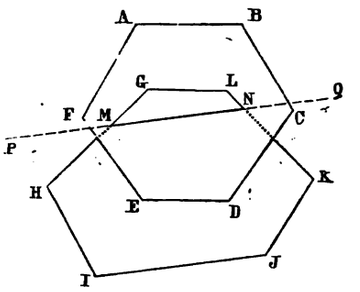


Fig. c_5.

272. Problème. — *Trouver un point utile de l'intersection de deux polyèdres.*

Méthode des sections. — Nous ne connaissons pas de méthode générale donnant un point utile de l'intersection, c'est-à-dire un point placé à l'intérieur du périmètre des deux faces qui le contiennent. Le plus sûr moyen, dans les applications, consiste à le chercher par un examen attentif de la position et de la forme des polyèdres.

Quand ce moyen est inefficace il faut recourir à la méthode des sections.

Elle consiste à couper les deux polyèdres par un plan auxiliaire et à prendre les points de croisement R, S des périmètres ABCDEF, HKLMNP (fig. c_6) des deux sections qu'il détermine.

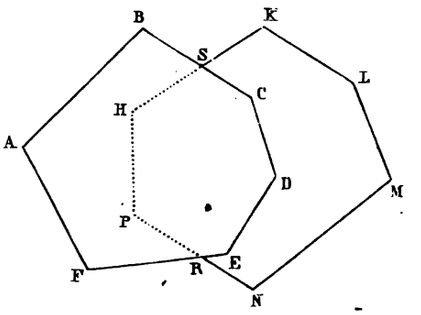


Fig. c_6.

Ces points R, S ne sont autres que des points utiles des polygones de rencontre. Si les périmètres de section ne donnaient aucun point de croisement, on devrait changer un nombre suffisant de fois la position de ce plan sécant auxiliaire. C'est donc seulement par tâtonnements successifs qu'on peut arriver en général à construire un premier point utile de l'intersection.

273. Problème. — *Connaissant un point utile* M *de la commune intersection de deux polyèdres, achever la détermination de cette ligne* (fig. c_7).

Le point M est à deux faces ABCDE, FGHIJ se coupant utilement, soit PQ la partie utile de leur intersection ; prenons l'une quelconque Q des extrémités de cette ligne, ce point est sur l'arête ED qui se trouve elle-même à la rencontre de deux faces ABCDE, EDKL, abandonnons celle ABCDE de ces faces que nous venons d'employer et remplaçons-la par la face adjacente EDKL, tout en conser-

vant la seconde face FGHIJ déjà employée du second polyèdre, par la rencontre QR de ces faces, nous obtiendrons un nouveau côté utile du contour cherché.

L'extrémité R de la ligne que nous venons d'obtenir se trouve sur l'arête EL, qui appartient à la face EDKL déjà employée, abandonnons-la pour la remplacer par la face adjacente ELON, etc.

En continuant ainsi on retombera, si les deux polyèdres sont fermés, sur le point P ; l'une des lignes de l'intersection sera ainsi déterminée.

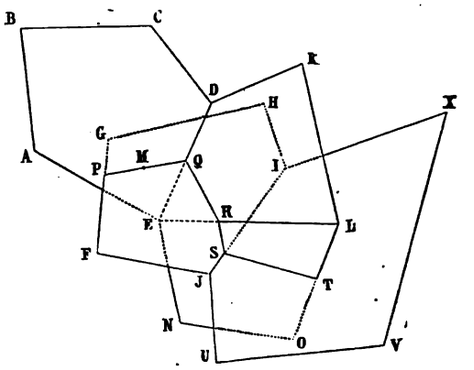


Fig. c_7.

On devra alors s'occuper de vérifier l'existence d'autres lignes de rencontre ; ce que l'on fera en cherchant, par la méthode connue, s'il existe des points utiles extérieurs à la ligne trouvée, et, en opérant sur eux comme sur le point M pris en premier lieu, on trouvera ainsi des nouvelles lignes polygonales faisant partie de l'intersection que l'on cherche.

Remarque importante. — La méthode qui vient d'être donnée pour tracer le polygone de rencontre de deux polyèdres peut encore servir lorsque, après avoir construit les sommets de ce polygone par un procédé quelconque, on veut les joindre dans un ordre convenable.

274. Application. — *Construire l'intersection de deux cubes qui ont une diagonale verticale commune.* — Cherchons d'abord à établir les bases de la construction des projections d'un cube ayant une de ses diagonales verticale.

Soient AB cette ligne (fig. c_8) et ACDBEHGF le cube correspondant.

Le contour ACEB est formé de trois côtés égaux, inclinés sur la diagonale AB d'angles égaux, on

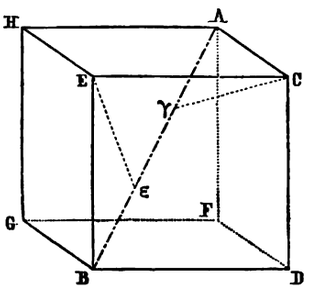


Fig. c_8.

en conclut que les projections de ces côtés sur AB sont égales ; ayant projeté C en γ, E en ε, on peut donc dire que la diagonale AB se trouve divisée par ces points γ, ε en trois parties égales. Ajoutons pour

terminer, que les droites AC, AH, AF sont aussi égales et également inclinées sur la même diagonale AB, et que, par suite, les projections sur cette ligne des points C, H, F se font en un seul point γ; pareillement les sommets G, E, D, se projettent en ε sur la diagonale donnée. On voit par là que les six sommets dont on poursuit la construction peuvent constituer deux groupes de trois points respectivement placés dans deux plans perpendiculaires à la diagonale donnée et passant par les points γ, ε qui la divisent en trois parties égales.

Passons maintenant à la construction de l'un des cubes. Soient ab, $a'b'$ (*fig.* 228, pl. XVII) les projections de la diagonale donnée, pour achever la détermination du solide, nous donnerons encore la projection horizontale bm de l'une de ses arêtes prolongée.

Partageons, au points γ', ε', la projection verticale de la diagonale donnée en trois parties égales, et, par ces points de division, conduisons des plans horizontaux P', Q'; nous savons que chacun de ces plans devra contenir trois sommets du cube. Cherchons à mettre en place ces deux groupes de sommets; en vue de ce but, imprimons une rotation au cube afin d'amener le côté BM dans un plan de front; après ce déplacement, la face perpendiculaire à ce côté se projettera verticalement suivant une seule droite formant avec la projection verticale de ce même côté un angle droit dont le sommet se construit avec facilité; effectivement, il doit appartenir en premier lieu à la circonférence d'un cercle décrit sur $a'b'$ comme diamètre, en second lieu, à Q', ce point sera donc en δ', la projection horizontale correspondante sera δ et rien de plus facile que de ramener le sommet δ, δ' sur sa position primitive d, d'.

La symétrie de la figure permet alors de tracer les projections horizontales des arêtes issues de b, b'; il faut, en effet, que leurs projections bd, be, bg sur ce plan coordonné, soient égales et forment des angles égaux entre eux et valant par suite 120°; avec ces deux conditions on peut tracer, connaissant l'une bd de ces droites, les deux autres bc, bg; quant aux projections verticales correspondantes, ou les obtient en relevant à l'aide de lignes de rappel, e, g en e', g' sur Q'.

Les projections des faces du cube doivent se faire suivant des parallélogrammes sur chaque plan de projection; construisons donc sur les couples de côtés (bd, be), (be, bg), (bg, bd) des parallélogrammes, et nous aurons les projections horizontales c, h, f des trois derniers sommets inconnus; en procédant de même on obtiendra leurs projections verticales correspondantes c', h', f' qui devront, si l'épure est exactement faite, se trouver d'abord sur les lignes de rappel menées par les premières, ensuite sur P'. Reste, pour achever le tracé des deux projections à joindre le point a' aux points c', h', f' et le point a aux points correspondants c, f, h.

On voit facilement que la projection horizontale est composée des côtés d'un hexagone régulier et de celles de ses diagonales qui passent par son centre. Ce tracé terminé reportons le cube trouvé (*fig.* 228, pl. XVII), sur la figure 229 de la même planche et combinons-le avec un second cube de même diagonale AB.

Pour plus de régularité dans la figure, plaçons les deux cubes symétriquement par rapport au plan de front conduit par leur commune diagonale et de manière que les sommets des hexagones, formant leurs projections horizontales, soient équidistants.

Pour construire le polygone de rencontre des cubes nous chercherons simplement, profitant de la symétrie, la *troncature* faite par la face $a'u'v'w'$, $auvw$ sur l'angle trièdre du sommet f, f' : en examinant attentivement la figure on reconnaît bientôt que les droites (fd, $f'd'$), (uv, $u'v'$) symétriquement placées par rapport au plan de profil conduit par la diagonale ab, $a'b'$ se coupent en un point k, k' de ce plan de symétrie, de même les droites (vw, $v'w'$), (fg, $f'g'$) se coupent en m, m' et comme a, a'

appartient au triangle de la *troncature*, elle se fera suivant *amk*, *a'm'k'*. En procédant de même pour tous les sommets non communs de l'un et de l'autre cube, on achève de déterminer l'intersection des deux polyèdres donnés. Afin de compléter cette étude, nous avons représenté les diverses combinaisons qui peuvent se faire avec les corps : ainsi la figure 229 donne les projections du solide constitué par l'ensemble des deux cubes ; sur la figure 230 on a représenté le cube primitif (donné par la figure 228) supposé plan et existant seul, en supprimant la portion de ce cube comprise dans l'autre.

Enfin, la figure 231 représente le solide commun aux deux cubes supposés pleins et opaques, on y reconnaît aisément que ce solide est un dodécaèdre équifacial.

275. Observation relative aux hachures. — Dans les épures d'intersection de corps, on place des hachures, dirigées dans un sens arbitraire, sur les parties coupées visibles ; en outre, il est bon, lorsque ces parties sont formées de plusieurs surfaces, et surtout quand ces surfaces ont des lignes communes, de changer le sens des hachures placées sur les diverses surfaces. On trouvera sur l'épure 230 l'application des conventions que nous venons d'indiquer.

276. Intersection de pyramides. — En considérant le prisme comme une pyramide dont le sommet est à l'infini, nous sommes conduits à chercher :

1° l'intersection de deux pyramides ;

2° celle d'une pyramide et d'un prisme ;

3° celle, enfin, de deux prismes.

Il importe, avant d'aborder la solution de ces trois questions, de faire observer qu'elles se résolvent sans tâtonnements, contrairement à ce qui a lieu pour les polyèdres quelconques.

277. Premier problème. — *Construire l'intersection de deux pyramides.* — Nous allons supprimer la projection verticale inutile à l'explication de l'épure et que l'on construirait aisément à l'aide de lignes de rappel. Dans toutes les constructions qui vont être indiquées, il ne sera donc question que de projections horizontales.

Soient (*abcde*, *ghklm*), s et σ, les projections des deux bases et celles des sommets des pyramides données (*fig.* 232, pl. XVI).

Supposons, en outre, que l'on ait préalablement construit celle pq de la commune intersection des plans de base, et celles t, θ des traces sur ces mêmes plans de la droite de jonction des sommets S, Σ.

Dans la recherche de l'intersection de deux polyèdres quelconques, nous avons construit les côtés des polygones de rencontre ; pour l'épure actuelle, au contraire, nous construirons les sommets de ce polygone que nous unirons ensuite, deux à deux et dans un ordre convenable, par des lignes droites. Ces sommets s'obtiendront en conduisant par les arêtes de chaque pyramide des plans passant par les sommets de l'autre, et ce tracé sera régularisé en adoptant simplement des plans sécants auxiliaires passant par les diverses arêtes et par la droite SΣ des sommets de la pyramide. Dans ces conditions les plans auxiliaires donneront une feuillée et les projections de leurs traces sur les plans de base deux faisceaux de droites dont les sommets seront en t, θ et dont les rayons correspondants se couperont sur la droite pq et viendront successivement passer par les sommets des bases.

Avant de procéder à la construction d'un sommet du polygone de rencontre, il importe, si l'on veut éviter tout tâtonnement, de tracer les plans limites, c'est-à-dire ceux qui comprennent entre eux tous les plans sécants auxiliaires utiles à la détermination complète de l'intersection.

278. Plans limites. — L'un des plans cherchés a pour traces, sur les plans des deux bases, les droites projetées en θ_{ρ_1}, t_{ρ_1}, dont l'une θ_{ρ_1} coupe la projection de la base correspondante en un seul point b, tandis que l'autre t_{ρ_1} coupe celle de la seconde base d'une manière quelconque ; on

trouve de même le second plan limite $t0\rho_7$. Ces deux plans sont bien ceux que nous cherchons, car tout plan conduit par SΣ et compris entre eux, atteindra les deux pyramides, et au contraire, tout plan passant par la même ligne et extérieur à l'espace angulaire compris entre les plans limites ne pourra atteindre qu'une seule pyramide.

279. Construction d'un point quelconque du polygone de rencontre. — Les divers rayons des faisceaux devront successivement passer par chacun des sommets a, b, c, h, k, l, m, des deux bases compris entre les plans limites.

Indiquons la construction relative à l'un d'eux θa ; il coupe pq en ρ_4, son rayon conjugué s'obtient alors en tirant la droite $\rho_4 t$; le plan sécant correspondant, qui a pour traces sur ceux des bases les droites projetées suivant les rayons que nous venons de tracer, coupe la pyramide de sommet S suivant deux droites dont l'une est l'arête projetée en sa, et dont la seconde inutile à l'épure n'y est pas figurée ; ce même plan auxiliaire rencontre l'autre pyramide suivant deux droites projetées en σv_4, σw_4, et les points de croisement i_4, j_4, de ces dernières avec la droite sa, donnent deux sommets quelconques de la projection du polygone d'intersection. En renouvelant ce tracé, comme on le voit sur l'épure, pour tous les sommets des bases, indiqués plus haut, on construit aisément les divers sommets du polygone d'intersection.

280. Pénétration. Pénétration réciproque. Arrachement. — Lorsque les deux plans limites sont relatifs à la même pyramide, c'est-à-dire quand ils coupent tous deux suivant une seule arête la même surface, cette dernière pénètre dans l'autre suivant une première ligne, pour en sortir suivant une deuxième ; on dit alors qu'il y a *pénétration*. Comme cas particulier chaque plan limite peut rencontrer les deux pyramides suivant une seule arête ; on trouve dans ce cas deux polygones d'intersection se rejoignant en deux de leurs points respectivement placés à la rencontre des arêtes contenues dans chaque plan limite. Il y a alors *pénétration réciproque*. Enfin, si l'un des plans limites coupe l'une des pyramides suivant un polygone et que l'autre plan limite coupe la seconde pyramide encore suivant un polygone : on dit qu'il y a *arrachement*. C'est le cas représenté sur la figure 232.

281. Jonction des points. — Cette question demande de l'attention, et, bien qu'on puisse la résoudre par un simple examen de la figure de l'espace, il est souvent utile, si l'on veut éviter les erreurs, de recourir à l'une des méthodes qui suivent.

282. Méthode générale. — La méthode précédemment donnée (§ **273**, Rem.) pour la jonction des points de rencontre de deux polyèdres quelconques, s'applique sans difficulté à l'épure qui nous occupe, nous allons néanmoins en indiquer une autre dont l'avantage est d'être également applicable, comme nous le verrons plus loin, dans la recherche de l'intersection des surfaces coniques quelconques, recherche qui n'est autre que la généralisation du présent problème, attendu que, d'après la définition donnée au paragraphe **8**, la surface latérale de la pyramide peut-être considérée comme une surface conique dont la directrice serait polygonale.

283. Méthode des projections centrales. — Imaginons un point mobile qui décrirait le polygone cherché d'un mouvement continu en partant de l'un de ses sommets, et prenons la projection centrale de ce mobile sur chacun des plans de base, en plaçant le centre de projection au sommet correspondant des pyramides de façon que le contour polygonal cherché soit alternativement projeté sur chacune des bases. Il est alors manifeste que ces projections devront également décrire les deux bases d'un mouvement continu en rebroussant chemin sur les plans limites. Enfin, si l'on projette sur la droite PQ les points mobiles qui décrivent les bases, en adoptant le centre de projection θ pour

la base de droite, et t pour celle de gauche, on trouvera un seul et même mouvement encore continu avec rebroussement aux points projetés en ρ_1, ρ_7.

En substituant à chacun de ces mouvements sa projection horizontale et en les considérant dans un ordre inverse, on pourra trouver la marche de la pointe traçante qui doit unir les sommets du polygone de rencontre.

Afin d'éviter l'un des rebroussements, nous partirons de l'un des plans limites et nous aurons les mouvements simultanés suivants : 1° sur pq d'abord $\rho_1\rho_2\rho_3 \ldots \rho_7$ dans le sens π_1, ensuite dans le sens π_2, le chemin $\rho_7\rho_6\rho_5 \ldots \rho_1$; 2° sur le polygone de droite le chemin correspondant indiqué par les flèches $f_1, f_2, f_3, \ldots f_8$; 3° sur l'autre polygone, celui que les flèches $F_1, F_2, F_3, \ldots F_{10}$ indiquent; 4° enfin, pour la pointe qui doit tracer le contour cherché, celui que les flèches $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots \varphi_{14}$ indiquent à leur tour.

Nous venons d'appliquer la méthode des projections centrales dans le cas de l'arrachement, on trouvera plus loin un exemple de son emploi pour la pénétration.

284. On a figuré (pl. XVI) diverses combinaisons des pyramides : la première donne (*fig.* 232) la projection du solide constitué par leur ensemble formant un seul et même corps; la seconde (*fig.* 233) donne la projection de l'une des pyramides entaillée par l'autre; des hachures ont été placées sur la figure en se conformant aux conventions du paragraphe **274**. Enfin la dernière donne (*fig.* 234), la projection horizontale du solide commun aux deux pyramides.

285 Visibilité du polygone d'intersection.—Pour qu'un côté soit vu, il faut et il suffit, si l'on représente l'ensemble des deux pyramides comme dans la figure 232, qu'il se trouve à la rencontre de deux faces également vues. Quand l'un des polyèdres est supprimé (*fig.* 233) le contour $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1h_1k_1j_1m_1$ placé sur des faces vues du polyèdre conservé est également vu; l'autre partie de l'intersection est cachée, sauf cependant les segments o_1p_1, p_1q_1, r_1a_1, placés à l'extérieur du contour indiqué plus haut, lesquels deviennent en effet visibles par suite de la suppression de la partie du polyèdre figuré comprise dans celui que l'on a enlevé.

Pour le solide commun (*fig.* 234) on remarque que celles de ses arêtes qui étaient visibles sur la figure 232 le sont encore sur celle qui nous occupe et on achève de régler sa visibilité par la méthode du mobile (§ **236**).

286. Visibilité des arêtes latérales des pyramides. — Pour la régler il suffit de recourir au paragraphe **269**.

287. Ponctuation. — Dans le tracé des épures, lorsqu'on suppose un corps supprimé, il importe de le figurer, sans pour cela gêner la lecture de l'épure des parties conservées, à cet effet on représente le corps enlevé en traits mixtes formés de petits traits séparés par un point, comme on le voit sur la *fig.* 233, pl. XVI.

288. Second problème. — *Construire l'intersection d'un prisme et d'une pyramide.* — La droite commune aux divers plans auxiliaires passe alors par le sommet de la pyramide et par le point à l'infini des arêtes latérales du prisme : c'est la parallèle à ces arêtes conduite par le sommet de la pyramide. Sauf cette remarque, nous n'avons rien de nouveau à indiquer sur cette question que l'on résout comme la précédente.

289. Troisième problème. — *Construire l'intersection de deux prismes.* — Nous appliquerons toujours la méthode du premier problème; mais en changeant les données afin de présenter la question sous un nouveau jour. C'est dans ce but que les deux bases inférieures des prismes ABCDEG, HIJKL (*fig.* 235, pl. XVIII) ont été placées sur le plan horizontal de projection ; toujours dans le même but

on a choisi, comme on pourra s'en assurer un peu plus loin, le cas de la pénétration, et, afin d'obtenir une figure plus régulière, on a limité les prismes à l'aide de leurs bases supérieures, dont les projections horizontales figurées en $a_1b_1c_1d_1e_1g_1$, $h_1i_1j_1k_1l_1$ sont nécessairement égales à celles des bases inférieures précédemment tracées et offrent leur orientation. Tirons les droites de jonction des sommets homologues afin d'obtenir les projections horizontales des arêtes latérales, pour chaque prisme.

Les plans sécants auxiliaires devront passer par les points à l'infini dans les deux directions des arêtes latérales, ou en d'autres termes, ces plans devront être dirigés parallèlement à ces arêtes ; pour achever de déterminer le problème supposons que l'on ait préalablement construit la trace horizontale R de l'un d'eux.

290. Construction d'un point quelconque du polygone de rencontre. — Cherchons, par exemple, les points de l'arête projetée en Aa_1 ; le plan sécant conduit par cette droite a pour trace horizontale la parallèle R_1 à R menée par la trace A de l'arête, ce plan coupe les faces du second prisme suivant des parallèles aux arêtes latérales de ce polyèdre menées par les points θ_1, θ_2, et l'on trouve, aux points de croisement b_6, b_4, des projections θ_1t_1, θ_2t_2 de ces parallèles avec Aa_1, les projections de deux points du polygone cherché.

291. Plans limites. Nature de la section. — Les traces horizontales des points limites P, Q, rencontrent en un seul point la base du prisme pentagonal, on en conclut que ce dernier pénètre dans l'autre.

292. Jonction des points. — Dans le cas de la pénétration la jonction des points se fait plus aisément que dans le cas de l'arrachement précédemment étudié. En effet, observant que la section comprend deux polygones, l'un d'entrée, l'autre de sortie, on est conduit à les tracer séparément. Pour obtenir l'ordre suivant lequel les points de l'une des lignes d'intersection doivent être réunis par des droites, on prendra celui des points de rencontre placés dans les plans sécants qui se succèdent lorsqu'on parcourt simultanément la base complète du prisme pentagonal dans le sens des flèches φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, et l'un des segments de la base de l'autre prisme compris entre les plans limites dans le sens des flèches f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6. On trouvera ainsi le polygone d'entrée $a_1a_2a_3a_4\ldots a_8a_9$. Quant au polygone de sortie l'ordre de jonction des points sera donné en parcourant, toujours dans le sens des mêmes flèches, le polygone pentagonal complet et en substituant au déplacement suivant les flèches $f_1\ldots f_6$, celui qui se trouve indiqué par les flèches $F_1F_2\ldots F_6$, ce qui conduit au polygone $b_1b_2b_3\ldots b_8b_9$. L'épure représente le prisme hexagonal supposé plein et opaque, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le prisme pentagonal, ou, en d'autres termes, le solide figuré est un prisme hexagonal percé d'un trou prismatique pentagonal.

DÉVELOPPEMENT DES POLYÈDRES. LIGNE MINIMUM

293. Développement des polyèdres. — Pour développer un polyèdre défini par ses projections il suffit de construire sur celles-ci les éléments nécessaires à la détermination de la vraie grandeur des faces ; puis, de dessiner ces dernières tout en les réunissant dans l'ordre qui résulte de leur liaison et des arêtes que l'on suppose dédoublées ; comme ce dédoublement des arêtes peut s'effectuer de plusieurs manières, il s'ensuit que le développement d'un polyèdre peut prendre diverses formes correspondantes.

294. Ligne minimum. — Proposons-nous de trouver la ligne de longueur minimum unissant deux points de la surface d'un polyèdre sans la quitter. La détermination de cette ligne est une application immédiate du théorème qui suit :

295. Théorème. — *Parmi les différents développements de la surface d'un polyèdre convexe il y en a toujours un pour lequel la ligne minimum unissant deux des points de cette surface, sans la quitter, se transforme en une seule droite.* 1° Supposons d'abord que les sommets de la ligne minimum ne tombent pas sur ceux du polyèdre, et considérons deux des côtés *consécutifs*, MN, NP (fig. c_{10}) de cette ligne

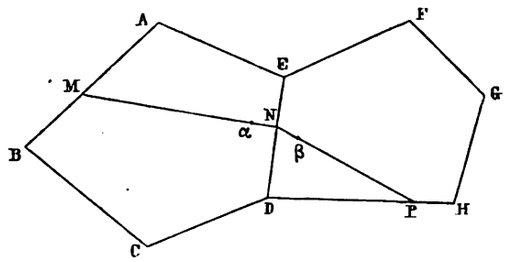


Fig. c_{10}.

ainsi que les faces ABCDE, EFGHD qui les contiennent ; nous allons démontrer que les droites MN, NP se placent en prolongement l'une de l'autre lorsqu'on effectue le développement du polyèdre sans dédoubler l'arête ED du point N.

Prenant en effet deux points α, β, l'un sur MN, l'autre sur NP, suffisamment voisins pour que l'on puisse tracer sur le développement une droite unissant ceux qui leur correspondent sans sortir des polygones développés ; on voit que cette droite sera nécessairement la transformée de la ligne minimum unissant sur la surface α à β, et comme toute portion d'une ligne minimum doit être également minimum, on en conclut que cette même droite sera aussi la transformée de la ligne brisée αNβ, ou que les trois points α, N, β seront en ligne droite sur le développement, ou encore que MN, NP le seront également, sur ce même développement.

Faisons voir maintenant qu'une face *abcde* contenant l'un des côtés MN de la ligne minimum

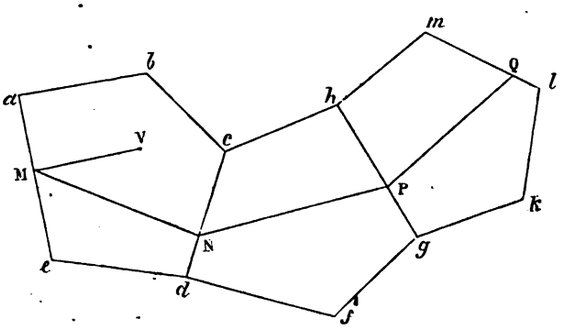


Fig. d_1.

(fig. d_1) ne saurait contenir d'autres points de cette ligne. En effet pour qu'elle en contînt un V il faudrait admettre l'existence sur cette face d'une ligne brisée minimum VMN, qui devrait, par conséquent, être moindre que la droite de jonction des points N, V; l'absurdité de l'hypothèse faite est ainsi rendue évidente.

Pour achever la première partie de la démonstration considérons, en conservant la même figure, une portion quelconque MNPQ de la ligne minimum et les faces *abcde*, *cdfgh*, *hgklm*, qu'elle traverse : chacune de ces faces devra contenir un côté rectiligne de la ligne minimum et ne saurait, d'après la démonstration donnée plus haut, contenir d'autres points de cette ligne.

Il faut maintenant prouver que le développement peut se faire sans dédoubler les arêtes *ae*, *cd*, *hg*, *ml*, etc., qui passent par les divers sommets de la ligne minimum. Rien n'empêche, en premier lieu, le dédoublement des arêtes ne contenant pas de sommet de la ligne minimum, on peut donc faire abstraction des faces qui ne contiennent pas cette ligne et supposer qu'on les a supprimées ; rien n'empêche, en second lieu, de dédoubler les arêtes qui, sans contenir de point de la ligne étudiée, pourraient être communes aux faces conservées. Cela fait, les faces ne sauraient se toucher que suivant des arêtes contenant des points de la ligne minimum et comme chacune d'elles ne saurait elle-même contenir qu'une droite de cette ligne on voit qu'une même face ne peut alors en toucher plus de deux autres.

En définitive tout se réduit à effectuer le développement sur un plan de faces réunies deux à deux par une seule arête, sans dédoubler les arêtes communes ; lequel peut évidemment se faire par des rotations successives autour des arêtes communes, rotations que rien ne saurait maintenant empêcher ; et nous venons de voir que dans ces conditions les côtés successifs de la ligne minimum se placent sur une même droite ; donc pour le cas qui nous occupe le théorème est démontré.

2° Examinons actuellement si le contour minimum peut passer par l'un des sommets S du polyèdre (fig. d_3).

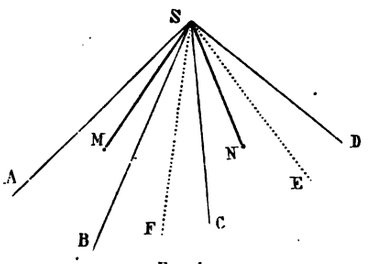


Fig. d_3.

Soient ASBCDEF l'angle solide correspondant et MSN une portion de la ligne minimum, passant au point S, cette portion devant être minimum on pourra raisonner sur elle sans se préoccuper des lignes qui la précèdent et qui la suivent. Le polyèdre étant convexe l'angle S l'est également, et la somme de ses faces est inférieure à quatre angles droits, on en conclut que les droites MS, NS partagent les faces de cette angle en deux groupes dont l'un donne une somme d'angles inférieure à quatre angles droits, mais qui peut devenir supérieure ou égale à deux angles droits, tandis que l'autre donne une somme inférieure à deux angles droits ; par suite, si l'on fait le développement de l'angle solide ouvert suivant une de ses arêtes on peut trouver l'une des trois positions indiquées ci-dessous (fig. d_3, d_4, d_5).

Pour la fig. d_3 la droite de jonction des points M_1, N_1 traverse l'espace angulaire $B_1S_1B'_1$ extérieur au développement, et ne fournit par suite aucune indication ; mais, en recourant à la figure d_5 donnant le développement du même angle solide fait différemment, on reconnaît que la ligne minimum serait donnée par l'enroulement de la droite M_1N_1 qui ne passe pas par le sommet de l'angle. Pour la figure d_4, dans laquelle M_1S_1, N_1S_1 ne forment qu'une

même droite, il semblerait que cette ligne dût fournir la longueur minimum ; mais, pour cela il faudrait que $M_1S_1N_1$ fût inférieur aux lignes qui la précèdent et qui la suivent tout en partant des mêmes extrémités M_1, N_1. En examinant la figure on reconnaît que, d'un côté de M_1N_1, pour les lignes telles que $M_1\alpha_1\varphi_1\epsilon_1\delta_1N_1$, la condition est évidemment satisfaite; mais que, de l'autre, elle ne l'est point, car les lignes telles que $M_1\beta_1$, $\beta'_1\gamma_1N_1$ sont interrompues sur l'arête dédoublée. Il faut alors recourir à la figure conjuguée d_5, qui fait ressortir l'existence de la droite M_1N_1 donnant par son

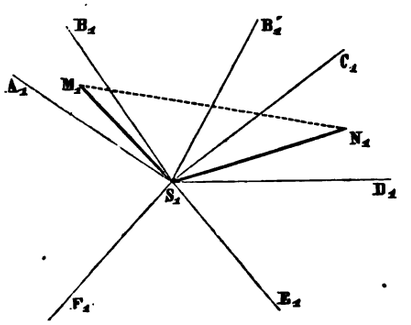


FIG. d_3.

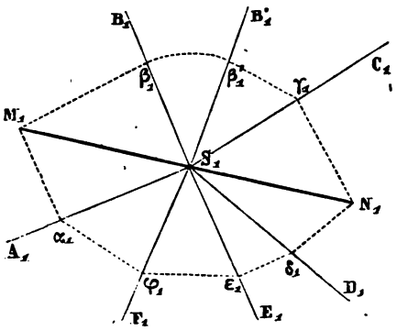


FIG. d_4.

enroulement un chemin moindre et ne passant toujours pas par le sommet du polyèdre. En somme on peut dire que la ligne minimum ne saurait passer par l'un des sommets du polyèdre. Quand on trouvera dans une application la disposition de la figure d_4, on devra procéder à un nouveau rabattement, comme nous le montrerons bientôt par un exemple.

296. Application. — *On donne les projections horizontales* ABCDEG, $a_1b_1c_1d_1e_1g_1$, *des bases d'un prisme, la hauteur h de ce prisme ainsi que les projections horizontales m, n de deux points placés sur les faces*

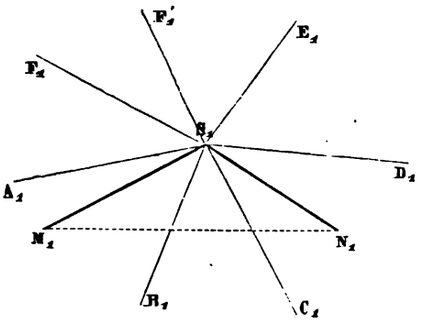


FIG. d_5.

qui ont leurs traces en GE, AB; *on demande de déterminer par deux projections la ligne minimum qui unit les deux points* M, N *sans quitter le prisme* (*fig.* 236, pl. XVIII). Le tracé de la projection horizontale du prisme s'achève avec la plus grande facilité, nous le supposerons donc effectué, et nous passerons à la recherche du développement. On facilite la construction en déterminant la section droite en véritable grandeur; section qui donnera la longueur des hauteurs des divers parallélogrammes qui constituent les faces latérales dont on cherche le développement.

296. Section droite d'un prisme oblique. — Conformément aux indications du paragraphe **243**

on peut amener le plan vertical à être perpendiculaire au plan sécant, ce qui se fera en prenant simplement un nouveau plan vertical parallèle aux arêtes latérales. La ligne de terre $x_1 y_1$ sera donc parallèle aux projections horizontales de ces arêtes; on construit aisément la projection verticale nouvelle du prisme à l'aide de la hauteur connue h, ainsi que les traces $P\alpha P'$ du plan sécant qui doivent être respectivement perpendiculaires aux projections des arêtes latérales.

Les projections verticales des sommets de la section droite se placent immédiatement en a'_3, b'_3, c'_3, d'_3, e'_3, g'_3 et, sans construire la projection horizontale de la section droite inutile à l'épure actuelle, on passe à la recherche de sa vraie grandeur en la rabattant autour de la trace αP prise pour charnière, ainsi l'on trouve, après quelques tracés fort simples que l'épure indique suffisamment, en $A_3B_3C_3D_3E_3G_3$, la véritable grandeur de cette section.

La disposition des tracés que nous venons d'adopter a non seulement l'avantage de simplifier les constructions qui viennent de le motiver, mais encore elle facilite, comme on va le voir, l'ensemble des constructions ultérieures.

Nous arrivons maintenant au développement. Ouvrons le prisme suivant l'arête Gg_1, $g'g'_1$ par exemple, et appliquons-le sur le plan de front conduit par cette arête.

La section droite se développe sur P', et ses sommets viennent en des points que l'on obtient en portant :

$$g'_3E_4 = G_3E_3, \quad E_4D_4 = E_3D_3. \quad D_4C_4 = D_3C_3, \text{ etc.},$$

les perpendiculaires à $\alpha P'$ menées par les points E_4, D_4, C_4..... donnent, après le développement, les positions des arêtes latérales.

D'autres part, pendant le développement les sommets des deux bases se déplacent dans des plans perpendiculaires à $g'g'_1$, qui ont pour traces sur le plan de front qui contient le développement, des droites dont les projections verticales sont les perpendiculaires à $g'g'_1$ menées par a', b', c',...; on trouve ainsi les transformées $g'\,E_2D_2C_2B_2A_2G_2$, $g'_1e_2d_2c_2b_2a_2g_2$ de ces bases.

Mettons en place, sur la figure développée, les points donnés M, N; à cet effet menons par chacun d'eux des parallèles aux arêtes latérales du prisme; ces parallèles ont pour projections horizontales les droites $m\mu$, $n\nu$, qui rencontrent les côtés de la base supérieure au points μ, ν, lesquels correspondent sur le plan vertical, à μ', ν', d'où l'on déduit, d'abord, sur le développement, les points μ_2, ν_2, ensuite, sur la projection verticale, les points m', n' qui répondent aux points donnés; de ces derniers on tire, à l'aide du tracé général déjà appliqué à plusieurs points, les positions M_2, N_2 des points donnés après le développement du prisme.

La transformée par développement de l'une des lignes minimum n'est autre que la droite de jonction des points M_2, N_2, laquelle s'enroule sur le prisme en $m'u't's'r'n'$, $mutsrn$, sans difficulté; ajoutons que la droite M_2N_2, donne dans sa véritable grandeur la ligne minimum.

Pour construire la seconde solution il faut rendre contiguës les faces qui la contiennent; pour le faire il suffirait de reporter la face développée en $E_2e_2g'_1g'$ à la suite de $A_2a_2g_2G_2$ en ayant soin d'entraîner avec elle le point M_2; mais, il est plus simple de mettre M_2 en place dans sa seconde position sur le développement. Il viendra en M_3 à une distance ω_2M_3 de l'arête G_2g_2 égale à ω_2M_2 et comptée sur le prolongement de $m'M_2$.

La seconde ligne minimum développée en vraie grandeur est donc la droite M_3N_2; on l'enroule facilement comme la première, et l'on trouve, en $m'v'w'n'$, $mvwn$, ses deux projections.

Il est un cas exceptionnel signalé à la fin du précédent paragraphe, c'est celui de la ligne minimum

qui unit deux points placés après le développement, en K_2L_2 sur une droite passant par B_2; nous allons vérifier que la droite K_2L_2 ne répond pas au minimum de la distance. Reportons pour cela la base dans sa véritable grandeur suivant $A_2B_2C_3D_3E_3G_3$, considérons les faces latérales $A_2B_2b_2a_2$, $A_2a_2g_2G_2$ comme appliquées sur le nouveau développement et transportons suivant $\lambda B_2C_3\lambda_1$, $\lambda_1C_3D_4\lambda_2$ les deux faces latérales traversées par B_2L_2. En reportant alors, à l'aide du tracé indiqué sur la figure, L_2 en L_3, et en tirant la droite K_2L_3 on aura dans sa véritable grandeur la ligne minimum. C'est par l'enroulement de K_2L_3 que l'on pourrait avoir les projections de la plus courte distance qui sépare les deux nouveaux points donnés sur la surface du prisme.

DÉTERMINATION DES SPHÈRES INSCRITES OU CIRCONSCRITES AUX POLYEDRES

298. Lorsque le polyèdre est régulier, on peut construire facilement le centre commun à la sphère inscrite au polyèdre et à celle qui lui est circonscrite; ce point est donné en effet par la rencontre de deux perpendiculaires aux plans de deux faces non parallèles, menées respectivement par le centre de chacune d'elles. Les rayons se trouvent par les vraies grandeurs des distances qui séparent le centre que l'on vient de construire à celui de l'une des faces, ou à l'un des sommets du polyèdre. Lorsque le polyèdre est irrégulier, le problème est généralement impossible, excepté cependant pour le tétraèdre qui est toujours inscriptible et circonscriptible à la sphère. Pour préciser la question à l'aide d'un exemple utile à connaître, entrons dans le détail du tracé pour le tétraèdre.

299. Problème. — *Circonscrire une sphère à un tétraèdre donné.* — Plaçons la base ABC sur le plan horizontal (*fig.* 237, pl. XVIII) et soient s, s' les projections du sommet. Le centre inconnu de la sphère est sur le lieu des points équidistants des sommets de la base, c'est-à-dire sur la perpendiculaire au plan vertical menée par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC; construisons le centre o de ce cercle et traçons sa circonférence. D'après ce que nous venons de dire, le centre cherché est sur la verticale du point o, donc c'est sur ce dernier point que se projette horizontalement le centre de la sphère.

Pour construire la seconde projection du centre, menons une corde de front de la sphère, par exemple l'une $s\theta$, $s'\theta'$ de celles qui passent par le sommet donné et qui rencontrent le cercle tracé; le plan perpendiculaire sur le milieu de cette corde passera par le centre de la sphère et achèvera de le déterminer, construisons-le; ce plan étant perpendiculaire au plan vertical, il est immédiatement déterminé par sa trace verticale P′ menée, par le milieu m' de $s'\theta'$, perpendiculairement à cette dernière. Par la rencontre de P′ avec la verticale du point o, on a la projection verticale o' du centre de la sphère. Lorsque les projections du centre sont connues, la vraie grandeur du rayon s'obtient aisément par une ligne de front partant du centre o, o' pour aboutir en un point θ_1, θ'_1 du cercle tracé; c'est précisément la projection verticale $o'\,\theta'_1$ de cette ligne qui égale le rayon dans sa véritable grandeur. Si la parallèle à xy menée par s n'atteignait pas le cercle figuré, on serait obligé de changer le plan vertical afin d'amener la ligne de terre sur une direction convenable.

300. Problème. — *Construire les sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre donné.* — Les centres des sphères cherchées sont les points équidistants des quatre plans obtenus en prolongeant les faces du tétraèdre; ce sont donc les points de concours des plans bissecteurs des dièdres formés par ces plans; pour déterminer ces points de concours il suffit évidemment de prendre le point de

rencontre des plans bissecteurs de trois dièdres n'appartenant pas au même trièdre, car ceux d'un même trièdre concourent sur une droite.

Soient (*fig.* d_6) α_1, α_2, α_3, les plans bissecteurs des dièdres AB, BC, AC, du tétraèdre donné ABCD et β_1, β_2, β_3 ceux de leurs suppléments. Les centres s'obtiennent en combinant ces plans trois à trois, mais de façon à ne jamais faire intervenir dans une même combinaison deux plans passant par une même arête; on est ainsi conduit aux trois groupes de combinaisons qui suivent :

1° α_1, α_2, α_3, ce groupe donne simplement la sphère inscrite au tétraèdre.

2° (α_1, α_3, β_2), (α_1, α_2, β_3), (α_2, α_3, β_1), (β_1, β_2, β_3), en tout quatre combinaisons donnant des sphères tangentes extérieurement à une face et touchant intérieurement les trois autres prolongées. Ainsi la première combinaison α_1, α_3, β_2 donne la sphère tangente aux faces de la figure EBCDGF.

3° (β_1, β_3, α_2), (β_1, β_2, α_3), (β_2, β_3, α_1). La première de ces combinaisons donne le centre d'une sphère tangente à l'un des combles HBEKCF, LAMNDP, de même pour les autres. Au sujet de ce dernier cas, nous ferons observer que chaque arête donne un comble, mais que ces six combles ne

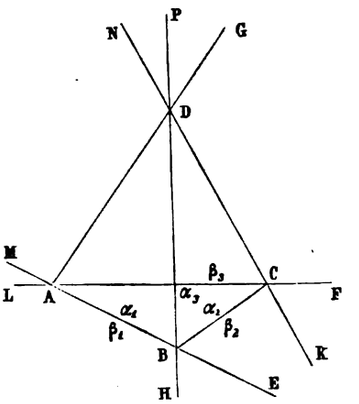


FIG. d_6.

donnent que trois sphères, en effet nous venons de voir que les combles dont les arêtes BC, AD sont des arêtes opposées du tétraèdre, ne donnent qu'une sphère.

En résumé, on peut dire que le problème offre en général huit solutions à savoir : une sphère inscrite dont le centre est déterminé par les plans bissecteurs intérieurs. Quatre sphères ex-inscrites dont les centres sont à la rencontre de deux plans bissecteurs intérieurs et d'un extérieur, ou de trois plans bissecteurs extérieurs. Enfin, trois sphères tangentes aux combles, dont les centres sont à la rencontre de deux plans bissecteurs extérieurs et d'un intérieur.

Arrivons maintenant au tracé de l'épure. Soient ABC la base du tétraèdre supposée placée sur le plan horizontal de projection, d la projection horizontale du sommet et h la hauteur (*fig.* 238, pl. XX).

Afin de construire les six plans bissecteurs α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, mettons en évidence le rectiligne de chacun des dièdres correspondants, par l'emploi de trois plans verticaux perpendiculaires à leurs arêtes AB, BC, AC, et dont les lignes de terre x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 sont respectivement perpendiculaires à ces mêmes arêtes.

Les projections verticales d'_1, d'_2, d'_3 du sommet D s'obtiennent en portant, sur trois lignes de rappel issues de d et respectivement perpendiculaires aux trois lignes de terre, à partir et au dessus de ces lignes, la hauteur donnée h.

En tirant les droites $a'_1d'_1$, $c'_2\,d'_2$, $a'_3d'_3$, on a les traces verticales des plans des trois faces latérales, et les angles que font ces traces avec les lignes de terre respectives, mesurent ceux des faces latérales avec le plan de base. Par les bissectrices de ces angles et de leurs suppléments on trouve les traces verticales $(\alpha'_1a'_1, \beta'_1a'_1)$, $(\alpha'_2c'_2, \beta'_2c'_2)$, $(\alpha'_3a'_3, \beta'_3a'_3)$ des six plans bissecteurs; ces plans sont respectivement perpendiculaires aux trois plans verticaux de projection et ont pour traces horizontales les arêtes AB, BC, AC de la base. Pour construire leurs rencontres, coupons-les par un plan horizontal auxiliaire dont les traces verticales H'_1, H'_2, H'_3 sont des droites respectivement parallèles aux lignes de terre à des distances quelconques, mais égales de chacune d'elles. Ce plan auxiliaire détermine sur les plans bissecteurs intérieurs les droites de rencontre (γ'_1, γ_1), (γ'_2, γ_2), (γ'_3, γ_3), et sur les plans bissecteurs extérieurs celles qui se projettent en (δ_1, δ'_1), (δ_2, δ'_2), (δ_3, δ'_3). Tout étant ainsi préparé en vue de la détermination des divers centres, passons à la construction des sphères de chacun des trois groupes.

Sphère inscrite. — Le centre de cette sphère est au point de concours des plans intérieurs bissecteurs que nous désignerons par leurs traces verticales α'_1, α'_2, α'_3. Il faut prendre d'abord les rencontres de ces plans pris deux à deux, ce qui donne trois droites : d'une part, A, B, C, fournissent un point de chacune d'elles, de l'autre, le plan auxiliaire horizontal donne sur les plans bissecteurs intérieurs les intersections (γ_1, γ'_1), (γ_2, γ'_2), (γ_3, γ'_3), qui déterminent à leur tour les projections horizontales a_4, b_4, c_4 d'un second point de chacune des droites cherchées; en tirant Aa_4, Bb_4, Cc_4 on trouve les projections horizontales des droites de rencontre des plans bissecteurs considérés.

L'épure doit offrir cette vérification que ces trois droites doivent concourir en un seul point o, qui n'est autre que la projection horizontale du centre cherché. Comme le point o est aux trois plans intérieurs bissecteurs, sa projection sur l'un des plans verticaux devra tomber sur la trace verticale du plan bissecteur correspondant, on a ainsi trouvé o'_1 qui détermine avec o le centre cherché.

Nous achèverons la question de la détermination de la sphère inscrite en ajoutant que cette sphère doit être tangente au plan horizontal, que, par suite, la cote $p'_1o'_1$ du centre égale le rayon de la sphère.

Sphères ex-inscrites. — Combinons, par exemple, les plans bissecteurs, dont les traces verticales sont en α'_1, α'_2, β'_3.

Pour trouver leur point de concours opérons comme dans le cas précédent, en conservant le même plan sécant auxiliaire H'_1, H'_2, H'_3, déterminant les trois intersections (γ_1, γ'_1), (γ_2, γ'_2), (δ_3, δ'_3), d'où résultent les projections horizontales a_5, b_4, c_5, de trois points des intersections des plans bissecteurs pris deux à deux, et comme A, B, C, font toujours partie de ces intersections, on les obtient en tirant les droites Aa_5, Bb_4, Cc_5, qui doivent concourir en un seul point ω_3 donnant la projection horizontale du centre de la sphère; l'une des projections verticales de ce centre est ω'_3 et le rayon $\omega'_3\pi'_3$. Pareillement on a construit sur l'épure les centres (ω'_1, ω_1), (ω'_2, ω_2), (ω'_4, ω_4) et les rayons $\omega'_1\pi'_1$, $\omega'_2\pi'_2$, $\omega'_4\pi'_4$ des trois autres sphères ex-inscrites.

Sphères tangentes aux combles. — Nous avons construit une seule de ces sphères par la combinaison des plans bissecteurs dont les traces verticales sont β'_1, β'_2, α'_3; le plan auxiliaire horizontal déjà employé donne sur chacun de ces plans bissecteurs les droites (δ_1, δ'_1), (δ_2, δ'_2) (γ_3, γ'_3) lesquelles donnent à leur tour la projection horizontale d'un point b_8, a_7, c_6 de chacune des intersections des plans bissecteurs combinés deux à deux, les projections horizontales de ces dernières sont par suite Bb_8, Aa_7, Cc_6; par leur point de concours ω_5, on a la projection horizontale du centre, on en déduit celle ω'_5 de ce point sur l'un des plans verticaux et le rayon de la sphère $\omega'_5\pi'_5$ en véritable grandeur.

Discussion. — Soient r, $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$, $(\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3)$ le rayon de la sphère inscrite, ceux des sphères ex-inscrites et ceux des sphères inscrites aux combles. Soient, en outre, a, b, c, d, e et V les aires des faces et le volume du tétraèdre.

En décomposant le tétraèdre en trois autres ayant pour bases les faces du premier et pour sommet commun le centre de la sphère inscrite on aura

$$V = \frac{1}{3} r(a+b+c+d),$$

ou

$$(1) \qquad r = \frac{3V}{a+b+c+d}.$$

Cette formule s'applique aux autres rayons à la condition d'y changer, quand le centre de la sphère change de côté par rapport à une face, le signe de l'aire de cette face.

On trouve ainsi pour les autres rayons :

$$(2) \qquad \rho_1 = \frac{3V}{b+c+d-a}, \qquad \rho_2 = \frac{3V}{a+c+d-b}, \qquad (3)$$

$$(4) \qquad \rho_3 = \frac{3V}{a+b+d-c}, \qquad \rho_4 = \frac{3V}{a+b+c-d}, \qquad (5)$$

$$\rho'_1 = \pm\frac{3V}{a+b-c-d}, \quad \rho'_2 = \pm\frac{3V}{a+c-b-d}, \quad \rho'_3 = \pm\frac{3V}{a+d-b-c}.$$

Ces trois dernières formules en supposant :

$$a < b < c < d,$$

s'écriront

$$(6) \qquad \rho'_1 = \frac{3V}{c+d-a-b}, \qquad \rho'_2 = \frac{3V}{b+d-a-c}, \qquad (7)$$

$$(8) \qquad \rho'_3 = \pm\frac{3V}{a+d-(b+c)}.$$

La formule (1) prouve que la sphère inscrite existe toujours.

Les sphères ex-inscrites existent toujours également; car, dans les formules (2), (3), (4), (5) les dénominateurs sont positifs; on sait, en effet, que dans un tétraèdre l'aire d'une face quelconque est moindre que la somme des aires des trois autres.

Si les faces sont différentes les formules (6) et (7) donnent les rayons de deux sphères tangentes aux combles, et si en outre $a+d \lesseqgtr b+c$ le problème offre huit solutions; il n'en offrira que sept si la somme de deux des faces est égale à celle des deux autres, dans ce cas le huitième centre sera à l'infini.

Si l'on a simultanément $a=b$, $c=d$, on aura, par suite, $\rho'_2=\infty$, $\rho'_3=\infty$; le problème n'aura plus que six solutions.

Si enfin $a=b=c=d$, les trois combles ne donneront plus de sphères tangentes, et le problème n'aura que cinq solutions.

EXERCICES SUR LES CHAPITRES VI ET VII

301. Problème I. — *Construire les centres des sphères tangentes à quatre plans, en basant le tracé sur le théorème qui suit.*

Théorème. — *Si une sphère est inscrite à un tétraèdre, les quatre points de contact coïncident, quand on fait le rabattement intérieur de trois faces, sur la quatrième. De plus, le point commun de contact est le centre du cercle circonscrit au triangle formé par les trois rabattements du quatrième sommet.* (Hermary, *Correspondance mathématique*, t. V).

Démontrons tout d'abord le théorème. Soient SABD le tétraèdre (fig. d_7) et O le centre de sa sphère inscrite; conduisons par ce point des perpendiculaires aux faces, elles déterminent en γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 les points de contact. Le plan $\gamma_1 O \gamma_2$ qui est perpendiculaire à l'arête AB la coupe en un point α tel,

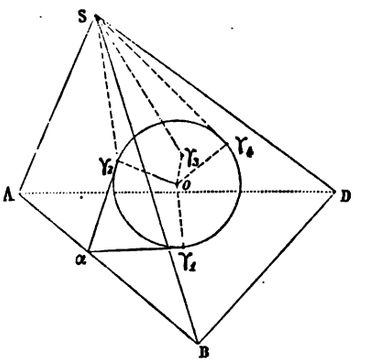


Fig. d_7.

que les droites $\alpha\gamma_1$, $\alpha\gamma_2$ sont aussi perpendiculaires à AB; en outre, ces droites sont égales comme tangentes à une sphère issues d'un même point; on en conclut que si l'on rabat intérieurement la face ASB, γ_2 viendra sur γ_1, de même pour γ_3, et γ_4; la première partie du théorème est donc établie.

On voit, après avoir tiré les droites $S\gamma_2$, $S\gamma_3$, $S\gamma_4$, qu'elles sont tangentes à la sphère, et par suite égales, d'où découle immédiatement la seconde partie du théorème.

Occupons-nous maintenant du tracé, soient données : sur le plan horizontal de projection, la base ABD du tétraèdre (*fig.* 239 *bis*, pl. XVIII); la projection horizontale s du sommet et la hauteur h de la pyramide.

Prenons la ligne de terre xy perpendiculaire à AB; plaçons en s', d'après la hauteur donnée, la projection verticale du sommet et tirons la trace verticale $\alpha s'$ de la face SAB; puis rabattons intérieurement cette dernière; le sommet s, s' vient en S_1. Pour construire le rabattement intérieur du sommet autour de la droite BD prise comme charnière, observons que la distance du sommet S au point B doit se voir dans sa véritable grandeur sur l'un et l'autre de ses rabattements, or l'un d'eux est en BS_1, par conséquent le cercle décrit de B comme centre avec BS_1 pour rayon devra passer par le second rabattement de s, s', et comme ce dernier doit aussi appartenir à la perpendiculaire menée à la charnière BD du point s, on trouve au croisement S_2 de ces lignes le rabattement cherché.

Semblablement on obtient le rabattement S_3 du même sommet autour de la charnière AD. En prenant le centre o du cercle circonscrit au triangle dont les sommets sont S_1, S_2, S_3, on trouve la projection horizontale du centre de la sphère ; sa projection verticale o' est placée sur la trace verticale $\alpha\alpha$ du plan bissecteur intérieur du dièdre AB, et sur la ligne de rappel menée par o; enfin, le rayon de la sphère n'est autre que la cote $\omega o'$ du centre. Nous engageons le lecteur à construire les centres des sphères ex-inscrites ou tangentes aux combles, il suffira, lorsque la sphère changera de côté par rapport à une face de changer simplement le sens du rabattement de cette face, et de renverser le sens que nous venons d'indiquer pour chaque rabattement des faces lorsque la sphère changera de côté par rapport au plan de base.

Remarque. — Le théorème qui précède permet de construire, lorsqu'une pyramide est circonscriptible à la sphère, le centre et le rayon de cette dernière et conduit dans ce cas à un théorème de géométrie facile à énoncer.

302. Problème II. — *Deux points étant donnés, mener par un troisième point donné, une droite distante des deux premiers points de deux longueurs connues.* — Soient A, B, les deux premiers points donnés (fig. d_8) et D le troisième, tirons les droites AD, BD et concevons que l'on ait successivement

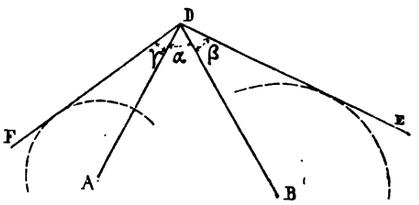


Fig. d_8.

rabattu sur le plan des trois points la droite inconnue dédoublée, en adoptant pour charnières les droites BD, AD; elle vient d'abord sur la tangente DE menée par D à la circonférence décrite de B comme centre avec l'une des distances données pour rayon, le second rabattement DF de la droite cherchée se construit semblablement, et le problème se réduit à celui de la construction d'un trièdre dont les trois faces α, β, γ, sont connues. Les tracés s'exécuteront facilement.

303. Problème III. — *Mener par un point donné* A *de l'espace, une droite située à une distance connue d'une droite donnée* B *et en même temps à une distance également connue d'un point donné* D (fig. d_9). — La question peut se réduire à l'application de la solution donnée pour l'un des cas de l'angle trièdre.

En effet, menons par A une parallèle Aβ à B, tirons AD, prenons pour plan de la figure celui des droites Aβ, AD, et cherchons les éléments nécessaires à la détermination du trièdre dont les arêtes sont Aβ, AD et la droite inconnue. A cet effet concevons que l'on ait rabattu la droite inconnue sur le plan de la figure, autour de AD: elle se placera en AE sur une tangente menée du point A à la circonférence décrite de D comme centre avec l'une des distances données pour rayon. On en déduira la vraie grandeur α de l'une des faces du trièdre.

La condition imposée à la droite inconnue, d'être placée à une distance donnée de B va nous fournir un nouvel élément du trièdre à construire. La plus courte distance de deux droites est mesurée par celle d'un point de l'une d'elles au plan conduit par l'autre parallèlement à la première, par suite, le plan conduit par Aβ et par la droite inconnue remise en place doit être à une distance donnée de la

droite B; pour l'exprimer, considérons un plan P perpendiculaire à B qui coupera cette droite un point o et β en F_1, décrivons dans le plan P un cercle de centre o et de rayon égal à la seconde distance connue, conduisons par F l'une des tangentes à ce cercle, et nous aurons la ligne de plus grande pente FG par rapport au plan de la figure du plan de la face inconnue du trièdre; l'angle A_1 de FG avec l'intersection FK du plan de la figure et du plan P sera le rectiligne du dièdre opposé à α.

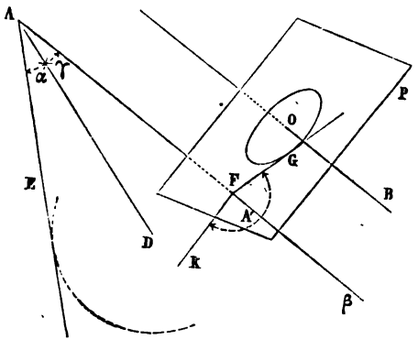


Fig. d_9.

Le problème se réduira à celui de la construction d'un trièdre dont on connaîtra deux faces α, γ et le dièdre A_1 opposé à l'une d'elles. Reste à exécuter l'épure, ce qui sera pour le lecteur un exercice utile.

304. Problème IV. — *Construire une droite qui s'appuie sur deux droites données, non situées dans un même plan, et qui fasse avec ces droites, des angles respectivement égaux à des angles donnés.* — Soient (d, d'), (δ, δ') les droites données (*fig.* 239, pl. XVIII), si ces droites se coupaient, en construisant la troisième arête d'un trièdre dont on connaîtrait les trois faces, on aurait la ligne demandée.

De quelque manière que les droites soient placées, on peut, en substituant à l'une d'elles, sa parallèle menée par l'un quelconque des points de la seconde, exécuter la construction du trièdre dont on vient de parler; en conduisant ensuite une parallèle à la troisième arête de ce trièdre s'appuyant sur les droites données (§ 75), on aura la ligne qui répond aux conditions imposées. Comme le problème de la construction de la troisième arête du trièdre conduit à deux droites symétriques par rapport au plan de la face connue de ce trièdre, on trouvera également deux solutions du présent problème.

Passons à l'exécution de l'épure, choisissons (fig. 239, pl. XVIII) pour simplifier le tracé, le point a, a' de la droite d, d', dont la projection verticale a' est au croisement des projections verticales δ', d' et conduisons par ce point la parallèle δ', δ_1 à δ, δ'.

Dans le but de rabattre le plan des droites (d, d'), (δ', δ_1) traçons l'une de ses horizontales, dont la projection verticale $m'n'$ est parallèle à la direction de la ligne de terre, on en déduit la projection horizontale mn par la combinaison des lignes de rappel menées par n', m' et des droites d, δ_1. Toujours en vue du même but, prenons pour premier plan coordonné le plan horizontal conduit par $mn, m'n'$, et pour second celui qui passe par une droite x_1y_1, prise dans une position arbitraire, mais dirigée perpendiculairement à mn : ce plan est perpendiculaire à $mn, m'n'$.

Rabattons maintenant le plan des droites (d, d'), (δ_1, δ') sur le plan horizontal de projection, m, n ne bougent pas; a, a' vient en A_1; les deux droites se placent par conséquent en A_1n, A_1m. Cela fait, procédons à la construction du trièdre; la troisième arête dédoublée et rabattue sur le plan horizontal

prend les positions A_1B_1, A_1B_2 (§ **225**) qui font avec les charnières respectives A_1n, A_1m les angles donnés. On trouve alors par l'application de la méthode du paragraphe précité, la projection b_2 d'un point de la troisième arête sur le plan de la face nA_1m et sa côte b_2B_4. Concevons maintenant que l'on ait donné à ce point sa position naturelle par rapport à la face nA_1m et relevons cette face, en entraînant, d'après la méthode du paragraphe **150**, la troisième arête du trièdre, le point b_2 se projette sur le plan vertical auxiliaire en b'_2, et se relève en b'_3; la perpendiculaire à la face nA_1m sur laquelle se mesure la cote, par rapport à cette face, du point trouvé sur la troisième arête, vient se projeter en $b'_3b'_1$ sur une droite perpendiculaire à la trace verticale $m'_1a'_1$ et égale à la cote b_2B_4. Quant à la projection horizontale du point de la troisième arête qui se projette verticalement en b'_1, on la trouve par la rencontre b de la ligne de rappel passant par b'_1, avec la perpendiculaire à la charnière conduite par b_2; effectivement, cette perpendiculaire n'est autre que la trace horizontale du plan perpendiculaire à mn, $m'n'$ que décrit le point cherché dans sa rotation. On revient alors au système primitif de plans de projection pour le point b, b'_1 en reportant $\beta_1b'_1$ en $\beta b'$; alors en tirant la droite ab, $a'b'$, on trouve enfin les projections de la troisième arête du trièdre pour l'une des solutions. La seconde solution s'obtient en remplaçant b'_1 par son symétrique c'_1 relativement à la droite $m'_1a'_1$. Le problème s'achève alors par la méthode donnée au paragraphe **76**.

305. Problème V. — *Étant donnés : les angles que fait l'une des arêtes latérales d'une pyramide avec les côtés de la base qu'elle rencontre, la longueur de cette arête et les projections de la base, construire les projections de la pyramide.* — La solution est identique à celle du problème précédent.

306. Problème VI. — *Construire les projections des cinq polyèdres réguliers et les développements de leurs surfaces, connaissant la longueur des arêtes.*

1° Tétraèdre régulier. — La figure 240, pl. XIX, donne, en plaçant la base ABC sur le plan horizontal, les projections du polyèdre : la projection horizontale s du sommet est au centre du cercle circonscrit au triangle de base, et la hauteur se trouve déterminée par le triangle rectangle de l'espace SsC rabattu en CS_1s. Quant au développement on l'obtient (fig. 241, pl. XIX) en ouvrant le solide suivant CS, AS, BS afin de rabattre les faces latérales sur le plan horizontal.

2° Octaèdre régulier. — Ce polyèdre est formé de deux pyramides quadrangulaires (fig. 242, pl. XIX) dont on construit facilement les projections en observant que $s'_1s'_2 = s'_1\sigma' = sa$. Par le développement (*fig.* 243, pl. XIX) des deux pyramides quadrangulaires on trouve celui de l'octaèdre.

3° Icosaèdre régulier (*fig.* 244, pl. XIX). — La géométrie apprend que le solide est formé de deux pyramides pentagonales régulières, à bases parallèles, dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux, et dont la jonction se fait par l'intermédiaire d'une couronne formée de dix triangles équilatéraux égaux aux premiers.

Cela posé, commençons par construire la projection horizontale du polyèdre; à cet effet traçons sur ce plan de projection un premier pentagone régulier *abcde*, de côté égal à celui du polyèdre; considérons ensuite le cercle circonscrit à ce pentagone et tirons les droites de jonction des milieux des arcs interceptés par les sommets du pentagone sur la circonférence de ce cercle, nous formerons ainsi un nouveau pentagone *fghij*. Unissant le centre des deux pentagones aux sommets de ces polygones, on trouve la projection horizontale des deux pyramides régulières.

La figure s'achève alors en traçant les droites de jonction de chaque sommet de l'un des pentagones aux deux sommets les plus voisins de l'autre.

Quant à la projection verticale, on l'obtient simplement en construisant la hauteur des pyramides et celle de la couronne.

La hauteur de l'une des pyramides fait partie d'un triangle rectangle qui a pour l'un de ses côtés de l'angle droit sc et pour hypoténuse la vraie grandeur cb de l'arête de l'icosaèdre; ce triangle a été rabattu en sS_1c, la hauteur des deux pyramides est donc égale à sS_1.

En ce qui concerne la hauteur de la couronne on voit que cette ligne fait encore partie d'un triangle rectangle qui a pour côté de l'angle droit la projection ej de l'un des côtés de la couronne et pour hypoténuse la vraie grandeur ea de ce côté, ce triangle rabattu en ejJ_1, donne dans sa véritable grandeur la hauteur jJ_1 de la couronne.

Les hauteurs que nous venons de construire permettent de mettre en place σ', s', et les plans horizontaux intermédiaires; il restera alors à relever les points de la projection horizontale par des lignes de rappel en a', b' etc... i', j' etc., et à tracer les projections des arêtes correspondantes.

Le développement (*fig.* 245, pl. XIX) se compose de deux portions d'hexagones réguliers $S_2A_1B_1C_1D_1E_1A_2$, $\Sigma_2F_2G_2H_2I_2J_2F_1$, provenant du développement des pyramides, que l'on doit réunir à l'aide du développement de la couronne représentée sur la figure par les dix triangles $A_2I_1J_1$, $A_2I_1B_2$... $J_2E_2F_1$.

4° Cube ou hexaèdre régulier. — En plaçant l'une des faces sur le plan horizontal, on trouve sans difficulté les projections (*fig.* 246, pl. XIX) du polyèdre, et la figure 247 de la même planche donne son développement.

5° Dodécaèdre régulier (*fig.* 248, pl. XIX). — On a vu en géométrie que l'on obtient ce polyèdre en prenant un premier pentagone régulier réuni à cinq autres pentagones égaux au premier, de telle sorte qu'ils constituent en chacun des sommets de ce premier polygone, un angle trièdre; puis, en dédoublant la figure précédente afin de la retourner et d'amener à coïncider les décagones gauches qui terminent les deux figures provenant du dédoublement de la première.

Pour effectuer le tracé des projections (*fig.* 248, pl. XIX) plaçons l'un des pentagones ABCDE sur le plan horizontal coordonné et cherchons à construire les projections des cinq pentagones contigus. On peut imaginer que le pentagone tracé sur le plan horizontal de projection, représente tout à la fois l'une des faces du polyèdre et les rabattements autour des charnières respectives AB, BC des pentagones de l'espace qui touchent le premier suivant leurs charnières correspondantes; tout se réduirait alors à relever les deux pentagones supposés rabattus en ABCDE; c'est là un problème que l'on a résolu dans le premier cas de l'angle trièdre, dont le tracé peut encore être simplifié si l'on observe que le trièdre est équifacial et que, par suite de la symétrie qui en résulte, le point C relevé autour de AB devra se projeter sur la droite de jonction du point B au centre ω du pentagone ABCDE, ce point sera donc à la rencontre h de cette droite et de la perpendiculaire à la charnière menée par C. Pour trouver commodément les cotes des sommets relevés, adoptons un plan vertical perpendiculaire à la charnière AB dont la ligne de terre x_1y_1 est également perpendiculaire à cette ligne.

Lorsqu'on relève le pentagone ABCDE autour de AB, la projection verticale c'_1 du point C se meut sur un cercle de centre α décrit sur le plan vertical et vient s'arrêter à la rencontre h'_1 de ce cercle et de la ligne de rappel du point h; on en déduit la trace verticale $\alpha h'_1$ du plan de la face pentagonale relevée et la projection verticale g'_1 du point D, d'_1 également relevé; la ligne de rappel conduite par g'_1 détermine sur la perpendiculaire $D\omega$ à la charnière AB la projection horizontale g du sommet cherché. Actuellement, on connaît les projections horizontales g, h de deux sommets de l'un des pentagones de l'espace, ainsi que les cotes $h_2h'_1$, $g_2g'_1$ de ces points, il est donc facile,

à l'aide de la symétrie de la figure d'achever sa construction et celle du polyèdre, comme on le voit sur notre épure.

Indiquons, en vue d'une application ultérieure, que la droite C*h* doit passer par suite de l'égalité des droites DC, *wv*, par le point *v*.

Le développement du dodécaèdre (*fig.* 249, pl. XIX), s'obtient sans difficulté.

307. Problème VII. — *Construire les rectilignes des dièdres des cinq polyèdres réguliers.* — Ce problème se réduit facilement à celui de construire l'un des dièdres d'un trièdre dont les faces sont connues (§ **229**).

308. Problème VIII. — *Achever le tracé des projections d'une pyramide connaissant la projection horizontale de la base, les projections verticales de trois sommets de cette base, la projection horizontale du pied de la hauteur et la longueur de cette hauteur.* — On peut prendre un nouveau plan vertical de projection perpendiculaire à celui de la base, qui servira à mettre en place la hauteur et en même temps à trouver les cotes des sommets de la base dont on ne connaît qu'une projection.

309. Problème IX. — *Réduire à l'horizon l'angle d'une droite horizontale et d'une droite quelconque.* — Conformément à la solution générale (§ **233**), plaçons le sommet *s*, *s'* sur le plan vertical (*fig.* 250, pl. XX) ainsi que le côté horizontal de l'angle *sd*, *s'd'* ; puis, rabattons successivement le second côté de cet angle autour des deux charnières *sd'*, *ss'*; on mène pour cela deux droites par *ss'* respectivement inclinées sur les charnières des deux autres angles donnés A, α. L'une de ces droites fait sa trace horizontale en h_1 dont on trouve, en prenant $s'h' = sh_1$, le point correspondant h' sur la seconde. En relevant les droites $s'h'$, $s'h_1$ pour reconstituer dans l'espace le second côté de l'angle, on obtient au croisement h de l'arc de cercle décrit par h_1 sur le plan horizontal et du plan de profil dans lequel h' se meut, la trace horizontale du second côté de l'angle; dès lors en tirant la droite *sh*, on a l'angle *hsd* qu'il s'agissait de construire.

310. Problème X. — *Conduire par un point pris sur l'une des arêtes latérales d'un tétraèdre, un plan qui détermine sur la surface latérale de ce polyèdre, une section triangulaire de périmètre minimum.*

Supposez que l'on ait rendu la face latérale *a's'b'*, A*s*B (*fig.* 251, pl. XX), qui ne contient pas le point donné *m*, *m'*, parallèle au plan vertical; rabattez alors, pour développer le trièdre S sur le plan de cette face, le point *m*, *m'* successivement autour des charnières (*s'b'*, *s*B), (*s'a'*, *s*A). Pour le premier rabattement employez la construction habituelle (§ **128**), et vous trouverez M_2 au moyen du triangle rectangle $M_1\, m'n'$; le second rabattement est donné en observant que la distance des points S_1, M se rabat en vraie grandeur autour des deux charnières, par suite, que ce rabattement devra se trouver sur un arc de cercle décrit du point *s'* comme centre avec $s'M_2$ pour rayon; comme il doit également appartenir à la perpendiculaire abaissée du point *m'* sur la projection de la charnière *s'a'*, il sera au point d'intersection M_3 de ces lignes. En joignant alors M_3, M_2 par une droite, vous aurez le développement de la ligne minimum.

En remettant en place les faces rabattues, les points (*n'*, *n*), (*p'*, *p*) ne bougeront pas, M_2, M_3 se rejoindront en *m'*, *m*, vous en déduirez les projections des sommets (*n*, *n'*), (*p*, *p'*), (*m*, *m'*) du triangle cherché, et enfin, en joignant ces points deux à deux, par des droites, vous obtiendrez les deux projections *m'n'p'*, *mnp* du triangle qu'il fallait construire.

311. Problème XI. — *Construire une sphère tangente aux arêtes d'un trièdre et au plan horizontal de projection.*

Solution générale. — Construisons une sphère quelconque tangente aux arêtes du trièdre; puis, en plaçant le centre d'homothétie au sommet de ce trièdre, nous pourrons facilement

déterminer une nouvelle sphère toujours tangente aux arêtes du trièdre et qui touchera en outre le plan horizontal de projection. Le problème de la construction de la sphère simplement tangente aux trois arêtes du trièdre, se résout en plaçant sur les arêtes trois points équidistants du sommet; puis, en construisant, dans le plan de chaque face, le centre des circonférences qui touchent les arêtes aux points choisis, et en prenant le point de croisement des perpendiculaires menées par les centres de ces cercles aux plans des faces correspondantes, qui est précisément le centre de la sphère cherchée. La distance de ce point à l'une quelconque des arêtes est égale au rayon de la sphère.

Exécution du tracé. — Pour déterminer le trièdre, soient données : la projection horizontale s (*fig.* 252, pl. XX) du sommet, la cote γ de ce point et les traces horizontales θ_1, θ_2, θ_3 des arêtes.

Dans le but de construire les centres des circonférences tangentes aux arêtes, rabattons les faces $S\theta_1\theta_3$, $S\theta_1\theta_2$ sur le plan horizontal; pour faciliter la construction de ces rabattements, adoptons un plan vertical perpendiculaire à la droite $\theta_1\theta_3$, la ligne de terre x_1y_1 correspondante est aussi perpendiculaire à cette droite et peut passer par s comme dans notre épure, alors le sommet du trièdre se projette verticalement au point S'_1, à la cote γ, et la trace verticale de la face $S\theta_1\theta_3$ s'obtient en tirant $\alpha S'_1$.

Cela fait, le point S rabattu autour de $\theta_1\theta_3$ vient en S_2 sur un arc de cercle décrit de α comme centre avec $\alpha S'_1$ pour rayon, et sur la ligne de terre x_1y_1.

Le rabattement, autour de $\theta_1\theta_2$, du même sommet se trouve en S_3 sur la droite qui joint s au centre d'affinité et sur un arc de cercle décrit de θ_1 comme centre avec θ_1S_2 pour rayon. Actuellement tirons $S_2\theta_1$, $S_2\theta_3$, $S_3\theta_1$, $S_3\theta_2$, portons sur ces droites quatre longueurs S_2A_1, S_2B_1, S_3A_2, S_3D_1 quelconques mais égales entre elles et construisons les centres Ω_1, Ω_2 des cercles qui toucheraient les arêtes rabattues aux points A_1, B_1, A_2, D_1. Ces centres sont les rabattements des projections du centre de la sphère cherchée sur le plan des faces $S\theta_1\theta_3$, $S\theta_1\theta_2$.

Il faut maintenant relever les faces en entraînant leurs perpendiculaires; le point Ω_1 se projette verticalement en ω'_2, et se relève en ω'_3 sur la trace verticale $\alpha S'_1$ du plan de la face $S\theta_1\theta_3$, la perpendiculaire menée par le centre au plan de cette dernière face a pour projection verticale la perpendiculaire ω'_3g' à la trace $\alpha S'_1$ menée par ω'_3, et la projection horizontale de cette perpendiculaire se confond précisément avec la trace horizontale Q du plan perpendiculaire à la charnière $\theta_1\theta_3$ dans lequel se meut le centre du cercle correspondant.

Nous connaissons ainsi un lieu Q de la projection horizontale du centre de la sphère, un second lieu P de ce point est donné pareillement par la perpendiculaire menée de Ω_2 à la seconde charnière $\theta_1\theta_2$, la projection horizontale du centre est donc au croisement c de ces deux lieux, la projection verticale se construit alors aisément en prenant la rencontre c'_1 de la ligne de rappel issue du point c avec ω'_3g'.

Quant au rayon de la sphère, observons qu'il est égal à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour l'un des côtés de l'angle droit la distance $c'_1\omega'_3$ du centre de la sphère au plan de la face $S\theta_1\theta_3$ et pour l'autre côté celle Ω_1A_1 du point Ω_1 à l'une des arêtes de la face rabattue en $\theta_1S_2\theta_3$; construisons cette hypoténuse en prenant $\omega'_3e'_1 = \Omega_1A_1$ et en tirant la droite $c'_1e'_1$ qui n'est rien autre chose que le rayon de la sphère dont le centre se projette en c, c'_1.

Passons à la construction de la sphère qui répond aux conditions du problème; pour cet effet décrivons un demi-cercle de centre c'_1 et de rayon égal à celui $c'_1e'_1$ de la première sphère, les points f'_1, f'_2 qu'il détermine sur la verticale de son centre combinés avec c, donnent, d'abord

en c, f'_1 les projections du point le plus bas de la sphère auxiliaire; en c, f'_2 celles du point le plus haut de cette même sphère. Toute sphère homothétique à celle de centre c, c'_1 est tangente aux arêtes du trièdre et touche deux plans horizontaux passant par les points homothétiques à (f'_1, c), (f'_2, c), il suffit donc de transporter homothétiquement ces derniers sur le plan horizontal de projection pour obtenir les points de contact avec ce plan des deux sphères qui répondent aux conditions du problème. Ces points de contact sont les traces φ_1, φ_2 des droites de jonctions, des points (f'_1, c) (f'_2, c) au centre de similitude S'_1, s.

Les points de contact φ_1, φ_2 sont en outre les projections horizontales des centres cherchés et comme les centres de deux figures homothétiques sont sur une droite passant par le centre de similitude, on aura, sur $S'_1c'_1$ les projections verticales φ'_1, φ'_2 des centres demandés. Quand aux rayons ils sont immédiatement donnés par les cotes $\varphi'_1\psi'_1, \varphi'_2\psi'_2$ des deux centres.

Le lecteur pourra compléter la question en construisant les centres des sphères tangentes au plan horizontal et au prolongement d'une ou de plusieurs arêtes du trièdre.

On aurait pu résoudre directement le présent problème en considérant le centre de la sphère comme placé: 1° sur le lieu des points équidistants des arêtes, lieu qui s'obtient par la rencontre des plans perpendiculaires à deux des faces, et passant par leurs bissectrices; 2° sur le lieu des points équidistants du plan horizontal et de l'une des arêtes latérales. Le premier lieu est une droite. En ce qui concerne le second, observons qu'en se bornant à construire ceux de ses points qui se trouvent dans le plan conduit par l'arête considérée et par la droite du premier, on trouve un système de deux droites passant par la trace horizontale de l'arête considérée et que l'on construit aisément. L'exécution de ce tracé pourra fournir au lecteur un exercice utile.

312. Problème XII. — *Par un point donné conduire une sphère tangente aux trois faces d'un trièdre donné* (à résoudre).

313. Problème XIII. — *On donne dans l'espace deux droites, qui se coupent et deux points ; conduire par ces deux points une sphère tangente aux deux droites* (à résoudre).

314. Problème XIV. — *On donne trois points et une droite ; conduire une sphère tangente à la droite, par les trois points donnés* (à résoudre).

315. Problème XV. — *Conduire par un point un plan tel, que sa section sur les faces latérales d'un prisme donné soit un polygone inscriptible au cercle.*

En supposant que le problème soit résolu, considérons le polygone de section et la circonférence qui lui serait circonscrite, imaginons en outre, une section du prisme faite par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales; cette dernière n'est autre chose que la projection de la première sur le plan de section droite, et, sur ce dernier plan, la circonférence considérée se projetterait suivant une ellipse que nous allons d'abord déterminer. Cette courbe est uniquement assujettie à passer par les sommets du polygone de section droite, il s'ensuit que le problème sera impossible pour tout prisme ayant plus de cinq faces, car on ne peut faire passer une courbe de second degré par plus de cinq points et qu'il sera généralement possible pour tout prisme d'un nombre de faces égal à cinq ou moindre que cinq. Dans le cas du prisme pentagonal, pour que le problème soit possible, il faut en outre que la conique passant par les cinq sommets de la section droite soit une ellipse. Si cette dernière condition est remplie on achèvera de résoudre le problème en construisant les axes $2a$, $2b$ de l'ellipse; puis en conduisant par le grand axe deux plans symétriques par rapport à celui de la section droite, et s'inclinant sur ce même plan d'un angle dont le cosinus vaut $\frac{b}{a}$; il suffira alors

de conduire par le point donné des plans parallèles à ces derniers. On voit que le problème admet dans ces cas deux solutions.

Lorsque le prisme à moins de cinq faces le problème est indéterminé, il est alors possible d'assujettir le polygone de section à une nouvelle condition; ainsi, par exemple, on peut demander de *faire en sorte, que la section d'un parallélipipède par un plan issu d'un point donné soit un carré.* Les deux diagonales du carré sont orthogonales elles doivent donc se projetter, sur le plan de la section droite, suivant deux diamètres conjugués de l'ellipse (§ 136) et comme ces deux projections sont connues, puisqu'elles ne sont autre chose que les diagonales du parallélogramme de section droite, tout se réduit alors à la construction des axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués; problème que le lecteur sait résoudre.

316. Problème XVI. — *Construire les projections d'un parallélipipède ayant trois de ses arêtes sur trois droites données dans l'espace.*

On conduit simplement par chaque droite donnée des plans respectivement parallèles aux deux autres.

317. Problème XVII. — *Construire les projections d'un parallélipipède rectangle, connaissant la projection verticale o' de son centre, les deux projections d, d' de l'une de ses arêtes prolongée, celles d'un point a, a' d'une seconde arête également prolongée et enfin la projection horizontale δ de cette dernière,* (*fig.* 253, pl. XXI).

L'arête projetée en δ doit passer par a, a' et doit être également perpendiculaire à la droite d, d'; il faut, en d'autres termes, qu'elle soit dans le plan vertical conduit par δ, et dans un plan perpendiculaire à d, d' passant par a, a'; le problème de la détermination de cette ligne se réduit donc à celui de l'intersection de ces deux plans. Le plan perpendiculaire est déterminé 1° par une horizontale issue de a, a' dont la projection verticale $a'b'$ est parallèle à la ligne de terre et dont la seconde projection ab s'obtient en conduisant de a une perpendiculaire sur la droite d, et 2° par une ligne de front ac, $a'c'$ que l'on construit pareillement. Nous chercherons le point de l'intersection dont la projection horizontale se fait à la rencontre e de δ et de d, ou, en d'autres termes et plus simplement, la projection verticale du point appartenant au plan perpendiculaire et qui se projette horizontalement en e; pour résoudre cette dernière question, nous recourrons à la droite du plan perpendiculaire qui se projette horizontalement sur d, et dont la projection verticale se construit en relevant g en g', f en f' et en tirant $f'g'$; cette droite $f'g'$ doit évidemment contenir la projection verticale cherchée, par suite, sa rencontre avec la ligne de rappel menée par e fournit cette projection verticale e'. La droite qui va du point a' au point e', n'est autre que la droite demandée δ'.

Une fois cette arête δ, δ' déterminée, on doit passer à la construction de la commune perpendiculaire aux droites (d, d'), (δ, δ') qui donnera une troisième arête du parallélipipède. Pour l'obtenir, observons que les droites (d, d'), (δ, δ') sont perpendiculaires en direction, ce qui donne lieu à une réduction dans le tracé, réduction qui sera plus complète si l'on observe encore que le plan perpendiculaire à d, d' conduit par δ, δ' est ici d'un emploi très avantageux, attendu que ce plan, déjà déterminé, donne par sa rencontre avec d, d' l'un des pieds de la commune perpendiculaire; cherchons donc l'intersection du plan perpendiculaire déterminé par (ab. $a'b'$), (ac, $a'c'$) et de la droite d, d'. En employant le plan vertical projetant de cette dernière comme plan auxiliaire, on retrouve pour la rencontre des plans la droite déjà tracée gf, $g'f'$, laquelle donne la projection verticale i' du pied de la plus courte distance sur d, d', par une ligne de rappel on trouve i. Reste à construire la direction

de la commune perpendiculaire; elle se projette suivant des perpendiculaires aux traces d'un plan conduit par δ, δ' parallèlement à d, d'.

Traçons donc la parallèle d_1, d'_1 à d, d' menée par a, a', laquelle détermine avec δ, δ' la direction de ce plan; pour trouver sa perpendiculaire passant par i, i', nous allons simplement, sans marquer aucune trace, prendre les projections d'une ligne de front kj, $k'j'$ de ce plan, et mener par i' une perpendiculaire à $k'j'$ que nous limiterons en l' sur δ'; la droite ainsi trouvée $i'l'$ n'est autre que la projection verticale de la commune perpendiculaire, on en déduit la projection horizontale il de cette ligne.

En ce qui concerne la projection o' du centre, nous observerons qu'elle est aussi le centre de la projection, car le rapport des segments d'une même droite est projectif; faisant intervenir cette propriété du centre o' dans le problème, nous obtiendrons les projections de deux autres sommets du polyèdre, en prenant simplement les symétriques i'_1, l'_1 des points i', l' par rapport au centre o' de la projection.

Rien n'est alors plus facile que d'achever la construction de la projection verticale du solide et d'en déduire sa projection horizontale.

318. Problème XVIII. — *Étant données la longueur du côté d'un cube, ainsi que les projections de trois points placés sur trois arêtes contiguës de ce solide, on demande*: 1° *les projections du cube*, 2° *de couper le cube par un plan suivant un hexagone régulier, et de fournir les projections et la vraie grandeur de cette section.*

1° La recherche du sommet du trièdre dont les arêtes passent par les points donnés n'est autre que le problème déjà résolu au paragraphe **165**, problème qui permet de construire les arêtes d'un trièdre trirectangle connaissant la section de cet angle solide par un plan. Après ce tracé la détermination des projections du cube se fait très aisément.

2° Le plan sécant cherché est celui qui passe par le milieu de trois arêtes non parallèles et non contiguës, comme on peut le voir par une démonstration géométrique des plus simple.

319. Problème XIX. — *Construire les projections d'un tétraèdre; connaissant un point de chacune des arêtes de ce polyèdre.*

Soient A, B, C, D, E, F (fig. d_{10}) les six points donnés; groupons-les trois à trois, afin de déterminer le plan des faces; soit l'un des groupements ACB, ADF, BEF, CDE; pour construire le tétraèdre correspondant menons les droites qui joignent deux à deux, les points extérieurs à l'un des plans; en prenant par exemple les points D, E, F extérieurs au plan ABC, on trouve les droites DF, FE, DE, qui coupent le plan ACB aux points α, β, γ, tirant les droites Aα, Bβ, Cγ, on a les arêtes contenues dans ce plan. Quant aux arêtes extérieures au même plan, on les obtient en joignant les sommets δ, ε, φ de la face située dans le plan ABC aux points extérieurs D, E, F correspondants.

Cherchons maintenant le nombre de solutions du problème; pour former la première face ABC nous avons pris trois points, on pourra donc obtenir cette face autant de fois qu'il y a de combinaisons de six points trois à trois : nombre qui est donné par la formule $C_6^3 = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$. La première face étant choisie, on peut former les autres par des plans conduits suivant deux des points extérieurs à cette face, associés à un point de la face, ce qui donne un nombre de solides égal à celui des combinaisons des trois points extérieurs à la face choisie, pris deux à deux, soit $C_3^2 = \frac{3.2}{1.2} = 3$. On forme ainsi $20 \times 3 = 60$ tétraèdres. Cherchons combien de fois l'un quelconque

$\delta\varphi\epsilon\lambda$ des tétraèdres se trouve compté par le procédé qui vient d'être employé; en prenant pour déterminer la première face les points A, C, B on le compte une fois, puis une fois encore en partant des points C, D, E placés sur la seconde face, etc., il est donc compté autant de fois

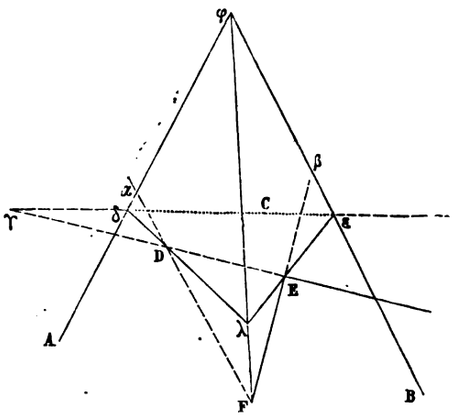


Fig. d_{10}.

qu'il a de faces, c'est à-dire quatre fois. En divisant 60 par 4, on trouve enfin que le problème offre 15 solutions.

320. Problème XX. — *Construire les projections du triacontaèdre à faces quadrangulaires.* — Ce polyèdre semi-régulier, du second genre [1], que l'on rencontre dans l'étude de la cristallographie, est obtenu en construisant sur les faces du dodécaèdre régulier, douze pyramides pentagonales régulières, égales entre elles, et telles, que deux triangles qui se touchent suivant une arête du dodécaèdre, soient dans un même plan.

Soient : *abcdefghijklmnopqrst*, *a'b'c'd'e'f'g'h'i'j'k'l'm'n'o'p'q'r's't'* les deux projections du dodécaèdre régulier donné (*fig.* 254, pl. XXI), proposons-nous de construire le triacontaèdre correspondant.

Construction de la projection horizontale du triacontaèdre. — Pour obtenir cette projection construisez tout d'abord celle de la pyramide relative à la face horizontale supérieure *fghij*, *f'g'h'i'j'* en joignant simplement le centre ω du pentagone *fghij* aux sommets de ce polygone. Ensuite, afin de trouver la projection, toujours sur le plan horizontal, de la pyramide relative à la face *ghqpo* du dodécaèdre, observez que les deux triangles qui forment la face du nouveau polyèdre donnée par l'arête *gh* du dodécaèdre constituent un losange dans l'espace, dont vous aurez la projection en conduisant des parallèles aux droites ωg, ωh, par les points *h*, *g*; mais, d'après une remarque faite à la fin du paragraphe **306** celle de ces parallèles qui passe par *h* passe aussi par le point *p*; donc l'autre parallèle

---

(1) « J'appelle *polyèdre semi-régulier*, soit celui dont les faces sont des polygones réguliers et dont les angles » polyèdres sont égaux (ou symétriques), soit celui dont les faces sont égales et dont les angles polyèdres sont » réguliers. Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les faces de même espèce sont égales et dans » tout polyèdre semi-régulier, du second genre, les angles polyèdres de même espèce sont égaux. » Catelan, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, 5e édition, p. 403.

passera, par suite de la symétrie de la figure, par le même point p; il résulte de là que le point p est la projection horizontale du sommet de la pyramide relative à la face considérée. De même q est la projection horizontale du sommet relatif à la face contiguë, etc.

Ces propriétés établies, rien n'est plus facile que d'achever la projection horizontale, attendu que l'on connaît les projections des sommets de toutes les pyramides; on trouvera en joignant ces sommets à ceux des bases correspondantes les projections des trente faces ωgph, $phrq$, $qrsb$, etc., du nouveau polyèdre.

Projection verticale du triacontaèdre. — Construisez simultanément les deux losanges qui touchent le dodécaèdre suivant les arêtes projetées en $f'g'$, $g'o'$; l'examen de la projection horizontale $g\omega fn$ du premier de ces losanges montre que deux de ses arêtes sont dans des plans de profil; par suite, les verticales menées par les points g', f' donnent les directions des projections de ces arêtes. Pour la face contiguë, $g'o'$ est une diagonale de profil, et la perpendiculaire à cette ligne menée par son milieu u' vous fournira la seconde diagonale, qui déterminera la projection verticale v' de l'un des sommets communs aux deux faces contiguës considérées.

Vous achèverez facilement, après ces explications, en suivant les indications données par la figure, la projection verticale du polyèdre.

321. Problème XXI. — *Étant donné un parallélipipède placé d'une manière quelconque par rapport aux plans de projection et dont* A, B, C *représentent trois arêtes contiguës, on propose d'amener le parallélipipède par trois rotations successives, la première autour d'un axe vertical, la deuxième autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, la troisième autour d'un axe vertical, dans une position telle, que les arêtes* A *et* B *soient parallèles au plan horizontal et l'autre* C *parallèle au plan vertical* (à résoudre).

322. Problème XXII. — *On donne la projection horizontale d'un parallélipipède rectangle et la projection verticale d'un sommet; construire la projection verticale du parallélipipède* (à résoudre).

323. Problème XXIII. — *Couper un cube par un plan suivant un hexagone équiangle dont deux côtés consécutifs soient dans le rapport de un à deux* (à résoudre).

324. Problème XXIV. — *Connaissant les projections de l'une des faces d'un tétraèdre équifacial, construire:* 1° *celles du tétraèdre,* 2° *les sphères tangentes aux quatre faces de ce polyèdre.* — On nomme *tétraèdre équifacial* un tétraèdre dont toutes les faces sont égales.

Pour la simplicité de l'épure, plaçons la face donnée ABC (*fig.* 255, pl. XXI) sur le plan horizontal de projection et désignons par S le sommet inconnu. Le triangle de l'espace SAB doit être égal à ABC et le côté SB doit différer de AB, ainsi que de BC, sans quoi le triangle ABS ou celui ABC serait isocèle ce qui est impossible, attendu que le triangle ABC nous est donné quelconque; il faut donc que SB soit égal à AC, on voit par là que, *dans tout tétraèdre équifacial, les arêtes opposées sont égales*; il faut en conclure que l'angle SBA, opposé à SA, égale l'angle CAB, opposé à CB; d'où il résulte que le rabattement sur le plan horizontal de SB se fait suivant la parallèle à la droite AC, menée par B; pour le même motif le rabattement, toujours sur le plan horizontal, de SB, autour de BC, se place sur le prolongement de la parallèle au côté AC. En portant sur cette parallèle $BS_1 = BS_2 = AC$ on trouve les deux rabattements S_1, S_2 du point S dédoublé. En relevant ces points, on construit la projection horizontale s du quatrième sommet. Quant à la cote de ce sommet elle fait partie du triangle rectangle SsB, dont on connaît un côté de l'angle droit sB et l'hypoténuse BS_2 dans sa véritable grandeur; le tracé ordinaire du rabattement de ce triangle donne la hauteur sS_3 de la pyramide. On achève alors facilement de construire les deux projections de ce polyèdre.

Afin de simplifier la construction des sphères tangentes aux faces du tétraèdre, reprenons les formules données au paragraphe **300** :

$$r=\frac{3V}{a+b+c+d},\quad \rho_1=\frac{3V}{b+c+d-a},\quad \rho_2=\frac{3V}{a+c+d-b},$$
$$\rho_3=\frac{3V}{a+b+d-c},\quad \rho_4=\frac{3V}{a+b+c-b},$$

qui déterminent les rayons de la sphère inscrite et ceux des sphères ex-inscrites; quant aux sphères tangentes aux combles, nous savons qu'elles n'existent plus dans le cas d'un tétraèdre équifacial. Pour le problème qui nous occupe les formules vont se simplifier; effectivement, appelons h la hauteur de la pyramide, nous aurons $a=b=c=d$, $V=\frac{ah}{3}$, d'où, en remplaçant dans les premières formules, on déduit :

$$r=\frac{ah}{4a},\quad \rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4=\frac{ah}{2a},$$

ou, après réduction,

$$r=\frac{h}{4},\quad \rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4=\frac{h}{2}.$$

Retournons au tracé des sphères. En ce qui concerne la sphère inscrite, la première formule indique qu'elle a son centre à la rencontre de quatre plans parallèles aux faces et divisant les hauteurs respectives en deux segments dont le rapport est $\frac{1}{3}$; le point de concours de ces plans n'est autre que le centre de gravité du tétraèdre, et ce centre se trouve lui-même au milieu de la droite de jonction des milieux de deux arêtes opposées du tétraèdre; d'où résulte le tracé du centre de la sphère inscrite qui suit.

Tirons la droite m_1m_2 de jonction des milieux des droites AB, sC, divisons-la en deux parties égales par le point o; pour relever ce point, menons la ligne de rappel passant par o et portons sur cette ligne à partir et au-dessus de la ligne de terre $o_1o'=\frac{s'e'}{4}$; o', o sont les projections du centre de la sphère et la cote o_1o' de ce point en est le rayon en véritable grandeur.

Pour démontrer que le centre de la sphère inscrite est au centre de gravité du tétraèdre, nous eussions pu simplement observer que ce centre de gravité est placé à la même distance des faces; car cette distance est égale au $\frac{1}{4}$ de la hauteur du tétraèdre, hauteur qui conserve sa longueur quand on change de face.

En ce qui concerne les sphères ex-inscrites observons que, d'une part, leurs rayons sont égaux au double de celui de la sphère inscrite, que, d'autre part, ces rayons sont aussi égaux aux cotes respectives des centres et qu'enfin les droites de jonction du centre de la sphère inscrite aux sommets de la pyramide doivent chacune contenir un centre des sphères cherchées (§ **300**). Après ces observations la construction des sphères restées inconnues ne saurait offrir de difficulté; pour la faire on tire les droites (so, $s'o'$), (Ao, $a'o'$), (Bo, $b'o'$), (Co, $c'o'$); puis on prend $o\omega_1=$ Ao, $o\omega_2=o$B, $o\omega_3=o$C, $o\omega_4=o$S et l'on relève par des lignes de rappel ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 en ω'_1, ω'_2, ω'_3, ω'_4, les couples de points (ω_1, ω'_1), (ω_2, ω'_2), (ω_3, ω'_3), (ω_4, ω'_4) sont les centres des quatre sphères cherchées.

Après le tracé de l'épure une vérification essentielle à observer est que les quatre cotes des centres des sphères ex-inscrites doivent être égales, et cette longueur unique des cotes donne la commune grandeur du rayon des quatre sphères ex-inscrites.

L'épure est encore soumise à cette vérification que les points ω_3, ω_1 doivent être respectivement

placés sur sS_1, sS_2. Effectivement, pour ω_3, par exemple, du parallélisme et de l'égalité des droites CA, BS_1 on déduit, en imaginant la droite qui unirait les points C, S_1, que cette droite passerait par le point m_1 et qu'elle y serait divisée en deux parties égales; il en résulte que la droite m_1m_2 est parallèle à S_1s et qu'elle est en outre équidistante de cette droite et du point C. On voit par là qu'en plaçant ω_3 à la rencontre des droites Co, sS_1 on aura bien C$o = o\omega_3$; ce qui justifie la vérification signalée. D'après ce qui vient d'être dit, la droite om_1 est parallèle à sS_1, elle est donc perpendiculaire sur le milieu de AB, en conséquence o est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et les points C, ω_1, B, ω_3, A, ω_2 doivent appartenir au même cercle; ces propriétés peuvent servir à vérifier ou à simplifier le tracé.

325. Problème XXV. — *Connaissant les projections de la base et la vraie grandeur de la hauteur d'un tétraèdre à arêtes opposées orthogonales, déterminer : 1° les projections du tétraèdre, 2° les plus courtes distances des arêtes opposées, 3° la sphère qui passe par les milieux des arêtes opposées et par les pieds de leur plus courte distance.* — Appuyer les constructions sur les propriétés du tétraèdre à arêtes orthogonales, qui suivent :

I. *Les quatre hauteurs se coupent en un seul point.*

II. *Les plus courtes distances des arêtes opposées se coupent au même point que les hauteurs du tétraèdre.*

III. *Les milieux de six arêtes et les pieds des plus courtes distances des arêtes opposées sont à une même sphère dont le centre se confond avec le centre de gravité du tétraèdre.*

326. Problème XXVI. — *Étant données les projections d'un tétraèdre dont la base est placée dans un plan horizontal, on propose de déterminer : 1° les projections d'une droite passant par le sommet de la*

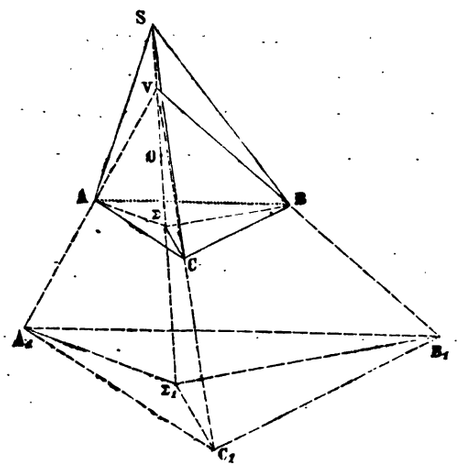


Fig. e_1.

pyramide et également inclinée sur ses faces latérales; 2° un point de cette droite tel, que de ce point on puisse voir l'aire latérale de la pyramide en véritable grandeur sur le plan horizontal de projection. — Soient ABC la base horizontale du tétraèdre (fig. e_1) et S son sommet. La droite qui va du sommet S au centre O de la sphère inscrite dans la pyramide répond évidemment aux conditions imposées par la première partie de l'énoncé.

Passons à la seconde partie. Soient Σ la trace de SO sur le plan de base et V le point de vue inconnu, tirons les droites ΣA, ΣB, ΣC, nous formons ainsi trois triangles ΣAB, ΣBC, ΣAC qui sont vus

du point V suivant les mêmes triangles que les faces latérales correspondantes. Dès lors que ces triangles sont vus comme les faces latérales, prenons leurs perspectives $\Sigma_1A_1B_1$, $\Sigma_1B_1C_1$, $\Sigma_1A_1C_1$, (§ 6) et cherchons à leur donner des aires respectivement égales à celles des faces latérales ; pour y parvenir comparons les pyramides de sommets S et de bases ΣAB, ΣBC, ΣAC, elles ont même hauteur et sont entre elles comme leurs bases. Ces mêmes pyramides ayant aussi pour sommet commun le point Σ sont encore dans le rapport des nouvelles bases SAB, SBC, SAC. Par suite, les aires des triangles de la base dont un sommet commun est en Σ, sont proportionnelles à celles des faces latérales, et comme elles sont aussi proportionnelles à celles de leurs perspectives, il suffit donc de placer l'œil V du spectateur sur $S\Sigma$ en faisant en sorte que

$$(1) \qquad \frac{\Sigma AC}{\Sigma_1A_1C_1} = \frac{\Sigma AC}{ASC},$$

et, comme on a d'autre part :

$$\frac{\Sigma AC}{\Sigma_1A_1C_1} = \frac{\overline{V\Sigma}^2}{\overline{V\Sigma_1}^2},$$

on peut remplacer la relation (1) par la suivante :

$$\frac{\overline{V\Sigma}^2}{\overline{V\Sigma_1}^2} = \frac{\Sigma AC}{ASC}.$$

Mais les aires des triangles ΣAC, ASC sont dans le rapport de leurs hauteurs puisque la base AC est commune à ces deux triangles, on voit donc que la question se réduit à un problème de géométrie facile à résoudre.

327. Problème XXVII. — *Connaissant les projections d'un tétraèdre, dont la base est sur le plan horizontal de projection, on propose de construire : les plus courtes distances des arêtes opposées prises deux à deux, celles des hauteurs du tétraèdre également prises deux à deux, et encore celles des perpendiculaires communes trouvées en dernier lieu, toujours prises deux à deux* (à résoudre).

328. Problème XXVIII. — *Construire le développement du tétrahexaèdre.* — Pour former le tétra-

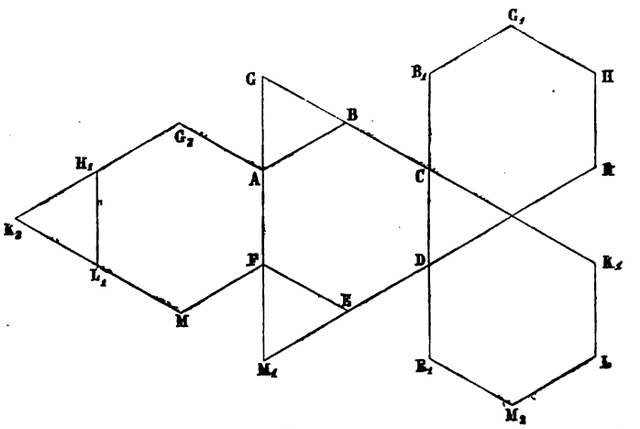


Fig. e_2.

hexaèdre on divise en trois parties égales chaque arête du tétraèdre régulier et on en détache des pyramides en faisant passer un plan sécant par les trois points de division les plus voisins de chaque sommet. La figure e_2, sur laquelle les mêmes lettres affectées d'indices différents désignent les points que l'on doit réunir pour reconstituer le solide, indique suffisamment la forme du développement.

329. Problème XXIX. — *Sur le plan horizontal de projection, on donne : 1° l'une* ABCD *des bases d'un tronc de pyramide quadrangulaire ; 2° un point* p *de la trace du plan de l'autre base ; et on demande de faire en sorte que la projection horizontale de celle-ci soit un rectangle, puis d'achever la construction de la projection horizontale du tronc de pyramide* (*fig.* 256, pl. XXI).

La projection horizontale de la base extérieure au plan horizontal doit être homologique de celle qui s'y trouve, pour qu'elle soit un parallélogramme, il faut alors que la troisième diagonale rt du quadrilatère donné représente la droite limite de l'une des figures (§ **263**, troisième solution) ; comme, d'autre part, on connaît un point p de l'axe d'homologie, on aura cet axe par la parallèle pq à rt menée de p. D'après le paragraphe précité les droites de jonction de la projection horizontale du sommet de la pyramide dont le tronc fait partie, aux points r, t, doivent donner les directions de deux côtés consécutifs de la projection du parallélogramme; il s'ensuit qu'en plaçant la projection de ce sommet en un quelconque s des points de la circonférence décrite sur rt comme diamètre, le parallélogramme sera un rectangle. La construction de la figure s'achève alors comme au paragraphe mentionné plus haut.

330. Problème XXX. — *Étant données la base et la hauteur d'une pyramide quadrangulaire telle, que les parallélogrammes tracés sur sa surface latérale se projettent sur le plan de base suivant les carrés, construire les projections du sommet de la pyramide.* — Plaçons le quadrilatère de base ABCD, $a'b'c'd'$ (*fig.* 257, pl. XXI) sur le plan horizontal de projection et complétons-le en v, n. Cela fait, cherchons la projection horizontale de l'un des parallélogrammes placés sur la surface latérale du polyèdre à construire, de celui dont un sommet est en D, par exemple. Cette projection doit être un carré homologique à la base, comme on l'a vu au paragraphe **263**; d'après ce même paragraphe la droite nv est la droite limite de l'une des figures, d'autre part D est à lui-même son homologue, puisqu'il doit appartenir aux deux figures, il s'ensuit que la parallèle x_1 à vn menée par D est l'axe d'homologie.

Les points p, q qui se trouvent sur l'axe d'homologie et sur deux côtés consécutifs du polygone de base, sont à eux-mêmes leurs homologues, ou, en d'autres termes, ils appartiennent à deux côtés consécutifs du carré; on en déduit que le sommet de ce carré opposé à D doit appartenir à la circonférence décrite sur pq comme diamètre.

D'autre part, la diagonale du carré qui passe par D doit bissecter l'angle des côtés issus de l'autre extrémité de cette diagonale, il en résulte que cette ligne passera par le milieu m de la demi-circonférence pmq; elle est donc sur le prolongement de la droite qui va du point D au point m.

Par la rencontre des deux lieux du sommet opposé à D, on trouve ce sommet en β et les côtés $p\beta$, $q\beta$ s'ensuivent ; alors les parallèles à ces côtés menées par D forment avec eux le carré demandé $D\alpha\beta\gamma$.

L'épure est soumise à cette vérification que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, doivent passer par un même point s qui est le centre d'homologie ou la projection du sommet de la pyramide. Il faut encore que les droites sn, sv déterminent en leur croisement avec $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ des points homologues à n, v et comme ces derniers sont sur la droite limite, on peut dire que les droites sv, sn doivent être respectivement parallèles aux côtés $\beta\gamma$, $\beta\alpha$.

La connaissance de la hauteur de la pyramide permet de relever s en s' ; on en déduit la projection verticale du polyèdre.

Nous avons représenté le tronc de pyramide compris entre le plan horizontal et celui de la section $D\alpha\beta\gamma$, $d'\alpha'\beta'\gamma'$.

331. Problème XXXI. — *Étant donnés les plans de deux des faces latérales, ainsi que la base d'une*

pyramide quadrangulaire, faire en sorte que les parallélogrammes tracés sur sa surface latérale se projettent suivant des losanges, sur le plan de base. — Plaçons la base ABCD sur le plan horizontal (*fig.* 258, pl. XXI) et, pour déterminer les plans des deux faces latérales données, figurons les projections f, f', d'un point commun aux faces dont BC, DC sont les traces horizontales, il suit de là que la droite fC est la projection horizontale de l'une des arêtes latérales.

En nous reportant toujours au paragraphe **263**, nous voyons que la troisième diagonale vm du quadrilatère complet obtenu en prolongeant les côtés de la base, n'est autre que la droite limite; comme les sections par des plans parallèles sont homothétiques, nous pouvons prendre pour axe d'homologie la parallèle x_1 à vm menée par A. Supposons alors le problème résolu et considérons le losange cherché A$\delta\gamma\beta$; les côtés $\gamma\delta$, $\gamma\beta$ devront respectivement passer par les rencontres q, p de x_1 et des côtés CD, CB de la base, d'autre part, la diagonale Aγ devra bissecter l'angle $q\gamma p$; considérons également la bissectrice extérieure $u\gamma$ de ce même angle.

Les deux côtés de l'angle $q\gamma p$ et ses bissectrices γA, γu forment un faisceau harmonique (§ **258**) lequel détermine une division qpAu également harmonique. D'autre part, les deux diagonales BD, AC du quadrilatère complet ADCBvm coupent harmoniquement la troisième diagonale vm, donc la division $vmnt$ est aussi harmonique, il est évident alors que le faisceau C.$vmnt$ est encore harmonique, conséquemment ses points de section avec l'axe d'homologie x_1 sont deux à deux conjugués harmoniques; mais trois points de cette division q, p, A tombent sur ceux de la première division harmonique signalée, les quatrièmes points des deux divisions doivent donc coïncider; on en déduit que le point u se trouve à la rencontre de Ct avec x_1.

Après ce que nous venons de dire la construction s'achève aisément; il suffit pour cela de décrire une demi-circonférence de cercle sur uA comme diamètre et de prendre sa rencontre γ avec la droite donnée fC, tirant alors les droites $q\gamma$, $p\gamma$ et leurs parallèles passant par A on trouve le losange A$\delta\gamma\beta$; les projections horizontales des arêtes latérales de la pyramide s'en déduisent et doivent, si l'épure est exactement faite, concourir en un seul point.

Sur la figure on a représenté le tronc de pyramide compris entre la base et le polygone de section; puis on a tracé, conformément à la convention établie (§ **275**), des hachures sur les partie coupées visibles.

332. *Appliquer la méthode de transmutation des figures aux trois dernières épures.* — Rien n'empêche de supposer dans chacune d'elles, que le quadrilatère provient de la projection d'une section faite dans la pyramide, et d'admettre alors que cette dernière ait pour base, sur le plan horizontal, la projection du second polygone tracé. Dans ces conditions le quadrilatère peut se transformer, par la méthode projective, en un parallélogramme, un rectangle, un carré ou un losange indifféremment, en ayant soin toutefois d'adjoindre à chacune des transformées la droite à l'infini du plan sur lequel on exécute le tracé. Ces dernières figures offrent un grand nombre de propriétés projectives, dont l'évidence se manifeste par leur seul examen, on peut alors déduire de chacune d'elles un théorème sur le quadrilatère.

Que l'on prenne, par exemple, la figure formée d'un carré ABCD (fig. e_3) de la droite à l'infini de son plan et une divergente menée par le centre; deux des côtés opposés AB, DC du carré déterminent des points de section m, n sur la divergente et la diagonale à l'infini le point ω_∞, nous savons que les points $mno\omega_\infty$ sont conjugués harmoniques.

Cela dit, considérons le carré comme provenant de la transformation du quadrilatère correspondant, les points m, n, o, ω_∞ correspondront à ceux m_1, n_1, o_1, ω_1 de la seconde figure, lesquels devront à leur tour donner une division harmonique, on en déduit le théorème qui suit :

Deux côtés opposés d'un quadrilatère déterminent sur une divergente, menée par le point de concours de deux de ses diagonales, un segment divisé harmoniquement par ce point de concours et par la troisième diagonale.

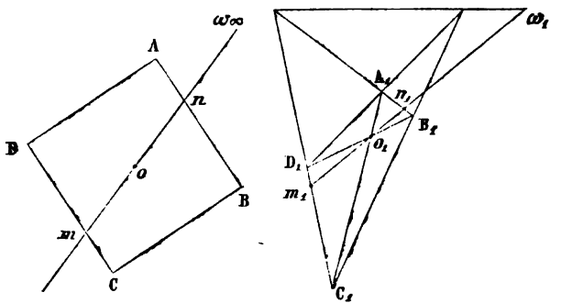


FIG. e_3.

Le lecteur pourra démontrer par cette voie un grand nombre de propriétés du quadrilatère, citons-en deux parmi les plus importantes :

I. *Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.*

II. *Toute transversale coupe les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère en six points qui sont en involution.*

333. Problème XXXII. — *La base d'une pyramide quadrangulaire étant donnée, faire en sorte que l'une des sections planes de la pyramide se projette suivant un second quadrilatère donné, sur le plan de base.* —

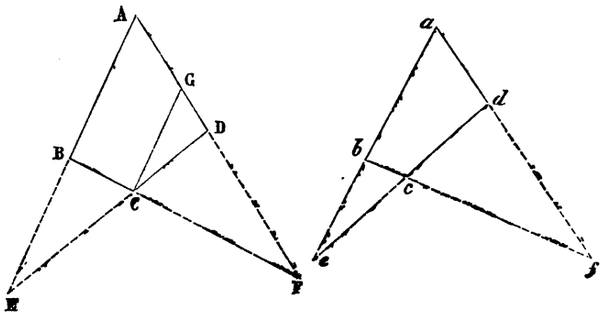


FIG. e_4.

Ce problème n'est autre que celui de placer homologiquement deux quadrilatères donnés, problème longtemps cherché par les anciens, et dont nous devons la solution à M. CHASLES.

A cause de la nature géométrique du problème, nous nous bornerons à indiquer le principe de sa résolution, laissant au lecteur le soin de compléter ces indications et de construire l'épure.

Soient pris (fig. e_4) les deux quadrilatères ABCDEF et *abcdef* que nous devons placer homologiquement.

Cherchons avant tout les droites limites sur chacune des figures. La détermination de la droite limite de l'une des figures se réduit à celle des homologues de deux points à l'infini sur l'autre figure; bornons-nous à donner le moyen de construire un de ces deux points, l'autre s'obtiendra de même. Menons une parallèle CG à AB et cherchons à déterminer l'homologue g de G : puisque le rapport anharmonique est projectif, on a (ADGF) = ($adgf$); on connaît donc trois points a, d, f et la valeur du rapport anharmonique des quatre points a, d, g, f; on peut alors facilement construire g.

Lorsqu'on aura effectué cette construction, on mènera la droite gc, dont la rencontre avec ab fera connaître le point cherché.

Passons maintenant à la recherche du centre d'homologie dédoublé. Désignons par O le centre d'homologie relatif à la figure ABCD et par K, L les points respectifs de rencontre des droites AB, AD avec la droite limite correspondante, imaginons les droites qui joindraient (O, K) (O, L). Lorsqu'on aura constitué la figure cherchée, les droites limites seront parallèles, les points K, L auront respectivement pour homologues les points à l'infini sur ab, ad; les angles OKL, OLK sont donc respectivement égaux à ceux que forment les droites ab, ad avec la droite limite correspondante; ces angles sont par suite connus et le triangle OKL pourra se construire puisqu'on connaîtra sa base KL et ses angles à la base; on en déduira l'une des positions du centre d'homologie dédoublé; l'autre s'obtiendra pareillement.

Dès lors que nous savons construire les deux droites limites et le centre dédoublé, tout revient à superposer les centres, et à rendre en même temps parallèles les droites limites, ce que l'on fait très facilement. Un seul point est actuellement à traiter, celui de la recherche de l'axe d'homologie.

Il est manifeste que la rencontre des droites homologues fera connaître immédiatement l'axe d'homologie; mais, il importe cependant d'indiquer la position remarquable qu'il doit occuper par rapport aux éléments que nous venons de construire.

Démontrons que la distance de l'une quelconque des droites limites à l'axe est précisément égale à celle du centre d'homologie à l'autre droite limite.

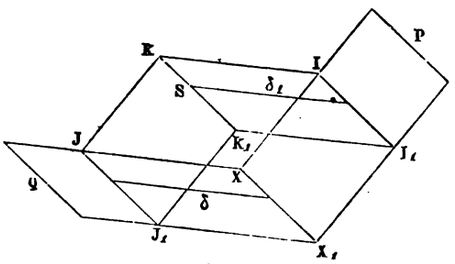


Fig. e_5.

Deux figures homologiques, situées sur un même plan, peuvent être considérées comme les projections orthogonales de deux sections planes d'une même pyramide (§ 249).

Soient (fig. e_5) P et Q les plans sécants, S le sommet de la pyramide, menons par ce point un plan parallèle à Q, il coupera P suivant la droite II_1, qui n'est autre que la droite conjuguée des points à l'infini du plan Q, donc en projection ce sera l'une des droites limites; figurons la distance du point S à cette droite, elle se mesure sur la perpendiculaire δ_1, menée de ce point sur II_1; un plan parallèle à P mené par ce même point S détermine sur celui parallèle à Q une intersection KK_1 et sur Q la droite JJ_1 dont la projection n'est autre que la seconde droite limite; enfin, l'intersection XX_1 des plans P et Q se projette suivant l'axe d'homologie, et sa distance à JJ_1 se mesure sur une perpendiculaire δ commune à ces droites.

Les droites JJ_1, XX_1, et celles KK_1, II_1, sont évidemment parallèles et la distance δ des deux premières est égale à celle δ_1 des dernières, cette double propriété est projective dans le système orthogonal, puisque les deux couples de droites sont dans des plans parallèles; le théorème est ainsi démontré.

334. Théorème. — *Si l'on fait sur un plan* B *la perspective d'une figure tracée sur un plan* A, *il y a*

sur ces deux plans deux points correspondants b et a tels, que tout segment de la figure B *est vu du point b sous le même angle que le segment correspondant de la figure* A *du point a* (Abel TRANSON. *Nouvelles annales*, t. VIII, 2me série, p. 426) (à démontrer).

335. Problème XXXIII. — *Construire les projections d'un dodécaèdre rhomboïdal défini de la manière suivante :*

Constituons tout d'abord un trièdre de sommet A (fig. e_6), dont les faces seront les angles obtus de trois losanges égaux ABGD, ACED, ABFC; menons ensuite par A une droite Aα égale aux côtés des losanges, placée à l'intérieur du trièdre A et également inclinée sur ses arêtes.

Adjoignons, de toutes les manières possibles, à la droite Aα deux des côtés du trièdre A et construisons sur ces groupes de droites (Aα, AD, AB), (Aα, AD, AC), (Aα, AC, AB) des parallélipipèdes ABGDHKNα, ADECJIHα, ABFCJαNL; puis, à l'aide d'un quatrième parallélipipède αHIJLMKN, construit sur αH, αJ, αN, achevons de déterminer le dodécaèdre rhomboïdal : le solide sera formé par l'ensemble des quatre parallélipipèdes dont on supprimera bien entendu les quatre arêtes intérieures αA, αH, αJ, αN, tracés en lignes mixtes sur la figure. On pourrait faire en sorte que le losange DACE

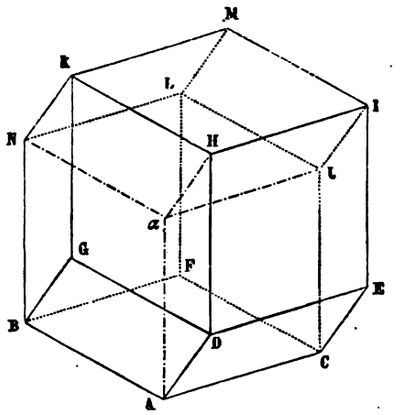


FIG. e_6.

fît un angle obtus tel, que le dodécaèdre devînt équifacial, c'est là un problème de géométrie facile à résoudre et qui conduit au dodécaèdre rhomboïdal que l'on rencontre dans la nature, mais nous n'avons pas cru utile de développer cette question, nous supposerons donc dans la suite que l'angle obtus du losange est quelconque.

EXÉCUTION DU TRACÉ. — Soient P, P′ les traces du plan de l'une des faces du dodécaèdre (*fig.* 259, pl. XXII), plaçons l'un des côtés du losange qui forme cette face en *ac*, sur la trace horizontale de ce plan. Pour achever de déterminer ce losange, employons un nouveau plan vertical dont la ligne de terre x_1y_1 est perpendiculaire au côté *ac*; construisons la nouvelle trace verticale $\beta P'_1$ du plan donné, puis concevons que l'on ait rabattu le plan PβP′$_1$ sur le plan horizontal en entraînant le losange qu'il contient. Soit B$_1ac$ le rabattement de l'un des angles obtus de ce losange ; supposons en outre que l'on ait pris $aB_1 = ac$, le point B$_1$ est alors le rabattement de l'un des sommets du losange. Nous allons appliquer la construction qui a servi, au début du présent paragraphe, à constituer le dodécaèdre régulier, construction basée sur la connaissance du trièdre équifacial de sommet A; occupons-nous donc tout d'abord de la détermination de

cet angle solide; comme ses trois faces sont égales, on peut concevoir que deux d'entre elles aient été rabattues sur le plan horizontal, en tournant, l'une, autour de ac, l'autre, autour de aB_1, de telle sorte qu'elles soient venues recouvrir l'espace angulaire B_1ac déjà figuré.

Pour reconstituer le trièdre, laissons d'abord le plan $P\beta P'_1$ sur sa position rabattue, et relevons les deux faces que l'on vient de rabattre; les points B_1, c se déplacent sur des plans perpendiculaires aux charnières et se rejoignent en un point de l'espace dont la projection se fait à la rencontre D_1 des perpendiculaires aux charnières ac, aB_1 menées respectivement des points B_1, c. Relevons ensuite le plan PaB_1 en entraînant le trièdre reconstitué: le point B_1, b'_2 décrit un arc de cercle, dont la projection verticale fait partie du cercle de centre β et de rayon égal à $\beta b'_2$, et s'arrête en b'_1, b; le point d'_2 vient en δ'_1; la perpendiculaire au plan horizontal menée par D_1 et qui passe par l'extrémité de la troisième arête du trièdre reconstitué, se projette, sur le nouveau plan vertical, suivant une perpendiculaire élevée en δ'_1 à la trace P'_1. D'autre part, le sommet D du polyèdre se déplace sur une circonférence de cercle qui, dans l'espace comme en projection verticale, se confond avec la circonférence dont B_1, b'_2 décrit un arc dans son mouvement, circonférence projetée en $b'_2\gamma'_1b'_1$; conséquemment, sur le nouveau plan vertical, le sommet D sera projeté au point de croisement d'_1 de la perpendiculaire à P'_1 menée par δ'_1 et de la circonférence γ'_1; la ligne de rappel menée par d'_1 donne, par sa rencontre avec B_1b, la projection horizontale d du point D remis en place sur le polyèdre.

Passons à la détermination de la droite auxiliaire également inclinée sur les trois arêtes du trièdre A. Les arêtes du polyèdre étant égales entre elles on obtiendra simplement la droite cherchée en abaissant du point a, β une perpendiculaire au plan des trois points (c, β), (d, d'_1), (b, b'_1); mais la droite bd, $b'_1d'_1$ est dans un plan de front du nouveau système de plans de projection, donc, dans ce système, la projection verticale de la droite cherchée n'est autre que la perpendiculaire $\beta S'_1$ abaissée de β sur $d'_1b'_1$. Quant à sa projection horizontale, on l'obtient en coupant le plan des trois points par celui $P\beta S'_1$ qui projette verticalement la droite inconnue, puis en menant par le point a, β une perpendiculaire à la droite de rencontre, et en cherchant la projection horizontale de cette perpendiculaire. Pour exécuter ce tracé rabattons le plan projetant $P\beta S'_1$ sur le plan horizontal, autour de βP, en entraînant sa droite de rencontre avec le plan des trois points; le point c appartient à l'intersection et à la charnière, comme tel, il sera le rabattement que nous cherchons; la droite bd, $b'_1d'_1$ rencontre le plan $P\beta S'_1$ en un point dont la projection verticale se trouve en ω'_1 et dont la seconde projection appartient à bd, il en résulte que ce point est rabattu en Ω_1, la droite qui va de Ω_1 à c est le rabattement cherché, et sa perpendiculaire aS_1 issue de a n'est autre que le rabattement de la droite également inclinée sur les trois arêtes; d'autre part, cette droite doit avoir pour longueur celle commune aux arêtes du dodécaèdre, et comme d'ailleurs elle est vue dans sa véritable grandeur sur le rabattement, nous porterons sur aS_1 à l'aide de l'arc de cercle déjà figuré une longueur $a\alpha_2$ égale à ac.

Tout se réduit actuellement à construire la droite $a\alpha_2$ relevée: α_2 se projette verticalement en α'_2, point qui se relève au croisement α'_1 de l'arc de cercle décrit de β comme centre avec $\beta\alpha'_2$ pour rayon et de la projection $\beta S'_1$ de la perpendiculaire au plan des trois points; pour terminer joignons α_2 au centre d'affinité par une droite et prenons la rencontre α_1 de celle-ci avec la ligne de rappel conduite par α'_1.

Il est maintenant bien facile de tracer, en revenant à l'ancien plan vertical et en supprimant toutefois les lignes inutiles, les projections des arêtes des quatre parallèlipipèdes qui donneront celles du dodécaèdre rhomboïdal considéré.

336. Problème XXXIV. — *Construire la commune intersection du dodécaèdre rhomboïdal dont on vient de déterminer les projections, et d'un prisme quadrangulaire droit ayant ses arêtes parallèles à la ligne de terre.*

La recherche de l'intersection d'un polyèdre et d'un prisme dont les arêtes sont parallèles à l'un des plans coordonnés s'effectue très-aisément à l'aide d'une projection auxiliaire sur un plan perpendiculaire aux arêtes latérales du prisme; en effet, sur ce nouveau plan de projection, la ligne cherchée est projetée suivant le contour de la section droite du prisme compris dans l'intérieur de la projection du second polyèdre, et les sommets de l'intersection y sont projetés les uns aux sommets de la section droite qui tombent dans les limites que l'on vient d'indiquer, les autres aux points de rencontre du périmètre de cette section droite et des projections des arêtes du polyèdre. La méthode que nous indiquons n'est qu'un cas particulier d'une méthode plus générale donnant la rencontre d'une pyramide quelconque et d'un polyèdre; en effet, si l'on construit la projection centrale du polyèdre et de la pyramide, en prenant pour centre de projection le sommet de cette dernière et pour plan de projection celui de sa base, les circonstances indiquées pour le prisme se reproduiront et permettront de construire les projections de la commune intersection.

Retournons à l'épure et soient (*fig.* 260, pl. XXII) *abcdefghijklmn*, $a'b'c'd'e'f'g'h'i'j'k'l'm'n'$ les projections du dodécaèdre rhomboïdal déterminées dans le paragraphe qui précède.

Adoptons une ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à la première et changeons de plan vertical. La nouvelle projection du dodécaèdre sera $a'_1b'_1 \ldots l'_1m'_1n'_1$; celle du prisme sera donnée par sa section droite $u'_1v'_1w'_1z'_1$, supposée connue.

La détermination des sommets du polygone de rencontre ne saurait offrir aucune difficulté après ce qui vient d'être dit, c'est l'ordre dans lequel il faut joindre les points qui doit uniquement nous occuper.

Employons la méthode du paragraphe **273**. Il faut avant tout déterminer une ligne utile de l'intersection, rien n'est plus facile, attendu que nous connaissons tous les sommets du polygone de rencontre, prenons par exemple, la droite (1, 2), (1′, 2′) provenant de la rencontre du plan de la face *hkgd*, $h'_1k'_1g'_1d'_1$ du dodécaèdre et de la face du prisme dont la trace verticale est en $z'_1u'_1$. L'une des extrémités 2, 2′ de la droite (1, 2), (1′, 2′) tombe sur une arête, abandonnons la face correspondante *hkgd*, $h'_1k'_1g'_1d'_1$ pour la remplacer par la face contiguë *gknb*, $g'_1k'_1n'_1b'_1$ dont l'arête de contiguïté est celle *gk*, $g'_1k'_1$ qui contient 2, 2′, conservons la face du prisme et prenons la rencontre $2k_2$, $2'k'_2$ des plans de ces faces, limitons-la à sa partie utile (§ **273**) en $2'_1$, $3'_1$, 2, 3. Le point 3, $3'_1$ est sur l'arête de contiguïté de deux faces, abandonnons celle $z'_1u'_1$ de ces faces contiguës qui vient d'être employée et remplaçons-la par l'autre $u'_1v'_1$, tout en conservant la face *gknb*, $g'_1k'_1n'_1b'_1$; la rencontre des plans se fait suivant $3k_3$, $3'_1k'_3$, limitant cette droite à sa partie utile (§ **273**) on trouve alors le côté (3, 4), ($3'_1$, $4'_1$) de la commune intersection cherchée. Le point 4_1, $4'_1$ est sur une arête, abandonnons la face correspondante, etc. En continuant l'application de la méthode générale du paragraphe précité on achèvera de construire les projections (1, 2, 3, 4....19, 20, 1), ($1'_1$, $2'_1$, $3'_1$, $4'_1$,....$19'_1$, $20'_1$, $1'_1$), de la ligne d'intersection, et, à l'aide de lignes de rappel on trouvera la projection 1′2′3′4′....19′20′1′ de cette ligne sur le plan vertical primitif.

La figure 260 représente le dodécaèdre rhomboïdal avec sa ligne d'intersection, en supprimant les parties du prisme placées à l'extérieur du dodécaèdre. Quant à la visibilité du polygone de rencontre on l'obtient fort simplement en remarquant que les arêtes sont cachées ou visibles suivant qu'elles appartiennent à une face elle-même cachée ou visible. Sur la figure 261, pl. XXIII, on a

représenté le dodécaèdre supposé plein, en enlevant le prisme avec la partie du dodécaèdre qui s'y trouve contenue.

La visibilité de la figure 261 a été déterminée suivant les indications du paragraphe **238** : elle est la même que celle de la figure 260, sauf pour les arêtes cachées du polygone de rencontre dont certaines parties deviennent visibles, par suite de la suppression de la portion du dodécaèdre intérieure au prisme; ainsi la projection 1'2' est devenue entièrement visible, celles 2'3', 3'4' le sont devenues partiellement etc. Il importe de bien observer que les portions des arêtes du prisme (3, 14), (3', 14'), (20, 16), (20', 16'), (6, 10), (6', 10') ne doivent pas être dessinées en trait mixte mais en trait plein ou en points ronds : ces arêtes représentent en effet l'empreinte laissée par le prisme dans le dodécaèdre, ou si l'on veut, ces lignes sont des arêtes de l'ouverture que pratique le prisme dans le dodécaèdre. Des hachures ont été dessinées suivant les conventions données au paragraphe **275**.

La figure 262 représente le solide commun aux deux polyèdres. La visibilité résulte de celle des faces des deux polyèdres; on devra, bien entendu, tenir compte des portions de ces faces qui ont été enlevées comme ne faisant pas partie du solide commun.

La figure 263 donne enfin les projections du solide constitué par l'ensemble des deux polyèdres. Pour l'obtenir on dessine les deux projections des polyèdres et de leur commune intersection, en ayant soin de figurer par des lignes mixtes les portions des arêtes de chaque polyèdre, qui sont comprises dans l'intérieur de l'autre; à cet égard nous ferons remarquer que nous nous sommes un peu écartés de cette règle dans la présente figure et dans les deux qui la précédent en dessinant les parties supprimées des arêtes du dodécaèdre en trait pointillé, afin de les distinguer de celles du prisme qui sont en trait mixte.

La visibilité se détermine très-aisément, on sait en effet que, pour qu'un côté du polygone d'intersection soit visible, il faut et il suffit qu'il appartienne à deux faces visibles, dès que l'une des faces qui le contiennent est cachée le côté l'est aussi.

est parallèle à l'un des plans de projection, elle offre un méridien parallèle à ce plan, appelé *méridien principal.*

Il importe d'indiquer un autre mode de génération des surfaces de révolution, en premier lieu et surtout, dans le but de montrer ces surfaces sous un point de vue utile à la résolution de certains problèmes; en second lieu, afin de donner un exemple de la génération d'une surface par une courbe qui non seulement se déplace suivant une loi déterminée, mais qui, en outre, se déforme pendant le mouvement. Dans ce mode on considère la surface comme engendrée par un cercle mobile dont le plan est perpendiculaire à l'axe, dont le centre décrit cet axe et qui glisse sur la génératrice, laquelle sert alors de directrice et règle en même temps les variations du rayon de la génératrice nouvelle.

Nous adopterons pour le tracé des épures relatives aux problèmes que nous aurons à résoudre,

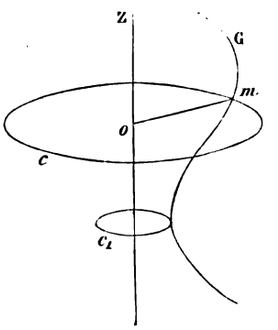


FIG. e_1.

dans l'étude des surfaces de révolution, celles de ces surfaces que l'on emploie le plus fréquemment dans les arts, parmi lesquelles on trouve au premier rang les surfaces du second degré.

Une surface de révolution du second degré est engendrée par la rotation d'une conique autour de l'un de ses axes.

Les surfaces de révolution du second degré sont :

1° *L'ellipsoïde de révolution,* surface engendrée par la rotation complète d'une ellipse autour de l'un de ses axes; lorsque l'axe de rotation se confond avec le grand axe de l'ellipse méridienne, l'ellipsoïde est *allongé*, dans l'autre cas il est *aplati*. Enfin, quand l'ellipse se transforme en cercle la surface devient une sphère.

2° *L'hyperboloïde de révolution à une nappe,* que l'on engendre par la rotation entière d'une hyperbole autour de son axe non transverse pris pour axe de rotation.

3° *L'hyperboloïde de révolution à deux nappes,* engendré par la rotation complète d'une hyperbole autour de son axe transverse. Lorsque l'hyperbole se réduit à deux droites les deux hyperboloïdes de révolution deviennent des cônes également de révolution.

4° *Le paraboloïde de révolution,* engendré par la rotation entière d'une parabole autour de son axe. Comme variété du paraboloïde de révolution il faut signaler le cylindre de révolution, que l'on obtient lorsque la parabole se réduit à deux droites parallèles à l'axe de rotation.

En dehors des surfaces de révolution du second degré on n'emploie guère que le *tore circulaire;* cette surface est celle qu'engendre un cercle tournant autour d'un axe placé dans son plan. Nous aurons cependant à parler du *tore général* qui est engendré par la rotation d'une conique

autour d'une droite située dans le plan de cette courbe, mais non confondue avec l'un de ses axes.

339. Surfaces réglées. — Lorsqu'on peut engendrer une surface par une droite mobile suivant une loi déterminée on dit qu'elle est réglée.

Le cône directeur d'une surface réglée s'obtient en déplaçant toutes ses génératrices parallèlement à elles-mêmes de façon à les faire passer par un même point pris arbitrairement dans l'espace.

Le plan directeur d'une surface réglée est le cône directeur obtenu dans le cas où les génératrices rectilignes de la surface sont toutes parallèles à un même plan.

La connaissance de trois directions D_1, D_2, D_3, *est nécessaire et suffisante à la détermination d'une surface réglée* (fig. e_8).

Démontrons-le; soit, à cet effet, un point M de D_1; établissons simplement que le problème d'assujettir une droite à passer par ce point M en rencontrant D_2 et D_3 offre un nombre limité de solutions; effectivement, les droites cherchées ne sont autres que les rencontres de deux cônes qui auraient pour sommet commun M et dont les directrices seraient pour l'un D_2, pour l'autre D_3, cônes qui

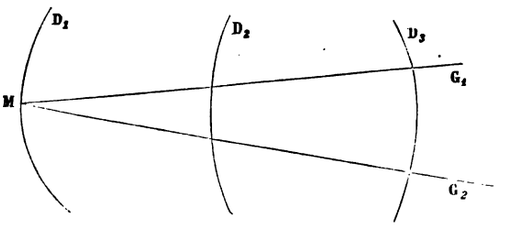


FIG. e_8.

se coupent suivant un nombre limité de droites; sauf dans les cas où les cônes seraient homothétiques, alors ils se confondraient et feraient partie de la surface, dont la détermination s'achèverait en déplaçant M sur D_1. Il est encore un cas exceptionnel, c'est celui dans lequel les cônes ne se couperaient pas, on dit alors que le point M est *parasite* ou *virtuel*.

On remplace souvent l'une des courbes directrices par le cône directeur; la surface est bien déterminée dans ce cas; il suffit en effet, pour le voir, de transporter le cône directeur parallèlement à lui-même en un point de l'une des directrices, de prendre sa rencontre avec le cône auxiliaire de même sommet et passant par la seconde directrice, rencontre composée d'un nombre fini de génératrices répondant aux données du problème.

On divise les surfaces réglées en *surfaces gauches* et en *surfaces développables*. Les dernières sont celles qui peuvent être déroulées de manière à s'appliquer sur un plan sans déchirure ni duplicature; les premières sont celles qui ne jouissent pas de cette propriété. Les surfaces coniques et les surfaces cylindriques, pouvant être considérées comme la limite d'une pyramide ou d'un prisme, sont développables.

On appelle *hyperboloïde à une nappe* la surface réglée dont trois directrices sont rectilignes.

Le paraboloïde hyperbolique est la surface réglée à plan directeur dont les deux directrices sont rectilignes; ou, en d'autres termes, la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur deux droites en restant parallèle à un plan fixe.

Le *conoïde* est une surface réglée à plan directeur dont une seule directrice est rectiligne; quand

la directrice rectiligne est perpendiculaire au plan directeur, le conoïde est *droit*. Enfin, d'après la définition du précédent alinéa, le conoïde se transforme en paraboloïde hyperbolique ou *conoïde du second degré*, lorsque ces deux directrices sont rectilignes.

DU PLAN TANGENT EN GÉNÉRAL.

340. Théorème fondamental. — *Si plusieurs courbes tracées sur une surface se croisent en un seul point, leurs tangentes en ce point sont contenues dans un même plan, qui porte le nom de plan tangent à la surface au point considéré.* — Pour démontrer que toutes les tangentes sont dans un même plan, il suffit évidemment de faire voir que trois tangentes quelconques appartiennent toujours à un même plan.

Soient trois courbes C_1, C_2, C_3 (fig. e_9) à la surface considérée et se croisant en un de ses points M.

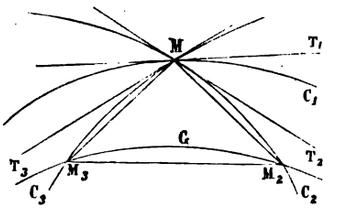


FIG. e_9.

La surface peut être engendrée par une courbe rencontrant C_2, C_3 qui se déplacerait tout en se déformant et en se rapprochant constamment de C_1.

Considérons l'une quelconque G des positions de la génératrice, et soient M_2, M_3 ses rencontres sur C_2, C_3, tirons les droites MM_2, MM_3, M_2M_3 qui, formant un triangle, sont nécessairement contenues toutes trois dans un même plan, et cela quelque voisine que soit la génératrice G de sa limite C_1;

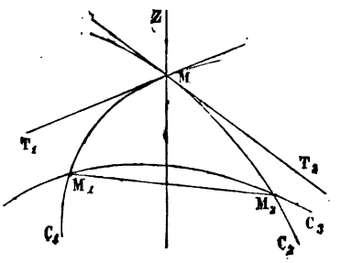


FIG. e_{10}.

il faut en conclure que la propriété aura encore lieu à la limite. Dans le mouvement M_3 tend vers M conséquemment MM_3 tend vers la tangente MT_3 menée par M à la courbe C_3; semblablement MM_2 tend vers la tangente MT_2 à C_2; en ce qui concerne la limite de la corde M_2M_3 menée à une courbe mobile G qui est susceptible d'une déformation et dont les points de section M_2, M_3 sont tous deux

mobiles, on peut dire qu'elle donne généralement la tangente MT_1 en M à la courbe C_1, mais qu'il peut se produire des exceptions.

Il faut mentionner comme cas exceptionnel celui qui se produit sur l'axe Z (fig. e_{10}) d'une surface de révolution engendrée par une courbe C_1 coupant cet axe de rotation en M; effectivement, si l'on prend deux positions C_1, C_2 de la génératrice pour diriger le mouvement d'une courbe mobile C_3, quand C_3 passera par M, la corde $M_1 M_2$ prendra une position indéterminée dans le plan des tangentes MT_1, MT_2, qui ne saurait, par suite, donner la tangente à la limite de C_3; la démonstration du théorème tombe donc par cela même en défaut; quant au théorème, il est aussi en défaut, attendu que les tangentes aux courbes méridiennes donnent un cône tangent et nullement un plan tangent à la surface considérée.

Signalons de ce théorème quelques conséquences évidentes, mais qui sont d'un emploi constant dans ses nombreuses applications.

Conséquence I. — *Le plan tangent en un point d'une surface quelconque se détermine par les tangentes à deux courbes de la surface passant par le point considéré.*

Conséquence II. — *Le plan tangent en un point d'une surface réglée contient la génératrice rectiligne qui passe en ce point :* en effet, cette droite est à elle-même sa propre tangente.

Conséquence III. — *Si l'on conduit par le point de contact d'une surface et de l'un de ses plans tangents un plan sécant quelconque, les sections sur la surface et sur son plan tangent sont tangentes au point considéré.* — Cette propriété est évidente, puisque la tangente à la section sur la surface doit appartenir à l'un et à l'autre plan.

On appelle *normale* en un point d'une surface la perpendiculaire au plan tangent au point considéré.

REPRÉSENTATION DES SURFACES

341. Contour apparent. — Soient O le point de vue (fig. f_1), P le plan de projection considéré et S une surface quelconque. Traçons un rayon visuel V coupant la surface; soient a_1, a_2, etc., les points de section; a_1, qui est parmi eux le plus voisin de O, est évidemment le seul qui soit visible; cherchons à déterminer la ligne de séparation C des points visibles, tels que a_1, de ceux, tels que a_2,

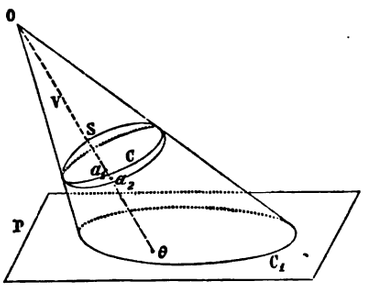


Fig. f_1.

qui sont cachés, ligne qui porte le nom de *contour apparent de la surface.* Sur cette ligne a_1 et a_2 doivent se confondre, le rayon visuel doit donc devenir tangent à la surface; cette remarque peut s'énoncer de la manière suivante : *Le contour apparent d'une surface est la courbe de contact du cône tangent à cette surface dont le sommet est au point de vue*, ou, ce qui revient au même : *Le contour apparent d'une surface est la courbe de contact de ceux de ses plans tangents qui passent par le point de vue.* La

courbe C_1, donnée par la rencontre du cône circonscrit à la surface avec le plan de projection P, s'appelle le *contour apparent en projection de la surface*. On peut dire que *ce contour est la trace du cône circonscrit à la surface, dont le sommet se trouve sur le point de vue.*

Considérons (*fig.* f_1) le rayon visuel V coupant P en θ, on voit que θ est intérieur à C_1, et que, par suite, le contour C_1 renferme les projections de tous les points de la surface, à la condition toutefois de placer le centre de projection au point de vue O.

Dans les épures, le spectateur est supposé à l'infini sur une perpendiculaire au plan de projection considéré (§ **20**); en appliquant cette convention, on peut modifier les précédents énoncés et dire :

1° *Le contour apparent d'une surface par rapport à l'un des plans de projection est la courbe de contact de cette surface avec ses plans tangents perpendiculaires au plan de projection considéré.*

2° *Le contour apparent en projection d'une surface n'est autre que la projection de la ligne de l'espace donnant le contour apparent par rapport au plan de projection considéré.* — Rappelons que ce dernier contour est la limite des projections des divers points de la surface.

342. Théorème. — *Lorsqu'une ligne est tracée sur une surface, sa projection sur un plan quelconque touche le contour apparent en projection de la surface.* — Soient O, P le centre et le plan de projection

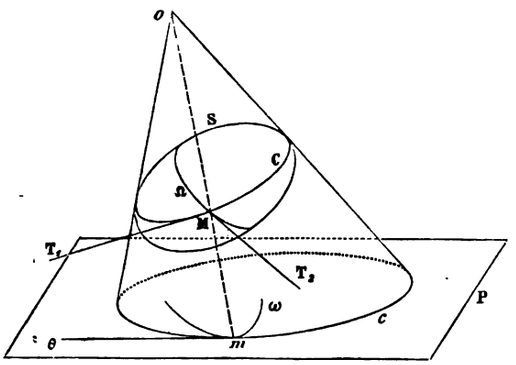


Fig. f_2.

(fig. f_2), S la surface considérée, C son contour apparent par rapport au plan P, Ω la courbe considérée sur la surface S, ω sa projection sur P et c le contour apparent sur P. Les lignes Ω, C tracées sur la même surface S se rencontrent en des points réels ou imaginaires. Désignons par M l'un de ces points, menons-y les tangentes T_1, T_2 aux courbes C, Ω; tirons en outre la génératrice OM du cône circonscrit; les droites T_1, T_2, OM appartiennent au plan tangent à S en M; comme ce plan passe par le centre de projection O, c'est lui qui projette simultanément sur P les deux tangentes T_1, T_2, par suite et d'après le théorème du paragraphe **142**, la trace θ de ce plan est tangente commune à c, ω; c'est là ce qu'on voulait démontrer. Ajoutons toutefois que le contact des lignes ω, c, peut être imaginaire.

En terminant ce sujet nous ferons remarquer que le problème de la détermination du contour apparent des surfaces n'est autre que celui de la recherche de leurs plans tangents; c'est donc dans le chapitre des plans tangents aux diverses surfaces qu'il faut aller prendre le moyen de les représenter.

CHAPITRE II

DES PLANS TANGENTS AU CONE ET AU CYLINDRE

343. Théorème fondamental. — *Le plan tangent à une surface conique est le même tout le long de la génératrice.* — Soient S le sommet d'une surface conique (fig. f_3) et G l'une quelconque de ses génératrices. Nous voulons montrer qu'aux divers points de G le plan tangent est toujours le même; démontrons pour cela que ceux de deux points M_1, M_2, pris arbitrairement sur G, se confondent. A cet effet, tirons une génératrice G′ voisine de G, traçons deux courbes de la surface C_1, C_2 passant respectivement par M_1, M_2 et tirons enfin les cordes de jonction, $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$, des points où elles coupent G, G′. Lorsqu'on fait mouvoir la génératrice G′ afin qu'elle se rapproche de G, ces cordes tendent simultanément à devenir tangentes et sont toujours dans le plan des droites G, G′; il en faut conclure, en passant à la limite, que les tangentes $M_1 T_1$, $M_2 T_2$ et la génératrice G sont dans un même plan, lequel touche la surface aux points M_1, M_2; le théorème est ainsi établi.

Comme le cylindre n'est autre chose qu'un cône ayant son sommet à l'infini, et, d'autre part, que

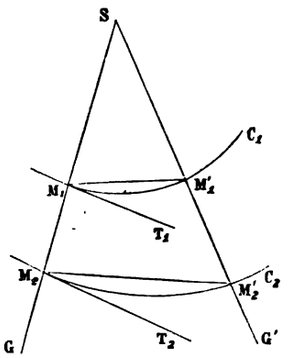


Fig. f_3.

la position du sommet n'intervient aucunement dans la démonstration précédente, on peut dire que le théorème fondamental s'applique également aux surfaces cylindriques.

344. *Du nombre de conditions nécessaires à la détermination du plan tangent.* — Pour déterminer un plan il faut connaître trois de ses points, ce qu'on exprime en disant que la détermination d'un plan équivaut à trois conditions. La tangence au cône ou au cylindre équivaut à deux conditions; effectivement, en faisant rouler un plan sur un cône on peut arriver à le faire passer par un point donné, ou, en d'autres termes, le plan tangent est déterminé dès qu'on l'astreint à passer par un point, la tangence au cône ou au cylindre équivaut donc à deux points, ou à deux conditions. Le parallélisme avec une droite équivaut à une condition : car donner une droite parallèle à un plan, c'est donner un point à l'infini du plan. Le parallélisme avec un plan donné équivaut à deux conditions; effectivement, on connaît alors la droite à l'infini du plan cherché, etc.

345. Problème I. — *Connaissant l'une des projections d'un point placé sur une surface conique, déterminer son autre projection* (*fig.* 264, pl. XXIV).—Soient d, d' les projections de la directrice, et s, s' celles du sommet, soit encore m la projection horizontale donnée du point de la surface dont on veut la seconde projection. Dans ce but, tirons la projection horizontale sm de la génératrice passant au point M et relevons sa rencontre μ avec d, en μ', sur d'; traçant alors la projection verticale $s'\mu'$ de la génératrice considérée, par le croisement m' de cette droite et de la ligne de rappel du point m, on trouve le point demandé. Dans l'exemple choisi on ne trouve qu'une solution, mais fréquemment le problème en offre plusieurs : il y en a autant que de points de rencontre de sm avec d, lorsque les lignes de rappel menées par ces points rencontrent respectivement d' en un seul point.

346. Problème II. — *Connaissant l'une des projections d'un point placé sur la surface d'un cylindre, déterminer son autre projection* (*fig.* 265, pl. XXIV).—Soient d, d' les projections de la directrice et g, g' celles d'une droite déterminant la direction des génératrices, donnons-nous, en outre, la projection horizontale m d'un point de la surface d'un cylindre et cherchons la projection verticale de ce point.

Menons, comme dans le cas précédent, la projection $m\mu$ de la génératrice du point, relevons μ en μ', tirons de ce point une parallèle à g' et relevons-y m en m'; m, m' sont les projections d'un point placé sur le cylindre.

347. Problème III. — *Mener le plan tangent en un point d'une surface conique.*

Solution générale. — Soient D la directrice et S le sommet de la surface (fig. f_4), prenons un point M sur celle-ci et, pour construire une première droite du plan tangent, tirons la génératrice

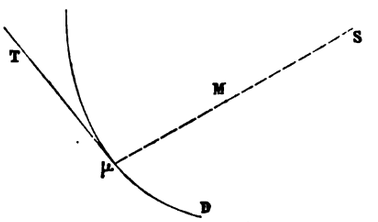


Fig. f_4.

SM, laquelle rencontre D en μ; en vertu du théorème fondamental le plan tangent en M doit être aussi tangent en μ, et celui de ce dernier point se détermine par la génératrice Sμ et par la tangente T à la directrice D, qui passe au point μ.

Exécution du tracé. — Revenons à l'épure 264, pl. XXIV, donnant les projections d'un point m, m' de la surface. Pour construire le plan tangent en ce point nous mènerons la tangente à la directrice au point μ, μ', laquelle aura ses projections t, t' tangentes à celles d, d' de cette directrice (§ **142**), et alors le plan des droites (t, t'), (sm, $s'm'$), sera celui qu'il fallait construire.

348. Problème IV. — *Mener à un cylindre un plan tangent par un point de la surface.* —C'est un cas particulier du problème précédent dont la solution se fait semblablement. Si l'on reprend l'épure 265, on voit que le plan tangent en m, m' est défini par la tangente t, t' en μ, μ' à la directrice, et par la génératrice $m\mu$, $m'\mu'$.

349. Problème V. — *Connaissant les projections du sommet et celles de la directrice d'un cône, construire le contour apparent de cette surface sur les deux plans de projection.* — Soient (s, s') les projections du sommet et d, d' celles de la directrice (*fig.* 266, pl. XXIV). Sur l'un des plans de projection le contour apparent est la courbe de contact des plans tangents perpendiculaire à ce même plan de projection; or, le plan tangent en un point d'une génératrice touche la surface aux divers points de

cette ligne; on en conclut que le contour apparent est formé par des génératrices. D'un autre côté, d'après le théorème du paragraphe **342**, il faut que les projections des lignes du contour apparent soient tangentes à celles de la directrice; le contour apparent est donc déterminé par les tangentes à d ou à d' menées soit de s soit de s'.

Il importe d'adjoindre aux lignes de contour apparent les projections des génératrices passant par les points extrêmes (e, e'), (f, f') de la directrice; projections qui, sans faire partie du contour apparent, servent à limiter celles des points de la surface.

Sur l'épure on a supposé le cône limité, d'une part au sommet, de l'autre à la directrice, et l'on a indiqué la visibilité qui en résulte pour les diverses lignes (§ **237**, 2me Méth.).

Il est commode d'employer une directrice plane, cette directrice se place alors le plus souvent sur le plan horizontal de projection et le cône se trouve déterminé par les projections s, s' du sommet (*fig.* 267, pl. XXIV) et par sa trace horizontale D; le contour apparent sur le plan horizontal se construit comme dans l'épure précédente. En ce qui concerne le contour apparent sur le plan vertical, la précédente construction est en défaut; néanmoins le problème se résout simplement en observant que les plans tangents perpendiculaires au plan vertical ont pour traces horizontales les tangentes aa', bb' à D (§ **347**), qui se dirigent perpendiculairement à xy, il en résulte que les projections verticales $s'a'$, $s'b'$ des génératrices suivant lesquelles ces plans tangents touchent la surface ne sont autres que les lignes formant le contour apparent vertical demandé.

On peut se proposer de construire le plan tangent au présent cône par un point de sa surface. Il faut d'abord placer le point sur la surface conique : dans ce but nous prendrons sa projection verticale m' à l'intérieur du contour apparent vertical et dans une position arbitraire; puis, en tirant la projection $s'm'$ sur le même plan des génétratrices qui passent par le point choisi, lesquelles se projettent horizontalement suivant un système de deux droites $s\theta$, $s\theta_1$, nous déterminerons par les rencontres de ces droites et de la ligne de rappel qui passe par m', les projections horizontales m, m_1 cherchées. On trouve deux points répondant à m'; l'un d'eux m, m' étant choisi, construisons le plan tangent, sa trace horizontale est la tangente P menée à la base D par le point θ, cette trace et le sommet s, s' déterminent le plan tangent. Pour construire la trace verticale P' nous eussions pu construire celle sur ce même plan vertical de la génératrice de contact $s\theta$, $s\theta'$; mais à cause de l'éloignement de cette trace sur notre épure, nous lui avons substitué celle v' de l'horizontale du plan tangent qui passe au sommet de la surface.

350. Problème VI. — *Construire le contour apparent d'un cylindre sur les deux plans de projection; connaissant les projections d, d' de la directrice et celles δ, δ' de la direction des génératrices.* — La solution, absolument semblable à celle qui vient d'être donnée, se trouve suffisamment indiquée par la figure 268 de la planche XXIV.

Dans le cas usuel, où le cylindre est donné par sa trace horizontale et par la direction des projections de ses génératrices, on opère encore le tracé comme au précédent paragraphe et l'on trouve aisément l'épure 269 de la XXIVe planche.

351. Problème VII. — *Par un point extérieur à la surface d'un cône, lui mener un plan tangent.*

Solution générale. — Soient : Σ le cône (fig. f_5), S son sommet et M le point extérieur à sa surface. Le plan tangent cherché doit passer par M et par S; donc en tirant SM on aura l'une de ses droites. Cela dit, en coupant le cône et la droite SM par un plan, que l'on devra choisir avec soin en vue d'une réduction des tracés ultérieurs, on trouvera : sur le cône une courbe C; sur la droite un point μ, et sur le plan tangent inconnu des droites issues de μ et tangentes à C (§ **340**, Conséq. III), que l'on tracera.

LIVRE II

CONES, CYLINDRES ET SURFACES DE RÉVOLUTION

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

337. Définitions. — On appelle *courbe,* le lieu des positions successives d'un point qui se meut dans l'espace d'après une loi déterminée.

La courbe est *plane* quand le point se déplace dans un plan, dans le cas contraire elle est *gauche.* Une surface géométrique est le lieu des positions d'une courbe mobile appelée *génératrice,* qui se meut dans l'espace suivant une loi déterminée et qui peut changer de forme en même temps que de position.

On détermine le plus souvent la loi qui régit le déplacement de la génératrice, et même celle de sa déformation, en l'astreignant à glisser sur certaines lignes fixes que l'on nomme *directrices.* Nous avons déjà défini les *surfaces coniques* ainsi que les *surfaces cylindriques* (§ 8 et 9).

338. Surfaces de révolution. — Elles sont engendrées par la révolution complète d'une ligne plane ou gauche G autour d'une droite fixe Z, nommée *axe* de la surface (fig. e_7).

Pendant la rotation de G, un quelconque *m* de ses points décrit une circonférence de cercle, dont le centre est au pied de la perpendiculaire *mo* menée de *m* sur l'axe Z et dont le rayon a pour longueur celle de cette perpendiculaire; ce cercle porte le nom de *parallèle.* Tout parallèle dont le rayon est minimum est appelé *collier* ou *cercle de gorge,* celui dont le rayon est maximum se nomme *l'équateur de la surface.*

Toute courbe tracée sur une surface de révolution, et rencontrant ses divers parallèles, peut évidemment par une rotation complète autour de l'axe engendrer la surface, et, par suite, remplacer sa génératrice; c'est ainsi que l'on substitue le plus souvent aux génératrices quelconques, l'une des courbes de rencontre de la surface par un plan conduit par son axe; il est manifeste que ces courbes sont superposables, elles sont toutes identiques quant à leur forme. On leur donne le nom de *méridiens* ou plutôt de *courbes méridiennes de la surface.* Lorsque l'axe d'une surface de révolution

est parallèle à l'un des plans de projection, elle offre un méridien parallèle à ce plan, appelé *méridien principal.*

Il importe d'indiquer un autre mode de génération des surfaces de révolution, en premier lieu et surtout, dans le but de montrer ces surfaces sous un point de vue utile à la résolution de certains problèmes; en second lieu, afin de donner un exemple de la génération d'une surface par une courbe qui non seulement se déplace suivant une loi déterminée, mais qui, en outre, se déforme pendant le mouvement. Dans ce mode on considère la surface comme engendrée par un cercle mobile dont le plan est perpendiculaire à l'axe, dont le centre décrit cet axe et qui glisse sur la génératrice, laquelle sert alors de directrice et règle en même temps les variations du rayon de la génératrice nouvelle.

Nous adopterons pour le tracé des épures relatives aux problèmes que nous aurons à résoudre,

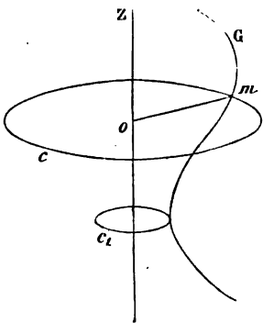


FIG. e_1.

dans l'étude des surfaces de révolution, celles de ces surfaces que l'on emploie le plus fréquemment dans les arts, parmi lesquelles on trouve au premier rang les surfaces du second degré.

Une surface de révolution du second degré est engendrée par la rotation d'une conique autour de l'un de ses axes.

Les surfaces de révolution du second degré sont :

1° *L'ellipsoïde de révolution,* surface engendrée par la rotation complète d'une ellipse autour de l'un de ses axes; lorsque l'axe de rotation se confond avec le grand axe de l'ellipse méridienne, l'ellipsoïde est *allongé*, dans l'autre cas il est *aplati*. Enfin, quand l'ellipse se transforme en cercle la surface devient une sphère.

2° *L'hyperboloïde de révolution à une nappe*, que l'on engendre par la rotation entière d'une hyperbole autour de son axe non transverse pris pour axe de rotation.

3° *L'hyperboloïde de révolution à deux nappes*, engendré par la rotation complète d'une hyperbole autour de son axe transverse. Lorsque l'hyperbole se réduit à deux droites les deux hyperboloïdes de révolution deviennent des cônes également de révolution.

4° *Le paraboloïde de révolution*, engendré par la rotation entière d'une parabole autour de son axe. Comme variété du paraboloïde de révolution il faut signaler le cylindre de révolution, que l'on obtient lorsque la parabole se réduit à deux droites parallèles à l'axe de rotation.

En dehors des surfaces de révolution du second degré on n'emploie guère que le *tore circulaire;* cette surface est celle qu'engendre un cercle tournant autour d'un axe placé dans son plan. Nous aurons cependant à parler du *tore général* qui est engendré par la rotation d'une conique

autour d'une droite située dans le plan de cette courbe, mais non confondue avec l'un de ses axes.

339. Surfaces réglées. — Lorsqu'on peut engendrer une surface par une droite mobile suivant une loi déterminée on dit qu'elle est réglée.

Le cône directeur d'une surface réglée s'obtient en déplaçant toutes ses génératrices parallèlement à elles-mêmes de façon à les faire passer par un même point pris arbitrairement dans l'espace.

Le plan directeur d'une surface réglée est le cône directeur obtenu dans le cas où les génératrices rectilignes de la surface sont toutes parallèles à un même plan.

La connaissance de trois directions D_1, D_2, D_3, *est nécessaire et suffisante à la détermination d'une surface réglée* (fig. e_8).

Démontrons-le; soit, à cet effet, un point M de D_1; établissons simplement que le problème d'assujettir une droite à passer par ce point M en rencontrant D_2 et D_3 offre un nombre limité de solutions; effectivement, les droites cherchées ne sont autres que les rencontres de deux cônes qui auraient pour sommet commun M et dont les directrices seraient pour l'un D_2, pour l'autre D_3, cônes qui

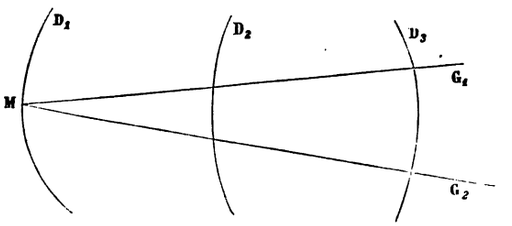


FIG. e_8.

se coupent suivant un nombre limité de droites; sauf dans les cas où les cônes seraient homothétiques, alors ils se confondraient et feraient partie de la surface, dont la détermination s'achèverait en déplaçant M sur D_1. Il est encore un cas exceptionnel, c'est celui dans lequel les cônes ne se couperaient pas, on dit alors que le point M est *parasite* ou *virtuel*.

On remplace souvent l'une des courbes directrices par le cône directeur; la surface est bien déterminée dans ce cas; il suffit en effet, pour le voir, de transporter le cône directeur parallèlement à lui-même en un point de l'une des directrices, de prendre sa rencontre avec le cône auxiliaire de même sommet et passant par la seconde directrice, rencontre composée d'un nombre fini de génératrices répondant aux données du problème.

On divise les surfaces réglées en *surfaces gauches* et en *surfaces développables*. Les dernières sont celles qui peuvent être déroulées de manière à s'appliquer sur un plan sans déchirure ni duplicature; les premières sont celles qui ne jouissent pas de cette propriété. Les surfaces coniques et les surfaces cylindriques, pouvant être considérées comme la limite d'une pyramide ou d'un prisme, sont développables.

On appelle *hyperboloïde à une nappe* la surface réglée dont trois directrices sont rectilignes.

Le paraboloïde hyperbolique est la surface réglée à plan directeur dont les deux directrices sont rectilignes; ou, en d'autres termes, la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur deux droites en restant parallèle à un plan fixe.

Le *conoïde* est une surface réglée à plan directeur dont une seule directrice est rectiligne; quand

la directrice rectiligne est perpendiculaire au plan directeur, le conoïde est *droit*. Enfin, d'après la définition du précédent alinéa, le conoïde se transforme en paraboloïde hyperbolique ou *conoïde du second degré*, lorsque ces deux directrices sont rectilignes.

DU PLAN TANGENT EN GÉNÉRAL.

340. Théorème fondamental. — *Si plusieurs courbes tracées sur une surface se croisent en un seul point, leurs tangentes en ce point sont contenues dans un même plan, qui porte le nom de plan tangent à la surface au point considéré.* — Pour démontrer que toutes les tangentes sont dans un même plan, il suffit évidemment de faire voir que trois tangentes quelconques appartiennent toujours à un même plan.

Soient trois courbes C_1, C_2, C_3 (fig. e_9) à la surface considérée et se croisant en un de ses points M.

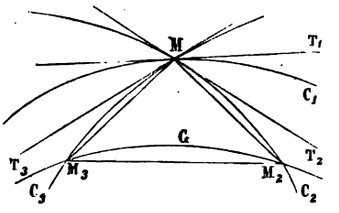


FIG. e_9.

La surface peut être engendrée par une courbe rencontrant C_2, C_3 qui se déplacerait tout en se déformant et en se rapprochant constamment de C_1.

Considérons l'une quelconque G des positions de la génératrice, et soient M_2, M_3 ses rencontres sur C_2, C_3, tirons les droites MM_2, MM_3, M_2M_3 qui, formant un triangle, sont nécessairement contenues toutes trois dans un même plan, et cela quelque voisine que soit la génératrice G de sa limite C_1;

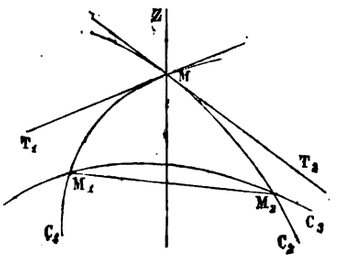


FIG. e_{10}.

il faut en conclure que la propriété aura encore lieu à la limite. Dans le mouvement M_3 tend vers M conséquemment MM_3 tend vers la tangente MT_3 menée par M à la courbe C_3; semblablement MM_2 tend vers la tangente MT_2 à C_2; en ce qui concerne la limite de la corde M_2M_3 menée à une courbe mobile G qui est susceptible d'une déformation et dont les points de section M_2, M_3 sont tous deux

mobiles, on peut dire qu'elle donne généralement la tangente MT_1 en M à la courbe C_1, mais qu'il peut se produire des exceptions.

Il faut mentionner comme cas exceptionnel celui qui se produit sur l'axe Z (fig. e_{10}) d'une surface de révolution engendrée par une courbe C_1 coupant cet axe de rotation en M; effectivement, si l'on prend deux positions C_1, C_2 de la génératrice pour diriger le mouvement d'une courbe mobile C_3, quand C_3 passera par M, la corde $M_1 M_2$ prendra une position indéterminée dans le plan des tangentes MT_1, MT_2, qui ne saurait, par suite, donner la tangente à la limite de C_3; la démonstration du théorème tombe donc par cela même en défaut; quant au théorème, il est aussi en défaut, attendu que les tangentes aux courbes méridiennes donnent un cône tangent et nullement un plan tangent à la surface considérée.

Signalons de ce théorème quelques conséquences évidentes, mais qui sont d'un emploi constant dans ses nombreuses applications.

Conséquence I. — *Le plan tangent en un point d'une surface quelconque se détermine par les tangentes à deux courbes de la surface passant par le point considéré.*

Conséquence II. — *Le plan tangent en un point d'une surface réglée contient la génératrice rectiligne qui passe en ce point :* en effet, cette droite est à elle-même sa propre tangente.

Conséquence III. — *Si l'on conduit par le point de contact d'une surface et de l'un de ses plans tangents un plan sécant quelconque, les sections sur la surface et sur son plan tangent sont tangentes au point considéré.* — Cette propriété est évidente, puisque la tangente à la section sur la surface doit appartenir à l'un et à l'autre plan.

On appelle *normale* en un point d'une surface la perpendiculaire au plan tangent au point considéré.

REPRÉSENTATION DES SURFACES

341. Contour apparent. — Soient O le point de vue (fig. f_1), P le plan de projection considéré et S une surface quelconque. Traçons un rayon visuel V coupant la surface; soient a_1, a_2, etc., les points de section; a_1, qui est parmi eux le plus voisin de O, est évidemment le seul qui soit visible; cherchons à déterminer la ligne de séparation C des points visibles, tels que a_1, de ceux, tels que a_2,

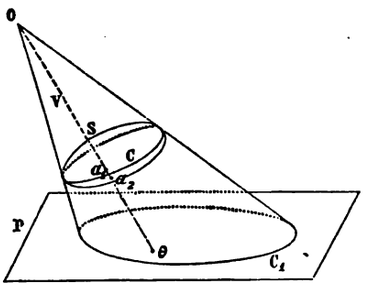


Fig. f_1.

qui sont cachés, ligne qui porte le nom de *contour apparent de la surface.* Sur cette ligne a_1 et a_2 doivent se confondre, le rayon visuel doit donc devenir tangent à la surface; cette remarque peut s'énoncer de la manière suivante : *Le contour apparent d'une surface est la courbe de contact du cône tangent à cette surface dont le sommet est au point de vue*, ou, ce qui revient au même : *Le contour apparent d'une surface est la courbe de contact de ceux de ses plans tangents qui passent par le point de vue.* La

courbe C_1, donnée par la rencontre du cône circonscrit à la surface avec le plan de projection P, s'appelle le *contour apparent en projection de la surface*. On peut dire que *ce contour est la trace du cône circonscrit à la surface, dont le sommet se trouve sur le point de vue.*

Considérons (*fig.* f_1) le rayon visuel V coupant P en θ, on voit que θ est intérieur à C_1, et que, par suite, le contour C_1 renferme les projections de tous les points de la surface, à la condition toutefois de placer le centre de projection au point de vue O.

Dans les épures, le spectateur est supposé à l'infini sur une perpendiculaire au plan de projection considéré (§ **20**); en appliquant cette convention, on peut modifier les précédents énoncés et dire :

1° *Le contour apparent d'une surface par rapport à l'un des plans de projection est la courbe de contact de cette surface avec ses plans tangents perpendiculaires au plan de projection considéré.*

2° *Le contour apparent en projection d'une surface n'est autre que la projection de la ligne de l'espace donnant le contour apparent par rapport au plan de projection considéré.* — Rappelons que ce dernier contour est la limite des projections des divers points de la surface.

342. Théorème. — *Lorsqu'une ligne est tracée sur une surface, sa projection sur un plan quelconque touche le contour apparent en projection de la surface.* — Soient O, P le centre et le plan de projection

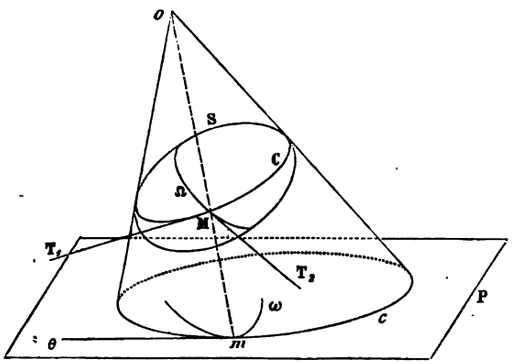


Fig. f_2.

(fig. f_2), S la surface considérée, C son contour apparent par rapport au plan P, Ω la courbe considérée sur la surface S, ω sa projection sur P et c le contour apparent sur P. Les lignes Ω, C tracées sur la même surface S se rencontrent en des points réels ou imaginaires. Désignons par M l'un de ces points, menons-y les tangentes T_1, T_2 aux courbes C, Ω; tirons en outre la génératrice OM du cône circonscrit; les droites T_1, T_2, OM appartiennent au plan tangent à S en M; comme ce plan passe par le centre de projection O, c'est lui qui projette simultanément sur P les deux tangentes T_1, T_2, par suite et d'après le théorème du paragraphe **142**, la trace θ de ce plan est tangente commune à c, ω; c'est là ce qu'on voulait démontrer. Ajoutons toutefois que le contact des lignes ω, c, peut être imaginaire.

En terminant ce sujet nous ferons remarquer que le problème de la détermination du contour apparent des surfaces n'est autre que celui de la recherche de leurs plans tangents; c'est donc dans le chapitre des plans tangents aux diverses surfaces qu'il faut aller prendre le moyen de les représenter.

CHAPITRE II

DES PLANS TANGENTS AU CONE ET AU CYLINDRE

343. Théorème fondamental. — *Le plan tangent à une surface conique est le même tout le long de la génératrice.* — Soient S le sommet d'une surface conique (fig. f_3) et G l'une quelconque de ses génératrices. Nous voulons montrer qu'aux divers points de G le plan tangent est toujours le même; démontrons pour cela que ceux de deux points M_1, M_2, pris arbitrairement sur G, se confondent. A cet effet, tirons une génératrice G′ voisine de G, traçons deux courbes de la surface C_1, C_2 passant respectivement par M_1, M_2 et tirons enfin les cordes de jonction, $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$, des points où elles coupent G, G′. Lorsqu'on fait mouvoir la génératrice G′ afin qu'elle se rapproche de G, ces cordes tendent simultanément à devenir tangentes et sont toujours dans le plan des droites G, G′; il en faut conclure, en passant à la limite, que les tangentes $M_1 T_1$, $M_2 T_2$ et la génératrice G sont dans un même plan, lequel touche la surface aux points M_1, M_2; le théorème est ainsi établi.

Comme le cylindre n'est autre chose qu'un cône ayant son sommet à l'infini, et, d'autre part, que

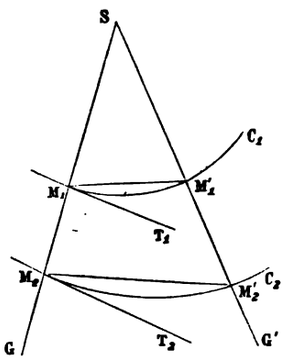


Fig. f_3.

la position du sommet n'intervient aucunement dans la démonstration précédente, on peut dire que le théorème fondamental s'applique également aux surfaces cylindriques.

344. *Du nombre de conditions nécessaires à la détermination du plan tangent.* — Pour déterminer un plan il faut connaître trois de ses points, ce qu'on exprime en disant que la détermination d'un plan équivaut à trois conditions. La tangence au cône ou au cylindre équivaut à deux conditions; effectivement, en faisant rouler un plan sur un cône on peut arriver à le faire passer par un point donné, ou, en d'autres termes, le plan tangent est déterminé dès qu'on l'astreint à passer par un point, la tangence au cône ou au cylindre équivaut donc à deux points, ou à deux conditions. Le parallélisme avec une droite équivaut à une condition : car donner une droite parallèle à un plan, c'est donner un point à l'infini du plan. Le parallélisme avec un plan donné équivaut à deux conditions; effectivement, on connaît alors la droite à l'infini du plan cherché, etc.

345. Problème I. — *Connaissant l'une des projections d'un point placé sur une surface conique, déterminer son autre projection* (*fig.* 264, pl. XXIV).—Soient d, d' les projections de la directrice, et s, s' celles du sommet, soit encore m la projection horizontale donnée du point de la surface dont on veut la seconde projection. Dans ce but, tirons la projection horizontale sm de la génératrice passant au point M et relevons sa rencontre μ avec d, en μ', sur d'; traçant alors la projection verticale $s'\mu'$ de la génératrice considérée, par le croisement m' de cette droite et de la ligne de rappel du point m, on trouve le point demandé. Dans l'exemple choisi on ne trouve qu'une solution, mais fréquemment le problème en offre plusieurs : il y en a autant que de points de rencontre de sm avec d, lorsque les lignes de rappel menées par ces points rencontrent respectivement d' en un seul point.

346. Problème II. — *Connaissant l'une des projections d'un point placé sur la surface d'un cylindre, déterminer son autre projection* (*fig.* 265, pl. XXIV).—Soient d, d' les projections de la directrice et g, g' celles d'une droite déterminant la direction des génératrices, donnons-nous, en outre, la projection horizontale m d'un point de la surface d'un cylindre et cherchons la projection verticale de ce point.

Menons, comme dans le cas précédent, la projection $m\mu$ de la génératrice du point, relevons μ en μ', tirons de ce point une parallèle à g' et relevons-y m en m'; m, m' sont les projections d'un point placé sur le cylindre.

347. Problème III. — *Mener le plan tangent en un point d'une surface conique.*

Solution générale. — Soient D la directrice et S le sommet de la surface (fig. f_4), prenons un point M sur celle-ci et, pour construire une première droite du plan tangent, tirons la génératrice

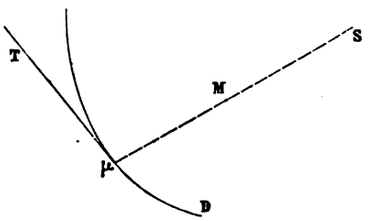


Fig. f_4.

SM, laquelle rencontre D en μ; en vertu du théorème fondamental le plan tangent en M doit être aussi tangent en μ, et celui de ce dernier point se détermine par la génératrice Sμ et par la tangente T à la directrice D, qui passe au point μ.

Exécution du tracé. — Revenons à l'épure 264, pl. XXIV, donnant les projections d'un point m, m' de la surface. Pour construire le plan tangent en ce point nous mènerons la tangente à la directrice au point μ, μ', laquelle aura ses projections t, t' tangentes à celles d, d' de cette directrice (§ **142**), et alors le plan des droites (t, t'), (sm, $s'm'$), sera celui qu'il fallait construire.

348. Problème IV. — *Mener à un cylindre un plan tangent par un point de la surface.* —C'est un cas particulier du problème précédent dont la solution se fait semblablement. Si l'on reprend l'épure 265, on voit que le plan tangent en m, m' est défini par la tangente t, t' en μ, μ' à la directrice, et par la génératrice $m\mu$, $m'\mu'$.

349. Problème V. — *Connaissant les projections du sommet et celles de la directrice d'un cône, construire le contour apparent de cette surface sur les deux plans de projection.* — Soient (s, s') les projections du sommet et d, d' celles de la directrice (*fig.* 266, pl. XXIV). Sur l'un des plans de projection le contour apparent est la courbe de contact des plans tangents perpendiculaire à ce même plan de projection; or, le plan tangent en un point d'une génératrice touche la surface aux divers points de

cette ligne; on en conclut que le contour apparent est formé par des génératrices. D'un autre côté, d'après le théorème du paragraphe **342**, il faut que les projections des lignes du contour apparent soient tangentes à celles de la directrice; le contour apparent est donc déterminé par les tangentes à d ou à d' menées soit de s soit de s'.

Il importe d'adjoindre aux lignes de contour apparent les projections des génératrices passant par les points extrêmes (e, e'), (f, f') de la directrice; projections qui, sans faire partie du contour apparent, servent à limiter celles des points de la surface.

Sur l'épure on a supposé le cône limité, d'une part au sommet, de l'autre à la directrice, et l'on a indiqué la visibilité qui en résulte pour les diverses lignes (§ **237**, 2me Méth.).

Il est commode d'employer une directrice plane, cette directrice se place alors le plus souvent sur le plan horizontal de projection et le cône se trouve déterminé par les projections s, s' du sommet (*fig.* 267, pl. XXIV) et par sa trace horizontale D; le contour apparent sur le plan horizontal se construit comme dans l'épure précédente. En ce qui concerne le contour apparent sur le plan vertical, la précédente construction est en défaut; néanmoins le problème se résout simplement en observant que les plans tangents perpendiculaires au plan vertical ont pour traces horizontales les tangentes aa', bb' à D (§ **347**), qui se dirigent perpendiculairement à xy, il en résulte que les projections verticales $s'a'$, $s'b'$ des génératrices suivant lesquelles ces plans tangents touchent la surface ne sont autres que les lignes formant le contour apparent vertical demandé.

On peut se proposer de construire le plan tangent au présent cône par un point de sa surface. Il faut d'abord placer le point sur la surface conique : dans ce but nous prendrons sa projection verticale m' à l'intérieur du contour apparent vertical et dans une position arbitraire; puis, en tirant la projection $s'm'$ sur le même plan des génétratrices qui passent par le point choisi, lesquelles se projettent horizontalement suivant un système de deux droites $s\theta$, $s\theta_1$, nous déterminerons par les rencontres de ces droites et de la ligne de rappel qui passe par m', les projections horizontales m, m_1 cherchées. On trouve deux points répondant à m'; l'un d'eux m, m' étant choisi, construisons le plan tangent, sa trace horizontale est la tangente P menée à la base D par le point θ, cette trace et le sommet s, s' déterminent le plan tangent. Pour construire la trace verticale P' nous eussions pu construire celle sur ce même plan vertical de la génératrice de contact $s\theta$, $s\theta'$; mais à cause de l'éloignement de cette trace sur notre épure, nous lui avons substitué celle v' de l'horizontale du plan tangent qui passe au sommet de la surface.

350. Problème VI. — *Construire le contour apparent d'un cylindre sur les deux plans de projection; connaissant les projections d, d' de la directrice et celles δ, δ' de la direction des génératrices.* — La solution, absolument semblable à celle qui vient d'être donnée, se trouve suffisamment indiquée par la figure 268 de la planche XXIV.

Dans le cas usuel, où le cylindre est donné par sa trace horizontale et par la direction des projections de ses génératrices, on opère encore le tracé comme au précédent paragraphe et l'on trouve aisément l'épure 269 de la XXIVe planche.

351. Problème VII. — *Par un point extérieur à la surface d'un cône, lui mener un plan tangent.*

Solution générale. — Soient : Σ le cône (fig. f_5), S son sommet et M le point extérieur à sa surface. Le plan tangent cherché doit passer par M et par S; donc en tirant SM on aura l'une de ses droites. Cela dit, en coupant le cône et la droite SM par un plan, que l'on devra choisir avec soin en vue d'une réduction des tracés ultérieurs, on trouvera : sur le cône une courbe C; sur la droite un point μ, et sur le plan tangent inconnu des droites issues de μ et tangentes à C (§ **340**, Conséq. III), que l'on tracera.

Le plan tangent demandé est actuellement déterminé par l'une des tangentes t_1 ou t_2 et par la droite SM. Le problème offre autant de solutions qu'on peut mener de tangentes à la courbe C par un point extérieur u.

Lorsque SM est parallèle à P, le point μ est à l'infini; on conduit alors simplement des tangentes à la base parallèle à SM, qui déterminent avec cette dernière les plans tangents cherchés.

Exécution de l'épure. — 1° *Le cône est donné par sa trace horizontale* D *et par les projections* s, s' *du sommet* (*fig.* 270, pl. XXIV). — Soient m, m' les projections du point extérieur donné. Déterminons, conformément à la méthode générale, la droite de jonction du sommet au point M à l'aide de ses projections sm, $s'm'$. Adoptons ensuite pour plan sécant auxiliaire le plan horizontal de projection, dont les intersections sont : sur le cône, précisément la courbe donnée D, sur la droite sm, $s'm'$ la trace θ de cette ligne, enfin sur le plan tangent l'une des tangentes menées par θ à D; soit, par exemple, $\theta\beta$, cette dernière n'est autre que la trace horizontale Q du plan cherché, lequel se trouve ainsi déterminé par la trace Q et la droite sm, $s'm'$.

Prenant la trace verticale t' de sm, $s'm'$, on a un point de celle du plan cherché; tirant la droite $\beta t'$, on trouve enfin la seconde trace Q′ du plan tangent.

Il y a une seconde solution que l'on construirait pareillement.

2° *Le cône est donné par les projections* s, s' *du sommet, par la projection horizontale* c *de sa base et par les traces* $P\alpha P'$ *du plan de cette base* (*fig.* 271, pl. XXIV). — Tirons toujours sm, $s'm'$, et, en adoptant le plan $P\alpha P'$ comme plan auxiliaire, cherchons la projection horizontale seulement de l'intersection

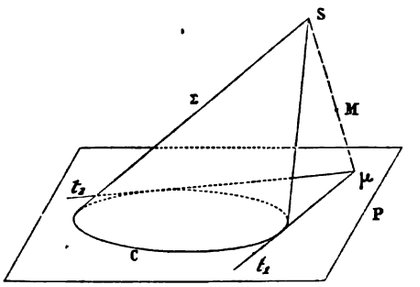


Fig. f_5.

de ce plan avec la droite sm, $s'm'$ (§ 69); ensuite conduisons par cette projection μ une tangente a à la courbe c; cette ligne n'est autre que la projection horizontale de la tangente à la base située dans le plan tangent cherché; comme cette tangente appartient au plan $P\alpha P'$, elle a sa trace horizontale en θ, celle de sm, $s'm'$ est en t et celle enfin du plan tangent est la droite de jonction Q des points θ, t. Une horizontale du plan tangent menée par m, m' donne par sa trace verticale v' un point de la seconde trace du plan tangent, tirant la droite $\beta v'$, on a enfin la trace verticale du plan cherché, lequel se trouve alors déterminé par ses deux traces $Q\beta Q'$.

352. Problème VIII. — *Mener à un cylindre un plan tangent par un point extérieur à sa surface.*

Solution générale. — La solution de la précédente question est encore applicable, il suffit de supposer que le sommet du cône est à l'infini dans la direction des génératrices du cylindre.

On joindra ce point à l'infini au point extérieur donné M (fig. f_6); en d'autres termes, on mènera par M une parallèle aux génératrices du cylindre; puis, coupant par un plan auxiliaire P convenablement choisi, on trouvera : sur la droite le point θ, sur le cylindre la courbe C et sur le plan tangent inconnu l'une des tangentes t menées de θ à C; dès lors, le plan des droites θt, Mθ

donnera l'une des solutions du problème. Ce problème offrira évidemment autant de solutions qu'on pourra mener de tangentes par θ à la courbe C.

Exécution de l'épure.

1° *Le cylindre est supposé déterminé par sa trace horizontale* C *et par ses contours apparents* (*fig.* 272, pl. XXIV), *le point extérieur* m, m' *est quelconque.*

En adoptant le plan horizontal pour plan sécant auxiliaire, prenons, conformément à la méthode donnée plus haut, la trace horizontale θ d'une parallèle aux génératrices du cylindre, et conduisons par ce point des tangentes à la base. Soit Q l'une d'elles; cette tangente et le point m, m' suffisent à la détermination du plan tangent; pour obtenir sa trace verticale on pourrait construire la trace verticale de la droite $m\theta$, $m'\theta'$ pour le joindre à β; mais cette trace verticale est ici trop éloignée, nous l'avons remplacée par celle v' de l'horizontale menée par m, m' parallèlement à Q. Le plan tangent a pour traces $Q\beta Q'$, celles d'une seconde solution, que le problème admet, n'ont pas été figurées sur notre épure.

2° *Le cylindre est déterminé par les directions* g, g' *des génératrices, et par sa base sur un plan* $P\alpha P'$, *le point* m, m' *extérieur à sa surface est quelconque* (*fig.* 273, pl. XXV). — Pour déterminer tout à la fois la grandeur et la position de la base nous donnerons la base B_1 rabattue avec le plan $P\alpha P'$, sur le plan horizontal, autour de αP prise comme charnière.

Conduisons par m, m' une parallèle mk, $m'k'$ à g, g', et, après avoir adopté le plan $P\alpha P'$ de base

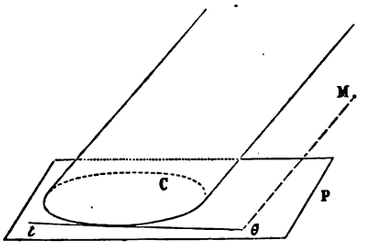


Fig. 6.

comme plan sécant auxiliaire, déterminons sa rencontre n, n' avec la droite mk, $m'k'$. Il faudrait ensuite mener par n, n' des droites respectivement tangentes aux projections de la base; mais, pour éviter le tracé de ces dernières, nous allons simplement chercher le rabattement de la tangente, que nous relèverons ensuite : n, n' se rabat en N_1; tirons de ce point l'une des tangentes à B_1; la trace horizontale de cette ligne est placée en θ sur la charnière, et comme tel, ce point ne bouge pas lorsqu'on relève la tangente.

Le plan tangent est actuellement déterminé par θ et par la droite mk, $m'k'$; cette dernière a pour traces v', t. On en déduit celles θt ou βQ, $\beta v'$ ou $\beta Q'$, du plan tangent cherché. Quant à la génératrice de contact dont il est quelquefois utile de connaître la position, on la détermine en relevant d'abord la tangente en θn, $\theta n'$, ensuite le point de contact en c, c' et en conduisant par ces points des droites g_1, g'_1 respectivement parallèles à g, g'.

353. Problème IX. — *Construire le contour apparent d'un cône ou d'un cylindre pour une position quelconque du point de vue.* — Ce problème n'est autre que celui du plan tangent au cône ou au cylindre mené par un point extérieur à leur surface; effectivement, que l'on place le point extérieur au point de vue, les génératrices de contact des plans tangents menés de ce point donneront les lignes du contour apparent de la surface et les traces de ces mêmes plans tangents détermineront ensuite les lignes des contours apparents en projection sur les deux plans coordonnés.

est parallèle à l'un des plans de projection, elle offre un méridien parallèle à ce plan, appelé *méridien principal.*

Il importe d'indiquer un autre mode de génération des surfaces de révolution, en premier lieu et surtout, dans le but de montrer ces surfaces sous un point de vue utile à la résolution de certains problèmes; en second lieu, afin de donner un exemple de la génération d'une surface par une courbe qui non seulement se déplace suivant une loi déterminée, mais qui, en outre, se déforme pendant le mouvement. Dans ce mode on considère la surface comme engendrée par un cercle mobile dont le plan est perpendiculaire à l'axe, dont le centre décrit cet axe et qui glisse sur la génératrice, laquelle sert alors de directrice et règle en même temps les variations du rayon de la génératrice nouvelle.

Nous adopterons pour le tracé des épures relatives aux problèmes que nous aurons à résoudre,

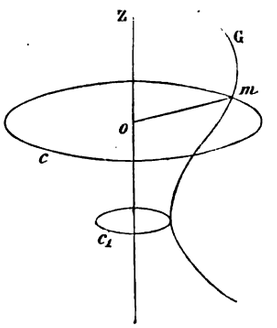


FIG. e_1.

dans l'étude des surfaces de révolution, celles de ces surfaces que l'on emploie le plus fréquemment dans les arts, parmi lesquelles on trouve au premier rang les surfaces du second degré.

Une surface de révolution du second degré est engendrée par la rotation d'une conique autour de l'un de ses axes.

Les surfaces de révolution du second degré sont :

1° *L'ellipsoïde de révolution,* surface engendrée par la rotation complète d'une ellipse autour de l'un de ses axes; lorsque l'axe de rotation se confond avec le grand axe de l'ellipse méridienne, l'ellipsoïde est *allongé*, dans l'autre cas il est *aplati*. Enfin, quand l'ellipse se transforme en cercle la surface devient une sphère.

2° *L'hyperboloïde de révolution à une nappe*, que l'on engendre par la rotation entière d'une hyperbole autour de son axe non transverse pris pour axe de rotation.

3° *L'hyperboloïde de révolution à deux nappes,* engendré par la rotation complète d'une hyperbole autour de son axe transverse. Lorsque l'hyperbole se réduit à deux droites les deux hyperboloïdes de révolution deviennent des cônes également de révolution.

4° *Le paraboloïde de révolution,* engendré par la rotation entière d'une parabole autour de son axe. Comme variété du paraboloïde de révolution il faut signaler le cylindre de révolution, que l'on obtient lorsque la parabole se réduit à deux droites parallèles à l'axe de rotation.

En dehors des surfaces de révolution du second degré on n'emploie guère que le *tore circulaire ;* cette surface est celle qu'engendre un cercle tournant autour d'un axe placé dans son plan. Nous aurons cependant à parler du *tore général* qui est engendré par la rotation d'une conique

autour d'une droite située dans le plan de cette courbe, mais non confondue avec l'un de ses axes.

339. Surfaces réglées. — Lorsqu'on peut engendrer une surface par une droite mobile suivant une loi déterminée on dit qu'elle est réglée.

Le cône directeur d'une surface réglée s'obtient en déplaçant toutes ses génératrices parallèlement à elles-mêmes de façon à les faire passer par un même point pris arbitrairement dans l'espace.

Le plan directeur d'une surface réglée est le cône directeur obtenu dans le cas où les génératrices rectilignes de la surface sont toutes parallèles à un même plan.

La connaissance de trois directions D_1, D_2, D_3, *est nécessaire et suffisante à la détermination d'une surface réglée* (fig. e_8).

Démontrons-le; soit, à cet effet, un point M de D_1; établissons simplement que le problème d'assujettir une droite à passer par ce point M en rencontrant D_2 et D_3 offre un nombre limité de solutions; effectivement, les droites cherchées ne sont autres que les rencontres de deux cônes qui auraient pour sommet commun M et dont les directrices seraient pour l'un D_2, pour l'autre D_3, cônes qui

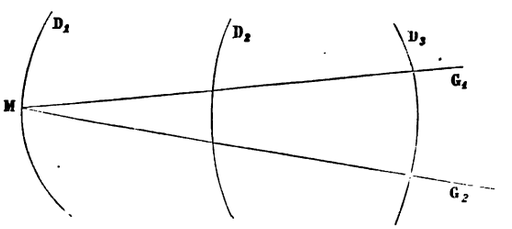


FIG. e_8.

se coupent suivant un nombre limité de droites; sauf dans les cas où les cônes seraient homothétiques, alors ils se confondraient et feraient partie de la surface, dont la détermination s'achèverait en déplaçant M sur D_1. Il est encore un cas exceptionnel, c'est celui dans lequel les cônes ne se couperaient pas, on dit alors que le point M est *parasite* ou *virtuel*.

On remplace souvent l'une des courbes directrices par le cône directeur; la surface est bien déterminée dans ce cas; il suffit en effet, pour le voir, de transporter le cône directeur parallèlement à lui-même en un point de l'une des directrices, de prendre sa rencontre avec le cône auxiliaire de même sommet et passant par la seconde directrice, rencontre composée d'un nombre fini de génératrices répondant aux données du problème.

On divise les surfaces réglées en *surfaces gauches* et en *surfaces développables*. Les dernières sont celles qui peuvent être déroulées de manière à s'appliquer sur un plan sans déchirure ni duplicature; les premières sont celles qui ne jouissent pas de cette propriété. Les surfaces coniques et les surfaces cylindriques, pouvant être considérées comme la limite d'une pyramide ou d'un prisme, sont développables.

On appelle *hyperboloïde à une nappe* la surface réglée dont trois directrices sont rectilignes.

Le paraboloïde hyperbolique est la surface réglée à plan directeur dont les deux directrices sont rectilignes; ou, en d'autres termes, la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur deux droites en restant parallèle à un plan fixe.

Le *conoïde* est une surface réglée à plan directeur dont une seule directrice est rectiligne; quand

la directrice rectiligne est perpendiculaire au plan directeur, le conoïde est *droit*. Enfin, d'après la définition du précédent alinéa, le conoïde se transforme en paraboloïde hyperbolique ou *conoïde du second degré*, lorsque ces deux directrices sont rectilignes.

DU PLAN TANGENT EN GÉNÉRAL.

340. Théorème fondamental. — *Si plusieurs courbes tracées sur une surface se croisent en un seul point, leurs tangentes en ce point sont contenues dans un même plan, qui porte le nom de plan tangent à la surface au point considéré.* — Pour démontrer que toutes les tangentes sont dans un même plan, il suffit évidemment de faire voir que trois tangentes quelconques appartiennent toujours à un même plan.

Soient trois courbes C_1, C_2, C_3 (fig. e_9) à la surface considérée et se croisant en un de ses points M.

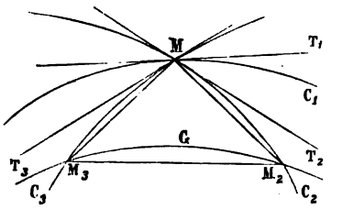


Fig. e_9.

La surface peut être engendrée par une courbe rencontrant C_2, C_3 qui se déplacerait tout en se déformant et en se rapprochant constamment de C_1.

Considérons l'une quelconque G des positions de la génératrice, et soient M_2, M_3 ses rencontres sur C_2, C_3, tirons les droites MM_2, MM_3, M_2M_3 qui, formant un triangle, sont nécessairement contenues toutes trois dans un même plan, et cela quelque voisine que soit la génératrice G de sa limite C_1;

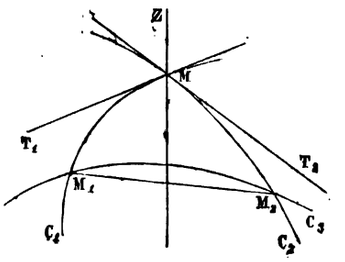


Fig. e_{10}.

il faut en conclure que la propriété aura encore lieu à la limite. Dans le mouvement M_3 tend vers M conséquemment MM_3 tend vers la tangente MT_3 menée par M à la courbe C_3; semblablement MM_2 tend vers la tangente MT_2 à C_2; en ce qui concerne la limite de la corde M_2M_3 menée à une courbe mobile G qui est susceptible d'une déformation et dont les points de section M_2, M_3 sont tous deux

mobiles, on peut dire qu'elle donne généralement la tangente MT_1 en M à la courbe C_1, mais qu'il peut se produire des exceptions.

Il faut mentionner comme cas exceptionnel celui qui se produit sur l'axe Z (fig. e_{10}) d'une surface de révolution engendrée par une courbe C_1 coupant cet axe de rotation en M; effectivement, si l'on prend deux positions C_1, C_2 de la génératrice pour diriger le mouvement d'une courbe mobile C_3, quand C_3 passera par M, la corde $M_1 M_2$ prendra une position indéterminée dans le plan des tangentes MT_1, MT_2, qui ne saurait, par suite, donner la tangente à la limite de C_3; la démonstration du théorème tombe donc par cela même en défaut; quant au théorème, il est aussi en défaut, attendu que les tangentes aux courbes méridiennes donnent un cône tangent et nullement un plan tangent à la surface considérée.

Signalons de ce théorème quelques conséquences évidentes, mais qui sont d'un emploi constant dans ses nombreuses applications.

Conséquence I. — *Le plan tangent en un point d'une surface quelconque se détermine par les tangentes à deux courbes de la surface passant par le point considéré.*

Conséquence II. — *Le plan tangent en un point d'une surface réglée contient la génératrice rectiligne qui passe en ce point :* en effet, cette droite est à elle-même sa propre tangente.

Conséquence III. — *Si l'on conduit par le point de contact d'une surface et de l'un de ses plans tangents un plan sécant quelconque, les sections sur la surface et sur son plan tangent sont tangentes au point considéré.* — Cette propriété est évidente, puisque la tangente à la section sur la surface doit appartenir à l'un et à l'autre plan.

On appelle *normale* en un point d'une surface la perpendiculaire au plan tangent au point considéré.

REPRÉSENTATION DES SURFACES

341. Contour apparent. — Soient O le point de vue (fig. f_1), P le plan de projection considéré et S une surface quelconque. Traçons un rayon visuel V coupant la surface; soient a_1, a_2, etc., les points de section; a_1, qui est parmi eux le plus voisin de O, est évidemment le seul qui soit visible; cherchons à déterminer la ligne de séparation C des points visibles, tels que a_1, de ceux, tels que a_2,

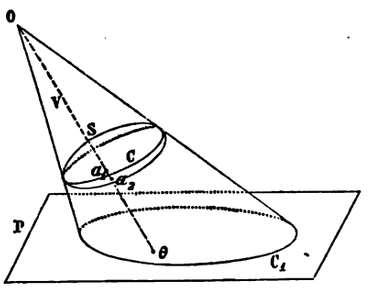


Fig. f_1.

qui sont cachés, ligne qui porte le nom de *contour apparent de la surface.* Sur cette ligne a_1 et a_2 doivent se confondre, le rayon visuel doit donc devenir tangent à la surface; cette remarque peut s'énoncer de la manière suivante : *Le contour apparent d'une surface est la courbe de contact du cône tangent à cette surface dont le sommet est au point de vue*, ou, ce qui revient au même : *Le contour apparent d'une surface est la courbe de contact de ceux de ses plans tangents qui passent par le point de vue.* La

courbe C_1, donnée par la rencontre du cône circonscrit à la surface avec le plan de projection P, s'appelle le *contour apparent en projection de la surface*. On peut dire que *ce contour est la trace du cône circonscrit à la surface, dont le sommet se trouve sur le point de vue.*

Considérons (*fig.* f_1) le rayon visuel V coupant P en θ, on voit que θ est intérieur à C_1, et que, par suite, le contour C_1 renferme les projections de tous les points de la surface, à la condition toutefois de placer le centre de projection au point de vue O.

Dans les épures, le spectateur est supposé à l'infini sur une perpendiculaire au plan de projection considéré (§ **20**); en appliquant cette convention, on peut modifier les précédents énoncés et dire :

1° *Le contour apparent d'une surface par rapport à l'un des plans de projection est la courbe de contact de cette surface avec ses plans tangents perpendiculaires au plan de projection considéré.*

2° *Le contour apparent en projection d'une surface n'est autre que la projection de la ligne de l'espace donnant le contour apparent par rapport au plan de projection considéré.* — Rappelons que ce dernier contour est la limite des projections des divers points de la surface.

342. Théorème. — *Lorsqu'une ligne est tracée sur une surface, sa projection sur un plan quelconque touche le contour apparent en projection de la surface.* — Soient O, P le centre et le plan de projection

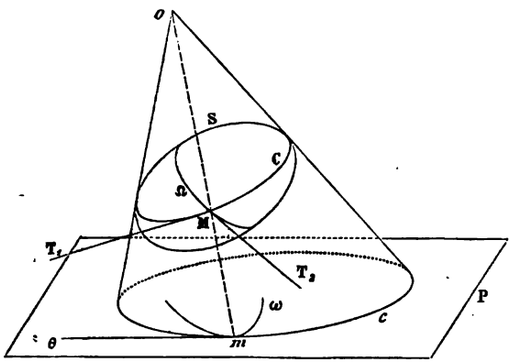


FIG. f_2.

(fig. f_2), S la surface considérée, C son contour apparent par rapport au plan P, Ω la courbe considérée sur la surface S, ω sa projection sur P et c le contour apparent sur P. Les lignes Ω, C tracées sur la même surface S se rencontrent en des points réels ou imaginaires. Désignons par M l'un de ces points, menons-y les tangentes T_1, T_2 aux courbes C, Ω; tirons en outre la génératrice OM du cône circonscrit; les droites T_1, T_2, OM appartiennent au plan tangent à S en M; comme ce plan passe par le centre de projection O, c'est lui qui projette simultanément sur P les deux tangentes T_1, T_2, par suite et d'après le théorème du paragraphe **142**, la trace θ de ce plan est tangente commune à c, ω; c'est là ce qu'on voulait démontrer. Ajoutons toutefois que le contact des lignes ω, c, peut être imaginaire.

En terminant ce sujet nous ferons remarquer que le problème de la détermination du contour apparent des surfaces n'est autre que celui de la recherche de leurs plans tangents; c'est donc dans le chapitre des plans tangents aux diverses surfaces qu'il faut aller prendre le moyen de les représenter.

CHAPITRE II

DES PLANS TANGENTS AU CONE ET AU CYLINDRE

343. Théorème fondamental. — *Le plan tangent à une surface conique est le même tout le long de la génératrice.* — Soient S le sommet d'une surface conique (fig. f_3) et G l'une quelconque de ses génératrices. Nous voulons montrer qu'aux divers points de G le plan tangent est toujours le même; démontrons pour cela que ceux de deux points M_1, M_2, pris arbitrairement sur G, se confondent. A cet effet, tirons une génératrice G′ voisine de G, traçons deux courbes de la surface C_1, C_2 passant respectivement par M_1, M_2 et tirons enfin les cordes de jonction, $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$, des points où elles coupent G, G′. Lorsqu'on fait mouvoir la génératrice G′ afin qu'elle se rapproche de G, ces cordes tendent simultanément à devenir tangentes et sont toujours dans le plan des droites G, G′; il en faut conclure, en passant à la limite, que les tangentes $M_1 T_1$, $M_2 T_2$ et la génératrice G sont dans un même plan, lequel touche la surface aux points M_1, M_2; le théorème est ainsi établi.

Comme le cylindre n'est autre chose qu'un cône ayant son sommet à l'infini, et, d'autre part, que

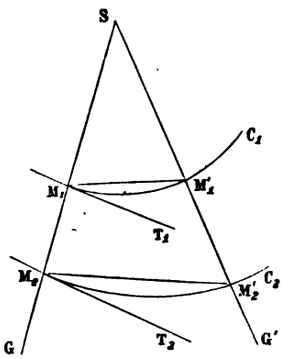


Fig. f_3.

la position du sommet n'intervient aucunement dans la démonstration précédente, on peut dire que le théorème fondamental s'applique également aux surfaces cylindriques.

344. *Du nombre de conditions nécessaires à la détermination du plan tangent.* — Pour déterminer un plan il faut connaître trois de ses points, ce qu'on exprime en disant que la détermination d'un plan équivaut à trois conditions. La tangence au cône ou au cylindre équivaut à deux conditions; effectivement, en faisant rouler un plan sur un cône on peut arriver à le faire passer par un point donné, ou, en d'autres termes, le plan tangent est déterminé dès qu'on l'astreint à passer par un point, la tangence au cône ou au cylindre équivaut donc à deux points, ou à deux conditions. Le parallélisme avec une droite équivaut à une condition : car donner une droite parallèle à un plan, c'est donner un point à l'infini du plan. Le parallélisme avec un plan donné équivaut à deux conditions; effectivement, on connaît alors la droite à l'infini du plan cherché, etc.

345. Problème I. — *Connaissant l'une des projections d'un point placé sur une surface conique, déterminer son autre projection* (*fig.* 264, pl. XXIV).—Soient d, d' les projections de la directrice, et s, s' celles du sommet, soit encore m la projection horizontale donnée du point de la surface dont on veut la seconde projection. Dans ce but, tirons la projection horizontale sm de la génératrice passant au point M et relevons sa rencontre μ avec d, en μ', sur d'; traçant alors la projection verticale $s'\mu'$ de la génératrice considérée, par le croisement m' de cette droite et de la ligne de rappel du point m, on trouve le point demandé. Dans l'exemple choisi on ne trouve qu'une solution, mais fréquemment le problème en offre plusieurs : il y en a autant que de points de rencontre de sm avec d, lorsque les lignes de rappel menées par ces points rencontrent respectivement d' en un seul point.

346. Problème II. — *Connaissant l'une des projections d'un point placé sur la surface d'un cylindre, déterminer son autre projection* (*fig.* 265, pl. XXIV).—Soient d, d' les projections de la directrice et g, g' celles d'une droite déterminant la direction des génératrices, donnons-nous, en outre, la projection horizontale m d'un point de la surface d'un cylindre et cherchons la projection verticale de ce point.

Menons, comme dans le cas précédent, la projection $m\mu$ de la génératrice du point, relevons μ en μ', tirons de ce point une parallèle à g' et relevons-y m en m'; m, m' sont les projections d'un point placé sur le cylindre.

347. Problème III. — *Mener le plan tangent en un point d'une surface conique.*

Solution générale. — Soient D la directrice et S le sommet de la surface (fig. f_4), prenons un point M sur celle-ci et, pour construire une première droite du plan tangent, tirons la génératrice

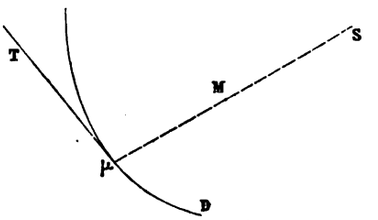


Fig. f_4.

SM, laquelle rencontre D en μ; en vertu du théorème fondamental le plan tangent en M doit être aussi tangent en μ, et celui de ce dernier point se détermine par la génératrice Sμ et par la tangente T à la directrice D, qui passe au point μ.

Exécution du tracé. — Revenons à l'épure 264, pl. XXIV, donnant les projections d'un point m, m' de la surface. Pour construire le plan tangent en ce point nous mènerons la tangente à la directrice au point μ, μ', laquelle aura ses projections t, t' tangentes à celles d, d' de cette directrice (§ **142**), et alors le plan des droites (t, t'), $(sm, s'm')$, sera celui qu'il fallait construire.

348. Problème IV. — *Mener à un cylindre un plan tangent par un point de la surface.* —C'est un cas particulier du problème précédent dont la solution se fait semblablement. Si l'on reprend l'épure 265, on voit que le plan tangent en m, m' est défini par la tangente t, t' en μ, μ' à la directrice, et par la génératrice $m\mu$, $m'\mu'$.

349. Problème V. — *Connaissant les projections du sommet et celles de la directrice d'un cône, construire le contour apparent de cette surface sur les deux plans de projection.* — Soient (s, s') les projections du sommet et d, d' celles de la directrice (*fig.* 266, pl. XXIV). Sur l'un des plans de projection le contour apparent est la courbe de contact des plans tangents perpendiculaire à ce même plan de projection; or, le plan tangent en un point d'une génératrice touche la surface aux divers points de

cette ligne; on en conclut que le contour apparent est formé par des génératrices. D'un autre côté, d'après le théorème du paragraphe **342**, il faut que les projections des lignes du contour apparent soient tangentes à celles de la directrice; le contour apparent est donc déterminé par les tangentes à d ou à d' menées soit de s soit de s'.

Il importe d'adjoindre aux lignes de contour apparent les projections des génératrices passant par les points extrêmes (e, e'), (f, f') de la directrice; projections qui, sans faire partie du contour apparent, servent à limiter celles des points de la surface.

Sur l'épure on a supposé le cône limité, d'une part au sommet, de l'autre à la directrice, et l'on a indiqué la visibilité qui en résulte pour les diverses lignes (§ **237**, 2me Méth.).

Il est commode d'employer une directrice plane, cette directrice se place alors le plus souvent sur le plan horizontal de projection et le cône se trouve déterminé par les projections s, s' du sommet (*fig.* 267, pl. XXIV) et par sa trace horizontale D; le contour apparent sur le plan horizontal se construit comme dans l'épure précédente. En ce qui concerne le contour apparent sur le plan vertical, la précédente construction est en défaut; néanmoins le problème se résout simplement en observant que les plans tangents perpendiculaires au plan vertical ont pour traces horizontales les tangentes aa', bb' à D (§ **347**), qui se dirigent perpendiculairement à xy, il en résulte que les projections verticales $s'a'$, $s'b'$ des génératrices suivant lesquelles ces plans tangents touchent la surface ne sont autres que les lignes formant le contour apparent vertical demandé.

On peut se proposer de construire le plan tangent au présent cône par un point de sa surface. Il faut d'abord placer le point sur la surface conique : dans ce but nous prendrons sa projection verticale m' à l'intérieur du contour apparent vertical et dans une position arbitraire; puis, en tirant la projection $s'm'$ sur le même plan des génétratrices qui passent par le point choisi, lesquelles se projettent horizontalement suivant un système de deux droites $s\theta$, $s\theta_1$, nous déterminerons par les rencontres de ces droites et de la ligne de rappel qui passe par m', les projections horizontales m, m_1 cherchées. On trouve deux points répondant à m'; l'un d'eux m, m' étant choisi, construisons le plan tangent, sa trace horizontale est la tangente P menée à la base D par le point θ, cette trace et le sommet s, s' déterminent le plan tangent. Pour construire la trace verticale P' nous eussions pu construire celle sur ce même plan vertical de la génératrice de contact $s\theta$, $s\theta'$; mais à cause de l'éloignement de cette trace sur notre épure, nous lui avons substitué celle v' de l'horizontale du plan tangent qui passe au sommet de la surface.

350. Problème VI. — *Construire le contour apparent d'un cylindre sur les deux plans de projection; connaissant les projections d, d' de la directrice et celles δ, δ' de la direction des génératrices.* — La solution, absolument semblable à celle qui vient d'être donnée, se trouve suffisamment indiquée par la figure 268 de la planche XXIV.

Dans le cas usuel, où le cylindre est donné par sa trace horizontale et par la direction des projections de ses génératrices, on opère encore le tracé comme au précédent paragraphe et l'on trouve aisément l'épure 269 de la XXIVe planche.

351. Problème VII. — *Par un point extérieur à la surface d'un cône, lui mener un plan tangent.*

Solution générale. — Soient : Σ le cône (fig. f_5), S son sommet et M le point extérieur à sa surface. Le plan tangent cherché doit passer par M et par S; donc en tirant SM on aura l'une de ses droites. Cela dit, en coupant le cône et la droite SM par un plan, que l'on devra choisir avec soin en vue d'une réduction des tracés ultérieurs, on trouvera : sur le cône une courbe C; sur la droite un point μ, et sur le plan tangent inconnu des droites issues de μ et tangentes à C (§ **340**, Conséq. III), que l'on tracera.

Le cône auxiliaire ayant même base que le cylindre, on pourra conduire des plans tangents communs à ces deux surfaces, lesquels répondront aux conditions du problème.

Pour déterminer les plans tangents communs au cône et au cylindre, prenons les traces (v, v'), (h, h'), de la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet s, s' du cône, conduisons par la trace horizontale h, des tangentes P_1, P_2 à la base commune et nous aurons les traces horizontales de deux des plans cherchés; nous en avons déduit la trace verticale P'_1 de l'un d'eux; celle du second s'obtiendrait de même.

Il faut se garder de croire que le problème n'offre que deux solutions; effectivement, si l'on conduit deux autres plans tangents au cylindre et parallèles à ceux que nous venons de trouver, ces plans, dont les traces horizontales seront les tangentes au cercle P_3, P_4, respectivement parallèles à P_1, P_2 et dont les traces verticales se construiraient facilement, donneront deux autres solutions du problème.

8° *Construire des plans tangents communs à deux cônes homothétiques.* — Comme les points à l'infini sont à eux-mêmes leurs homologues, on peut dire que la section de l'une des surfaces par le plan à l'infini est aussi à l'autre surface, ou, en d'autres termes, que les deux cônes ont une base plane commune à l'infini; on est ainsi ramené au troisième cas du présent paragraphe. Appliquant la solution qui s'y rapporte, on conduira simplement par le sommet de l'un des cônes un plan tangent à l'autre.

363. Problème XIX. — *Construire les plans tangents parallèles entre eux à deux surfaces coniques ou cylindriques.* — Pour déterminer un système de deux plans il faut six conditions; or, le parallélisme des plans que nous voulons construire donne deux conditions (§ **344**) et chaque tangence en donne encore deux; en somme nous avons six conditions imposées; le problème est donc possible et déterminé. Examinons successivement les trois problèmes qui résultent de celui qui nous occupe.

1° *Mener à deux cylindres des plans tangents parallèles entre eux.* — En conduisant un plan auxiliaire parallèle aux génératrices des deux cylindres, on mènera ensuite à chaque cylindre un plan tangent parallèle au plan auxiliaire.

2° *A un cylindre et à un cône mener des plans tangents parallèles entre eux.* — On construira des plans tangents au cône parallèles aux génératrices du cylindre et au cylindre des plans tangents parallèles aux premiers.

3° *Mener à deux cônes des plans tangents parallèles.* — On transporte les génératrices de l'un des cônes parallèlement à elles-mêmes au sommet du second cône; dans ces conditions, tous les plans tangents se déplacent aussi parallèlement à eux-mêmes; effectivement, un plan tangent est la limite du plan de deux génératrices dont l'une se rapproche constamment de l'autre, et les plans de deux droites parallèles sont aussi parallèles.

Après le déplacement les plans qui étaient parallèles se seront confondus, on en déduit la marche à suivre dans le tracé : On mènera des plans tangents communs au cône resté fixe et au cône auxiliaire; ce qui peut toujours se faire, vu que les cônes ont un sommet commun; puis, on conduira simplement des plans parallèles à ceux-ci et tangents au cône mobile pris dans sa position initiale.

Tous les tracés que nous venons d'indiquer sont connus, sauf cependant celui du déplacement parallèle de l'une des surfaces coniques; nous allons donner le moyen qui peut être employé afin de le simplifier le plus possible.

Soient : B la trace horizontale d'une surface conique, s, s' les projections du sommet de cette sur-

face et s_1, s'_1 celles du sommet que l'on veut donner à la surface conique après qu'on l'aura transportée parallèlement à elle-même (*fig.* 283, pl. XXVI). Le moyen le plus naturel d'exécuter le déplacement serait de prendre les projections $s\theta$, $s'\theta'$ d'une quelconque des génératrices et de mener par s_1, s'_1 une parallèle à cette droite, dont on prendrait la trace horizontale θ_1; mais il est un moyen plus exact et plus simple d'opérer la construction; en effet, les deux positions considérées du même cône sont évidemment homothétiques, leurs sections par le plan horizontal le seront aussi, et le centre d'homothétie de ces sections sera la rencontre ω de la droite des sommets avec le plan horizontal de projection; d'un autre côté s, s_1 sont évidemment homologues; de ces considérations résulte le tracé qui suit : Par ω menons une divergente quelconque, soit θ l'une de ses rencontres avec B, tirons la droite $s\theta$ et sa parallèle menée par s_1; le point de croisement θ_1 de cette dernière avec la divergente considérée sera un point de la courbe cherchée; on en construira ainsi un nombre suffisant pour pouvoir déterminer cette courbe.

Dans le cas d'une surface conique du second degré on pourra construire, par le procédé qui vient d'être indiqué, les sommets de la courbe et achever de la tracer en opérant suivant l'une quelconque des méthodes connues. Si la base est circulaire, la construction du centre et d'un point de la courbe suffira à son tracé.

364. Problème XX. — *Soit donné un premier cône de sommet* S_1 *et dont la base* B_1 *est dans un plan* P_1, *que l'on coupe par un plan* P_2 *et dont on adopte la section obtenue* B_2 *comme base d'un second*

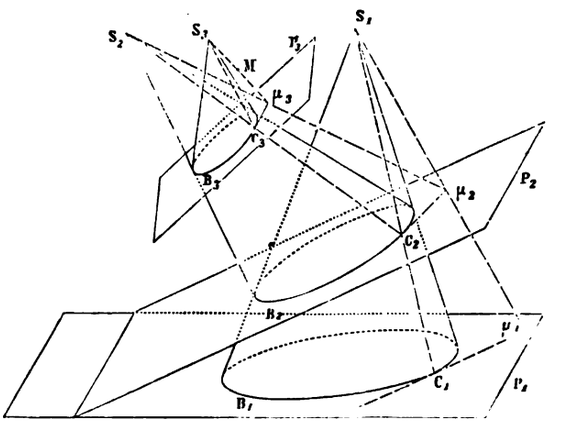


Fig. g_1.

cône dont le sommet S_2 *est donné; on coupera à son tour ce nouveau cône par un plan* P_3, *qui donnera une section* B_3, *servant de base à un cône de sommet donné* S_3; etc.; *on demande de mener au dernier cône que l'on obtiendra ainsi un plan tangent par un point* M *extérieur à sa surface* (fig. g_3).

Méthode des projections centrales. — Nous supposerons, par exemple, qu'on se soit arrêté au cône dont le sommet est S_3 et nous chercherons le plan tangent à cette surface qui passe par M. A cet effet tirons S_3M et prenant la rencontre μ_3 de cette ligne avec le plan P_3, nous aurons à conduire par μ_3 une tangente μ_3c_3 à la courbe B_3, sans être obligé de tracer cette dernière; pour y parvenir, adoptons pour centre et pour plan de projection S_2, P_2 et projetons : la courbe B_3, la tangente μ_3c_3, le point μ_3 et le point de contact c_3; nous trouverons : la courbe B_2, sa tangente μ_2c_2, le point μ_2, et le point de contact c_2 de la nouvelle tangente (§ 142).

En projetant ainsi successivement les diverses tangentes sur les plans de base et en observant que μ_3 n'est autre chose que la projection centrale de M sur P_3, le centre de projection étant en S_3, on est conduit à la méthode qui suit : On projettera le point donné M en μ_3, μ_3 en μ_2, μ_2 en μ_1, en prenant successivement pour centres de projection S_3, S_2, S_1 et pour plans de projection P_3, P_2, P_1; par μ_1 on conduira la tangente à B_1 et l'on relèvera le point de contact c_1 en c_2, puis ce dernier point c_2 en c_3; tirant alors les droites S_3c_3, μ_3c_3, on aura la génératrice de contact et la tangente à la base; le plan tangent sera ainsi complètement déterminé.

Il est évident que certains cônes du système considéré peuvent devenir des cylindres et que le point M peut se trouver à l'infini sur une droite donnée, sans que la solution cesse d'être applicable.

APPLICATION DES PLANS TANGENTS AUX CONES ET AUX CYLINDRES A LA RÉSOLUTION DE DIVERS PROBLÈMES

365. Problème I. — *Construire un plan qui passe par une droite donnée et s'incline d'un angle donné sur un plan quelconque ou sur l'un des plans de projection.*

Solution générale. — Soient : D la droite donnée (fig. g_4), P le plan donné et α l'angle qu'il doit faire avec celui que nous cherchons.

Plaçons sur la droite, dans une position arbitraire, un point S, imaginons un cône de révolution dont l'axe SZ serait la perpendiculaire à P menée par S et dont le demi-angle au sommet

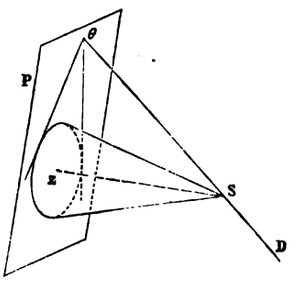


Fig. g_4.

vaudrait le complément de l'angle α donné; en menant à ce cône des plans tangents passant par D on aura les plans cherchés : les plans tangents seront déterminés par D et par l'une des tangentes à la base du cône sur le plan P, menée du point θ de rencontre de ce plan avec D. Le problème offre par suite deux solutions lorsque D est extérieure au cône, ou, ce qui revient au même, lorsque D fait avec P un angle moindre que celui qu'on nous donne; si ces angles sont égaux, le problème n'a qu'une solution; enfin, quand l'angle que fait D avec P est supérieur à l'angle α, le problème est impossible.

Exécution du tracé. — Soient $P\beta P'$ les traces du plan donné (*fig.* 284, pl. XXVI), d, d' les projections de la droite et α l'angle donné. Plaçons le sommet du cône dans une position quelconque s, s'

sur la droite d, d'; puis, en vue d'une réduction du tracé, adoptons une nouvelle ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à βP, et changeons le plan vertical de projection; la nouvelle trace verticale P_1' du plan donné se construit par la méthode du paragraphe **107**; en conservant la longueur et le sens de la cote $\sigma s'$ du point s, s', on trouve sa nouvelle projection s'_1; opérant de même pour la trace horizontale θ, θ' de la droite d, d', on obtient le point θ'_1, qui, joint par une droite à s'_1, donne la projection d'_1 sur le nouveau plan vertical de la droite d, d'. Cela fait, construisons dans le nouveau système de plans de projection l'axe du cône auxiliaire, axe qui est placé dans le nouveau plan vertical et sur la perpendiculaire $s'_1z'_1$ à la droite P'_1; le même plan vertical contient en outre deux génératrices du cône qui font avec l'axe l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$, l'une d'elles se trouve en $s'_1b'_1$; l'axe et la génératrice tracée étant dans le plan vertical, on obtient immédiatement les pieds z'_1, b'_1 de ces droites sur le plan donné, il en résulte que z'_1 est le centre du cercle de base du cône auxiliaire et que b'_1 en est un point de passage. Il faut actuellement construire les tangentes à ce cercle issues du point de rencontre a, a'_1 de d, d'_1 avec le plan $P\beta_1P'_1$.

Pour cet effet, rabattons le plan $P\beta_1P'_1$ sur le plan vertical en entraînant le cercle et le point; le cercle rabattu s'obtient en décrivant du point z'_1 comme centre une circonférence passant en b'_1, le point a, a'_1 se rabat sur une perpendiculaire à P'_1 menée par a'_1 et à une distance de ce point $A_1a'_1$ égale à l'éloignement a_2a du point.

Tirons alors au cercle rabattu l'une des tangentes issues de A_1 et soit m'_1 sa rencontre avec la charnière; en relevant la figure, m'_1 sera fixe et se projettera horizontalement en m. Le plan tangent est actuellement déterminé par (d_1, d'_1), (m, m'_1); en revenant au système primitif de plans de projection il le sera par (d, d'), (m, m'), on peut alors en déterminer les traces Q, Q' à l'aide de la construction indiquée sur l'épure. Le problème offre une autre solution que l'on construirait pareillement.

366. Problème II. — *Conduire par un point donné un plan qui fasse avec les plans de projection des angles donnés.* — Soient (m, m'), α et β les projections du point et les angles donnés (*fig.* 285, pl. XXVI). Déterminons un premier cône ayant pour sommet le point donné m, m', pour axe la verticale Mm et pour demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$; afin d'obtenir sa trace horizontale conduisons par m, m' l'une de ses génératrices de front, la projection verticale $m'h'$ de cette ligne fait avec la verticale du point m' le complément de l'angle α donné, sa projection horizontale est la parallèle mh à la ligne de terre menée du point m; par la trace horizontale h de cette génératrice on trouve un point de passage de la trace du cône; décrivant alors de m comme centre avec mh pour rayon une circonférence de cercle, on obtient enfin la trace horizontale cherchée.

Il faut maintenant déterminer le cône dont l'axe est perpendiculaire au plan vertical; pour éviter l'emploi du plan de profil conduit par cet axe, rendons cet axe parallèle au plan vertical à l'aide d'une rotation autour de l'axe du précédent cône, il viendra s'arrêter sur une parallèle à la ligne de terre $mh, m'z'$. Concevons alors la seconde surface conique qui aurait pour axe la droite que nous venons de trouver, pour sommet m, m' et pour demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \beta$, et cherchons les plans tangents communs à ces deux cônes, ces plans seront, après qu'on leur aura fait subir une rotation de 90° autour de la verticale du point m, m', ceux que nous devions construire.

Pour déterminer les plans tangents communs aux deux cônes, employons la solution de Hachette (§ **362**); en vue de ce but, cherchons à placer sur les axes les centres de deux sphères

égales et respectivement inscrites aux cônes; désignant par γ le rayon commun, par d et d' les distances des centres aux sommets respectifs des cônes, nous aurons :

$$\gamma = d\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = d'\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right),$$

ou bien

$$\frac{d}{d'} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)};$$

pour trouver un couple de valeurs de d et de d' répondant à cette condition, plaçons arbitrairement un point n sur $m'h'$ et tirons une droite $c'n$ faisant avec $m'h'$ l'angle $\frac{\pi}{2} - \beta$; dans le triangle $c'nm'$ on aura :

$$\frac{c'm'}{c'n} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)};$$

on en conclut que, si l'on fait $d = c'm'$, on aura $d' = c'n$; prenant alors $m'\omega' = c'n$, les points c', ω' seront les centres de deux sphères égales. On voit alors que les centres d'homothétie des sphères auxiliaires sont, l'un au milieu de $c'\omega'$, l'autre à l'infini sur $c'\omega'$. Il faut actuellement construire par chacun de ces centres les plans tangents au cône dont l'axe est vertical, ce qui donnera quatre plans deux à deux symétriques par rapport au plan de front du point m, m', et par rapport au plan de profil de ce même point, la connaissance de l'un des quatre plans suffira donc pour trouver les trois autres.

Sans construire le milieu de la droite $c'\omega'$, nous chercherons les plans tangents parallèles à $(c'\omega', mh)$; à cet effet, menons par m, m' une parallèle à cette droite et construisons sa trace horizontale h_1, par laquelle les plans tangents doivent passer après la rotation, revenant à la position naturelle cette trace se placera soit en θ soit en t indifféremment, ce qui justifie une fois de plus la symétrie que nous avons signalée plus haut. On peut alors profiter des deux positions θ, t prises par h_1 pour trouver immédiatement les quatre traces horizontales des plans cherchés; il suffit pour cela de conduire par les points θ, t les quatre tangentes P_1, P_2, P_3, P_4, à la base du cône dont l'axe est vertical; quant aux traces verticales correspondantes on observe que ces quatre plans s'entrecoupent suivant quatre droites dont deux sont de front; traçant alors les projections $m\theta_1$, $m'\theta'_1$ de l'une de ces droites, on a la direction de deux des traces verticales cherchées, ce qui permet de tirer ces deux traces P'_2, P'_4, les deux autres P'_1, P'_3 peuvent se trouver par symétrie.

Discussion. — Prenons pour plan de la figure le plan vertical de projection (fig. g_5), et soient $m'x'$, $m'z'$ les projections verticales des axes des cônes après la rotation de 90° mentionnée plus haut; traçons la droite de jonction des projections c', ω' des centres des sphères égales, ainsi que les projections verticales $m'g'$, $m'g'_1$ des génératrices de chaque cône qui, situées dans le plan de la figure, sont comprises dans l'angle XMZ.

Le triangle rectangle $m'c'\omega'$ donne la relation

$$\frac{m'c'}{m'\omega'} = \frac{\sin\omega'}{\sin c'}$$

mais nous avons trouvé la relation

$$\frac{m'c'}{m'\omega'}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)},$$

posant

$$\frac{\pi}{2}-\beta=\beta',\quad \frac{\pi}{2}-\alpha=\alpha',$$

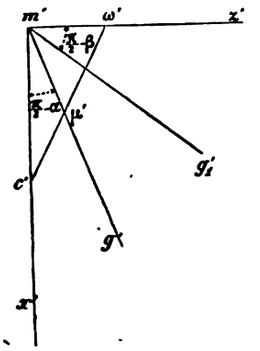


Fig. g_5.

on aura

$$\frac{m'c'}{m'\omega'}=\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha'},$$

ou bien, en comparant la première égalité à la dernière,

$$\frac{\sin\omega'}{\sin c'}=\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha'};$$

si $\omega'=\beta'$, on aura $c'=\alpha'$, et comme $\omega'+c'=\frac{\pi}{2}$, les deux cônes se toucheront et on trouvera la figure g_6, dans laquelle, par suite de l'égalité des angles ω', β', on a, en désignant par k le point de

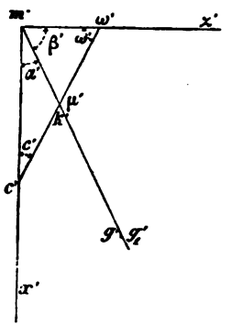


Fig. g_6.

croisement des droites $m'g'$, $c'\omega'$, l'égalité des côtés $\omega'k'$, $m'k'$; de même on aura celle des côtés $m'k'$, $c'k'$; on en conclut que k' n'est autre que le milieu μ' de $c'\omega'$, le point de l'espace qui se projette en μ'

est donc sur la surface des deux cônes, ceux-ci sont donc tangents et le problème n'offre que deux solutions. On aura dans ce cas $\alpha' + \beta' = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2}$ ou encore $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, c'est là une des conclusions déjà données au paragraphe **186** de la discussion du présent problème; en continuant de même on trouverait facilement les deux autres conclusions du paragraphe précité.

367. Problème III. — *Conduire par un point donné un plan qui fasse avec deux plans des angles donnés.* — Comme dans le problème II (§ **366**), on construira à un cône auxiliaire des plans tangents passant par les centres de similitude de deux sphères égales; ce tracé, en tout semblable au précédent, ne saurait offrir aucune difficulté.

CINQUIÈME CAS DE L'ANGLE TRIÈDRE

368. Problème IV.—*Construire les éléments inconnus d'un trièdre dont on donne deux dièdres et la face opposée à l'un d'eux.* — Soient donnés les deux dièdres A, B et la face b opposée à B. Plaçons (*fig.* 286, pl. XXVI) sur le plan horizontal de projection le plan de la face inconnue adjacente aux deux dièdres donnés, en ayant soin de faire en sorte que l'arête $S\alpha$ du dièdre A adjacent à la face donnée se dirige perpendiculairement à la ligne de terre xy, le plan $P\alpha P'$ de la face b aura sa trace horizontale αP sur $S\alpha$ et sa trace verticale $\alpha P'$ inclinée de l'angle A donné sur la ligne de terre.

Tirant une droite Sv'_1 inclinée sur αS de l'angle b donné, nous aurons le rabattement, autour de αS et sur le plan horizontal, de la face donnée; pour la relever, décrivons du point α comme centre un arc de cercle partant du point de rencontre v'_1 de l'arête rabattue et de la ligne de terre pour s'arrêter en σ', sur $\alpha P'$; ce point σ' se projettera horizontalement sur la ligne de terre en σ et sera à l'arête du dièdre inconnu. Actuellement, tout se réduit à mener un plan par la droite dont les traces sont S, σ' et qui s'incline de l'angle B donné sur l'horizon, ce problème vient d'être résolu (§ **365**). En appliquant la construction qui s'y rapporte, nous tracerons la verticale $\sigma\sigma'$ du point σ', la droite $\sigma'\theta'$ dont l'écartement angulaire avec xy est égal à celui du dièdre B et le cercle décrit de σ comme centre avec $\sigma\theta'$ pour rayon.

Il faudra alors conduire par la droite dont les traces sont S, σ' un plan tangent au cône dont le sommet est σ', σ et qui a pour base le cercle qui vient d'être décrit; la trace horizontale de ce plan sera la tangente ST menée du point S à la base du cône et, pour déterminer le trièdre, nous connaîtrons: une face αST, la projection σ d'un point de l'arête opposée et la cote $\sigma\sigma'$ de ce point.

Nous retombons ainsi sur le problème fondamental. La seconde tangente au cercle de base donnerait pour le dièdre opposé à la face connue le supplémentaire de B, il faut donc la rejeter. Pour que le trièdre soit possible il faut et il suffit que son supplémentaire le soit, c'est-à-dire que l'on ait (§ **231**)

$$\sin(180 - B) \geqq \sin(180 - b)\sin(180 - A),$$

ou

$$\sin B \geqq \sin b \sin A;$$

telle est donc la condition de possibilité du trièdre considéré.

SIXIÈME CAS DE L'ANGLE TRIÈDRE

369. Problème V. — *Connaissant les dièdres d'un trièdre construire ses faces.* — Figurons les traces PAP′ d'un plan perpendiculaire au plan vertical et incliné de l'un A des angles donnés sur l'horizon (*fig.* 287, pl. XXVI); prenant alors un point quelconque s', s du plan vertical de projection, nous saurons construire (§ 367) un plan qui s'incline des deux autres angles donnés sur le plan PAP′ et sur le plan horizontal de projection.

Il est alors manifeste que ce plan, celui PAP′ et le plan horizontal de projection détermineront un trièdre satisfaisant aux conditions du problème.

Il reste donc simplement à construire un plan passant par s, s', s'inclinant sur l'horizon de l'angle B donné et sur le plan PAP′ du troisième angle C également donné. Construisons le cône auxiliaire de sommet s, s' dont l'axe est la verticale $s's$ et dont une génératrice, placée sur le plan vertical, sera la droite $s'\theta$ formant avec l'axe le complément de B.

Passons au second cône auxiliaire dont l'axe est la perpendiculaire $s'q'$ au plan PAP′, et, sans achever de le déterminer, occupons-nous de construire les centres de deux sphères égales inscrites dans ces cônes; d'après le tracé établi au paragraphe 366, menons par un point quelconque a de la génératrice $s'\theta$ la droite ao' qui fait avec cette génératrice le complément du troisième angle donné C; reportons ensuite le segment $o'a$ de cette droite en $s'\omega'$; les points o', ω' seront les projections verticales des centres des deux sphères.

Au milieu μ' de la droite $\theta'\omega'$ de jonction des deux centres que nous venons de trouver, se place le centre d'homothétie inverse des sphères, et l'un des plans tangents cherchés a pour trace verticale la droite qui unit μ', s', on en déduit immédiatement un point B de la trace horizontale de ce plan, et, par suite, la trace elle-même, qui n'est autre que la tangente menée du point B au cercle figuré sur l'épure.

La droite de rencontre du plan que nous venons de construire avec P′AP a pour trace c', Σ, ce dernier point est le sommet du trièdre, AΣB en est une face et le point c' appartient à la fois à la troisième arête et au plan vertical; comme point du plan vertical il se projette sur le plan de la face AΣB en c et sa cote comptée au-dessus de cette face est égale à $c'c$.

En somme, nous connaissons actuellement une face AΣB, la projection c d'un point de l'arête opposée sur le plan de cette face et la cote $c'c$ du point. Nous sommes encore conduits à la question préliminaire (§228).

Nous eussions pu construire la seconde tangente passant par B au cercle tracé sur l'épure, elle nous eût donné un trièdre symétrique, par rapport au plan vertical, de celui qui vient d'être déterminé, ou, plus simplement, attendu qu'un angle solide n'a qu'un symétrique, le symétrique du trièdre considéré en premier lieu; mais, comme il s'agit uniquement de déterminer les éléments du trièdre et non le trièdre lui-même, ce symétrique est inutile dans la présente question.

En ce qui concerne le centre direct de similitude observons qu'on peut l'employer, sans rien changer au cône qui sert à la détermination du plan tangent, pour construire le trièdre qui aurait pour dièdres A, C, et le supplément de l'angle aigu B; c'est-à-dire que ce centre servira chaque fois que le dièdre B sera obtus, et donnera à son tour deux trièdres symétriques dont un seul sera utile.

Pour que le trièdre soit possible il faut et il suffit que le trièdre supplémentaire le soit; dési-

gnons par A, B, C les trois dièdres du trièdre considéré, les faces du trièdre supplémentaire seront 180 — A, 180 — B, 180 — C, et, si l'on suppose que A soit le plus petit dièdre, les conditions cherchées seront :

$$180 - A < 180 - B + 180 - C,$$

$$0 < 180 - A + 180 - B + 180 - C < 360;$$

ce que l'on peut écrire

$$180 + A > B + C,$$

$$3.180 > A + B + C > 180.$$

Remarque. — La discussion du troisième et du cinquième cas n'a pas été donnée avec tous les détails qu'elle comporte; pour la faire, on pourra remarquer que la section du trièdre par une sphère ayant son centre au sommet de cet angle solide, est un triangle sphérique dont les côtés mesurent les faces du trièdre et dont les angles sont précisément les rectilignes des divers dièdres de ce trièdre; après cette remarque la discussion se réduira à celle du triangle sphérique correspondant, question qui se résout en géométrie.

CHAPITRE III

PROPRIÉTÉS DES COURBES PLANES OU GAUCHES ET LEURS PROJECTIONS

370. Comme nous l'avons déjà dit au paragraphe **337**, une courbe est le lieu des positions successives d'un point qui se meut dans l'espace suivant une loi déterminée.

Le déplacement du point mobile est généralement continu, il faut donc que la courbe qui en

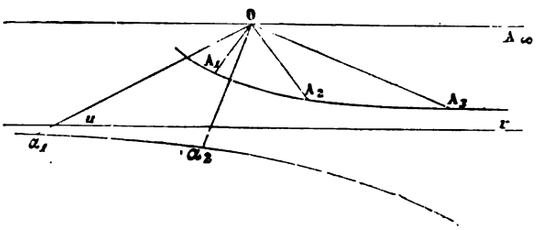


Fig. g_7.

résulte le soit aussi; cette remarque est pleinement justifiée par les courbes fermées; montrons qu'elle l'est encore pour les courbes à tranches infinies.

Considérons des divergentes successives OA_1, OA_2, OA_3....OA_∞ (fig. g_7), dont la dernière est parallèle à l'asymptote uv de la courbe et d'autres divergentes $o\alpha_1$, $o\alpha_2$, etc.; observons que pour deux positions de la divergente voisines et situées de part et d'autre de celle qui est parallèle à uv on

trouvera deux points, très éloignés du point O, faisant partie de deux branches de la courbe considérée, branches qui devront se rejoindre là, où les extrémités de la droite OA_∞ se rejoignent également.

En somme les deux points à l'infini de la courbe se réunissent au point à l'infini de jonction des extrémités de la droite OA_∞ (§ 2). On peut donc considérer une courbe à branches infinies comme une courbe fermée et continue. On voit encore qu'une courbe a autant de branches infinies qu'elle offre de points à l'infini et que ces branches sont composées de deux parties réunies par les points à l'infini correspondants.

371. Enveloppes et enveloppées. — On peut définir le point mobile qui engendre une courbe, par la limite de l'intersection des positions successives d'une courbe qui se déplace suivant une loi déterminée, soit en conservant sa forme, soit en se déformant suivant une loi également déterminée. La courbe ainsi décrite prend le nom *d'enveloppe* et les positions diverses de la courbe mobile s'appellent les *enveloppées* de la première.

Pour justifier cette définition il faut démontrer que les points de rencontre ont une limite.

Nous dirons qu'une courbe se déplace suivant une loi déterminée, en conservant sa forme ou en se déformant suivant une autre loi déterminée, lorsque son équation sera fonction d'un paramètre variable a; soit donc $f(x, y, a)=0$, l'équation de la courbe variable. Attribuons au paramètre une valeur particulière a_1, l'équation de la courbe correspondante sera

$$f(x, y, a_1)=0, \tag{1}$$

laissant cette courbe fixe, considérons une courbe voisine, pour laquelle a_1 prend la valeur $a_1+\alpha$, α étant très petit, l'équation de la nouvelle courbe sera

$$f(x, y, a_1+\alpha)=0; \tag{2}$$

les coordonnées des points de croisement des deux courbes vérifient les équations (1) et (2), elles vérifieront donc l'équation

$$\frac{f(x, y, a_1+\alpha)-f(x, y, a_1)}{\alpha}=0. \tag{3}$$

En donnant à α des valeurs de plus en plus petites et tendant vers zéro, faisons varier la courbe représentée par l'équation (2) qui tendra également vers sa limite; l'équation (3) deviendra alors :

$$f'_{a_1}(x, y, a_1)=0. \tag{4}$$

En observant que la courbe donnée par (1) coupe généralement les courbes voisines en plusieurs points, on voit que ces derniers auront à la limite des positions bien déterminées, qui seront celles des points de rencontre des lignes représentées par les équations (1) et (4), c'est là ce qu'il fallait établir.

372. Théorème. — *L'enveloppe est tangente à toutes ses enveloppées.* — Soient c l'une des enveloppées supposée fixe (fig. g_8), c_1 l'une des positions de l'enveloppée mobile qui précède la courbe c et c_2 l'une de celles qui la suivent; c_1, c_2 coupent c aux points M_1, M_2, tirons la corde de jonction de ces points, et, laissant c fixe, faisons tendre c_1, c_2 vers c; M_1, M_2 tendront vers un seul point de c, pour lequel la limite de la corde M_1M_2 sera tangente d'abord à c; puis, à la limite de la courbe qui passerait

par les points d'intersection M_1 M_2... etc., d'une suite d'enveloppées très voisines, limite qui n'est autre que l'enveloppe. La courbe enveloppe touche donc l'une des enveloppées au point dont elle est le lieu géométrique.

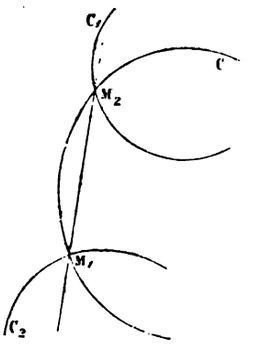


FIG. g_8.

373. Courbe géométrique. — Courbe graphique. — Courbe d'erreur. — On nomme *courbe géométrique* une courbe susceptible d'une définition géométrique; au contraire, lorsqu'une courbe n'est pas susceptible d'une telle définition, on l'appelle *courbe graphique*.

Les courbes d'erreur sont celles qui servent à résoudre approximativement certaines questions. On les obtient en traçant des solutions approchées comprenant certains points variables suivant une fonction simple de l'erreur, et en unissant ces points par une courbe; le point de cette courbe où l'erreur est nulle correspond à une solution qui répond aux conditions du problème.

Pour préciser donnons des exemples.

374. Problème. — *Construire la tangente en un point d'une courbe graphique.* — Soient C, M (fig. g_9) la courbe donnée et le point de contact de la tangente cherchée.

Décrivons de M comme centre avec un rayon arbitraire une circonférence C_1 et traçons des

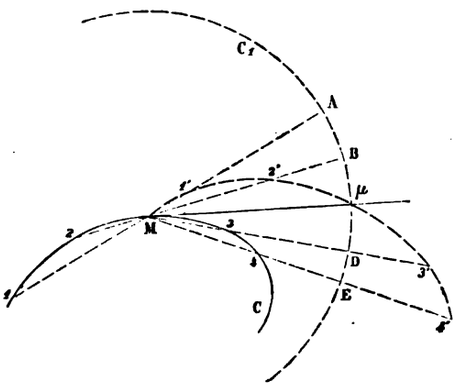


FIG. g_9.

solutions approchées, c'est-à-dire des sécantes issues de M, en ayant soin de faire en sorte, ce qui est d'ailleurs toujours très facile, que la sécante pour laquelle l'erreur est nulle, laquelle n'est autre que la tangente cherchée, soit placée à l'intérieur du faisceau des sécantes considérées. Ces sécantes coupent

la courbe aux points 1, 2, 3, 4, et le cercle en A, B, D, E; reportons les segments M1, M2, M3, M4 sur les divergentes correspondantes à partir du cercle et en conservant le sens de chacun d'eux, nous trouverons les points 1′, 2′, 3′, 4′, dont la position par rapport à la circonférence auxiliaire est fonction de l'erreur commise; plus le point est éloigné de la circonférence, plus le second point de la sécante est éloigné du premier M, plus l'erreur est grande, et, là, où le point atteint le cercle, l'erreur est nulle; la sécante correspondante est par suite tangente à la courbe.

La courbe d'erreur est donc celle de jonction des points 1′, 2′, 3′, 4′; traçons-la et prenons sa rencontre μ avec C_1; la droite de jonction des points $M\mu$ sera la tangente cherchée.

375. Problème. — *Trouver le point de contact d'une tangente menée à une courbe graphique par un point extérieur.* — Soient C, M (fig. g_{10}) la courbe et le point extérieur donnés; traçons des solutions ap-

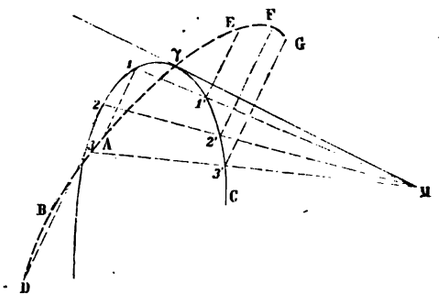


Fig. g_{10}.

prochées en tirant des sécantes issues du point M; par leurs points de rencontre avec C menons des parallèles à une direction quelconque. Portons sur ces parallèles, de part et d'autre des sécantes respectives, des longueurs égales aux erreurs correspondantes. Ainsi pour la première sécante M1 nous prendrons les longueurs 1A, 1′E égales à l'erreur 11′; puis, pour, la deuxième, 2B, 2′F égales à 22′, etc. En unissant les points D, B, A, E, F, G ainsi obtenus, par un trait continu, nous aurons, d'après la loi de continuité, avec toute l'exactitude que comporte la méthode graphique, la courbe d'erreur cherchée. L'erreur est nulle au point de rencontre γ de la courbe donnée et de celle que nous venons de tracer, ce point est donc celui où se fait le contact de la tangente, et la droite de jonction des points M, γ n'est autre que la tangente cherchée.

376. Points remarquables et points singuliers. — On nomme points remarquables ceux qui

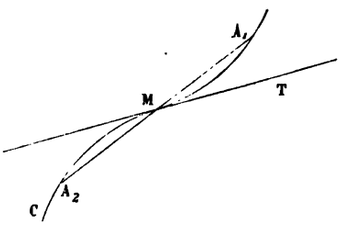


Fig. h_1.

offrent une particularité, sans que pour cela la définition ordinaire de la tangente conduise à une indétermination; les points en lesquels l'indétermination se produit s'appellent points singuliers de la courbe.

Les points à l'infini sont des points remarquables d'une courbe.

Les *points le plus haut ou le plus bas* sont des points remarquables en lesquels la tangente est horizontale.

Points d'inflexion. — Ces points sont ceux pour lesquels la tangente traverse la courbe. Soit C une courbe (fig. h_1) qui offre un point d'inflexion M; menons de ce dernier point une sécante MA_1 voisine de la tangente, elle coupera la courbe en deux points A_1, A_2 qui se confondront à la limite avec le point de contact M, lorsque la sécante se rapprochera de la tangente; on voit par là qu'en un point d'inflexion le contact de la tangente est plus complet qu'en tout point quelconque de la courbe; cette ligne offre en M trois points confondus communs avec la courbe.

Passons maintenant aux points singuliers.

377. *Points de rebroussement.* — Ce sont les points (fig. h_2, h_3) pour lesquels le mobile qui décrit la courbe revient sur lui-même, mais de telle sorte que la tangente varie d'une manière continue.

On distingue deux espèces de points de rebroussement. Ceux de première espèce (fig. h_2) offrent

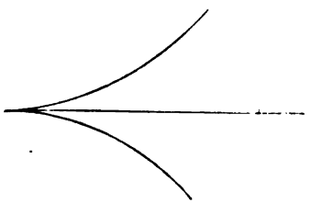


FIG. h_2.

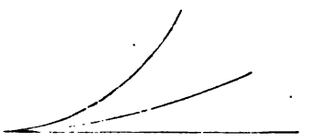


FIG. h_3.

deux arcs placés de part et d'autre de la tangente; lorsque les arcs sont d'un même côté de la tangente (fig. h_3), le rebroussement est de seconde espèce.

378. *Point multiple.* — *Point double.* — Il peut se faire (fig. h_4) que le mobile décrivant la courbe passe plusieurs fois par le même point; ce point est alors un *point multiple de la courbe.* La définition

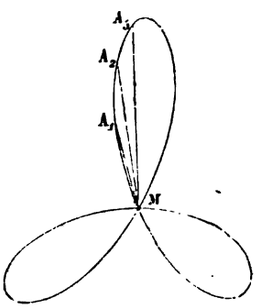


FIG h_4.

ordinaire de la tangente donnant lieu à une indétermination lorsqu'on l'applique aux points multiples, ces points sont donc *singuliers.*

Pour lever l'indétermination, on considère le point qui décrit la courbe dans des positions A_1, A_2, A_3 etc., voisines du point multiple, et on cherche la limite des droites de jonction des divers

points A_1, A_2, A_3, etc., au point multiple M; il suit de là, qu'en un point multiple il y a autant de tangentes que de passages du mobile.

Quand le mobile passe deux fois (fig. h_5) par un même point d'une courbe, on dit que ce point est *un point double* de la courbe.

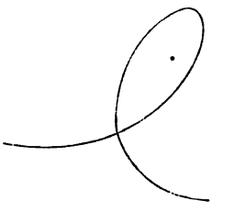


FIG. h_5.

Il est très essentiel d'observer que la projection d'une courbe a un point double chaque fois qu'une même projetante rencontre en deux points la courbe de l'espace; comme on le voit sur la figure h_6.

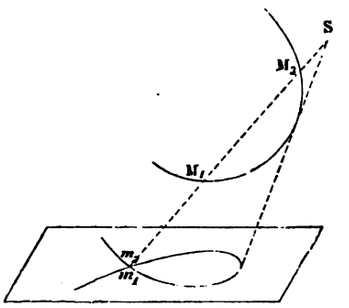


FIG. h_6.

379. *Point anguleux.* — C'est celui pour lequel le mobile qui décrit une courbe change brusquement de direction (fig. h_7); celle-ci offre alors deux tangentes distinctes en ce point singulier.

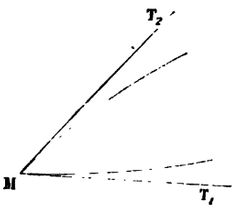


FIG. h_7.

PLAN OSCULATEUR

380. Définition. — Considérons une courbe C (fig. h_8), l'un de ses points M et la tangente T' correspondante; imaginons un plan quelconque conduit par MT et coupant la courbe en un point A voisin de M; faisons mouvoir le plan et le point A de telle sorte que ce dernier se rapproche

constamment de M en tendant vers ce même point M; à la limite, le plan prend une position bien déterminée et reçoit le nom de plan *osculateur* à la courbe en M.

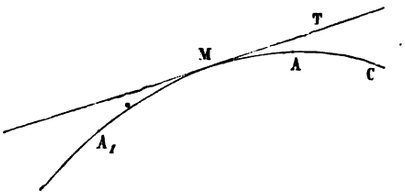


FIG. h_8.

381. Le plan osculateur traverse la courbe. — En effet, d'après la loi de continuité, quand A aura franchi le point M pour venir prendre des positions telles que A_1, le plan sécant conduit par la tangente MT et le point mobile A franchira le plan osculateur pour passer de l'autre côté de ce plan; on en conclut que les portions de courbe placées de part et d'autre du point M et dans le voisinage de ce point, sont aussi de part et d'autre du plan osculateur, ou, en termes plus simples, que *le plan osculateur traverse la courbe.*

La propriété importante qui vient d'être établie a des exceptions; effectivement, il peut se faire que le plan sécant conduit par MT (fig. h_9) coupe la courbe en deux points A, B voisins de M placés de part et d'autre de celui-ci, et que cette circonstance se reproduise pour toutes les positions A, A', etc., que prend A lorsqu'il tend vers M; alors deux points communs au plan et à la courbe viennent simultanément se confondre avec les deux points déjà confondus sur la tangente T; le plan osculateur touche plus complètement la courbe, il est en effet la limite d'un plan conduit par quatre points de

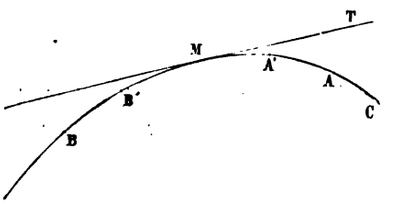


FIG. h_9.

celle-ci qui tendent à se confondre. Il est bien évident qu'un tel plan ne traverse pas la courbe; la propriété générale donnée plus haut peut donc tomber en défaut, mais seulement pour certains points particuliers.

Le théorème qui suit donnera un exemple du cas exceptionnel qui vient d'être signalé.

382. Théorème I. — *Chaque fois que la génératrice d'un cône est tangente à une courbe de sa surface, le plan osculateur de la courbe au point de contact touche la surface au même point.* — Soient : Σ la surface conique (fig. h_{10}), S son sommet, G l'une de ses génératrices, C une courbe tangente en M à G. Considérons une génératrice G_1 voisine de G et le plan des droites G, G_1, lequel contient évidemment les points de rencontre A_1, A_2 de G_1 et de C.

Lorsque G_1 se rapproche de G en tendant vers cette droite, le plan G_1SG tend simultanément vers le plan tangent au cône en M et vers le plan osculateur de la courbe en ce même point M. La

proposition est donc démontrée; il importe d'observer que le point M est un *point particulier* de la courbe, car en ce point le plan osculateur ne la traverse pas et a en commun avec elle quatre points.

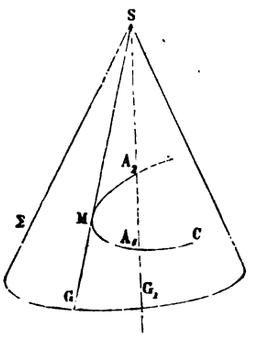
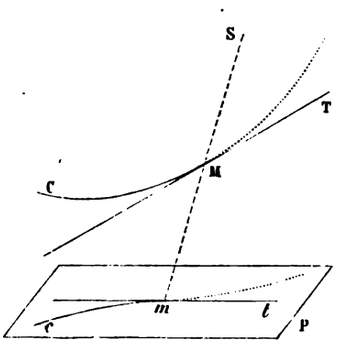


FIG. h_{10}.

383. Théorème II. — *Lorsqu'en un point d'une courbe la projetante appartient au plan osculateur, la projection de la courbe est tangente à la trace du plan osculateur sur le plan de projection considéré, et présente une inflexion au point de contact.* — Soient : S, P (fig. i_1) le centre et le plan de projection; C, c la courbe et sa projection; M un point de C en lequel le plan osculateur contient la projetante SM, m la projection de ce point T, t les tangentes aux points M, m.

Le plan osculateur contient la tangente T par définition et la projetante SM par hypothèse, il en



FIG, i_1.

faut conclure que ce plan n'est autre que celui qui projette T sur P et, conséquemment, qu'il a pour trace sur P la projection t de la tangente, c'est-à-dire la tangente en m à la projection.

D'autre part, le plan osculateur traverse généralement la courbe, il en résulte que la projection c doit être placée de part et d'autre de la trace t du plan osculateur; trace qui n'est autre que la tangente à c en m; le théorème est ainsi établi.

Dans le cas usuel de projections orthogonales le théorème peut s'énoncer de la manière qui suit :

384. Théorème IIbis. — *La projection d'une courbe sur un plan perpendiculaire à l'un de ses plans*

osculateurs, touche la trace du plan osculateur et offre en son point de contact une inflexion. — En appliquantle plan osculateur sur le plan horizontal, l'épure se présente comme sur la figure i_2.

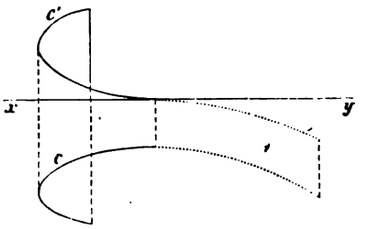


FIG. i_2.

385. Théorème III. — *Lorsqu'en un point d'une courbe la projetante touche la courbe, la projection est tangente à la trace du plan osculateur correspondant et offre, en son point de contact, un rebroussement de première espèce.* — Soient : S, P le centre et le plan de projection (fig. i_3) ; C, c la courbe et sa projection ; SM la projetante qui touche la courbe ; M, m le point de contact de cette projetante et sa projection.

La projection de la tangente SM se réduit ici à un point m et ne donne plus la tangente à la projection ; démontrons que cette dernière n'est autre que la trace t du plan osculateur en M.

Considérons une projetante $S\mu$ voisine de sm et le plan $mS\mu$, dont la limite est le plan osculateur à C en M, la sécante $m\mu$ aura pour limite la trace mt de ce plan osculateur ; cette trace donne donc la

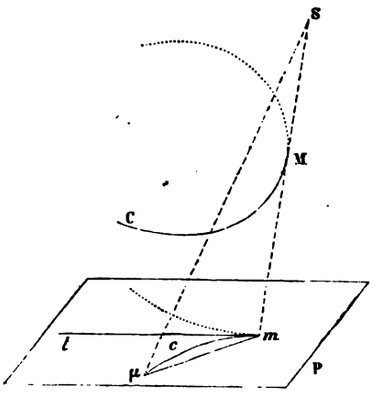


FIG. i_3.

tangente à la portion de la courbe c placée en avant du plan osculateur ; on démontrerait de même que l'autre partie de la courbe c est encore tangente à mt.

Le plan osculateur traverse la courbe, donc mt doit aussi la traverser, et comme la courbe C est tout entière d'un même côté de sa tangente SM, elle sera d'un même côté du plan perpendiculaire au plan osculateur conduit par Sm, par suite sa projection c se trouvera d'un même côté de la trace sur P du plan perpendiculaire ; cette projection offrira donc bien en m un rebroussement de première espèce.

Dans le cas usuel d'un système de projections orthogonales on modifie l'énoncé du présent théorème de la manière suivante

386. Théorème IIIbis. — *La projection d'une courbe gauche sur un plan perpendiculaire à l'une de ses*

tangentes, touche la trace du plan osculateur conduit par cette tangente et offre, au pied de cette dernière, un point de rebroussement de première espèce. — En plaçant le plan osculateur sur le plan horizontal et la tangente sur une perpendiculaire à la ligne de terre on obtient la figure i_4.

Les deux derniers théorèmes démontrés conduisent aux deux propriétés qui suivent : 1° Tout cône dont une génératrice se trouve dans le plan osculateur en un point de sa directrice, présente suivant cette génératrice une inflexion, ou, en d'autres termes, toutes les sections planes du cône offrent sur cette arête des points d'inflexion.

2° Lorsque l'une des génératrices d'un cône est tangente à la directrice, le cône offre le long de

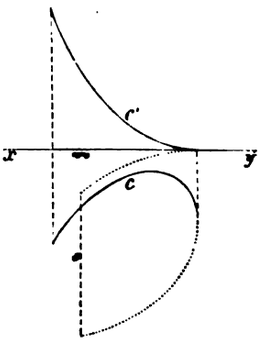


Fig. i_4.

cette génératrice un rebroussement de première espèce ; ce qui veut dire que toutes ses sections planes présentent sur cette même arête un point de rebroussement.

387. Remarque. — Dans le cas de la figure h_{10}, en prenant pour centre de projection S et en projetant C sur un plan quelconque, on trouve évidemment une courbe qui offre un point de rebroussement de seconde espèce dont les deux parties se confondent : le théorème III (§ **385**) tombe donc en défaut dans ce cas ; il faut bien se garder de croire qu'il y ait contradiction ; il y a simplement là une exception à la règle générale, exception qui se produira chaque fois que le plan osculateur offrira quatre points en commun avec la courbe.

CHAPITRE IV

PLANS TANGENTS AUX SURFACES DE RÉVOLUTION. — CONTOUR APPARENT

388. Théorème. — *Dans toute surface de révolution le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien du point de contact.* — Soient : Z l'axe de la surface (fig. i_5), C le point de contact du plan tangent, M la courbe méridienne de ce point, ω le parallèle du même point et o le centre de ce parallèle.

Le plan tangent en C contient la tangente CT au parallèle, droite qui est tout à la fois perpendiculaire au rayon CO et, en direction, à l'axe Z ; conséquemment, CT est encore perpendiculaire au

plan méridien COZ, il en est par suite de même de tout plan conduit par cette droite et en particulier au plan tangent considéré.

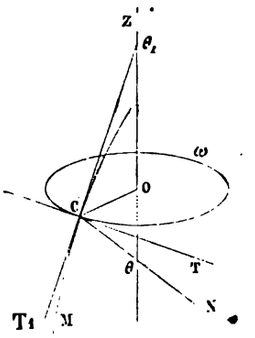


Fig. 4.

389. Corollaire I. — *La normale en un point d'une surface de révolution n'est autre que celle du méridien de ce point.* — Conservons la précédente figure et traçons-y la tangente CT_1 au méridien M, ainsi que la normale CN à la surface, cette normale est dans le plan méridien considéré; en effet, ce dernier est perpendiculaire au plan tangent et, comme la normale est aussi perpendiculaire à ce plan et qu'elle part d'un point C situé dans le plan méridien, elle sera bien contenue dans ce dernier; d'un autre côté, la normale CN est perpendiculaire à toutes les droites du plan tangent et en particulier à la tangente CT_1 au méridien du point C. La droite CN est donc à la fois normale à la surface et au méridien; le théorème est ainsi démontré.

En général, pour mener la normale en un point d'une surface il faut déterminer son plan tangent et lui conduire une perpendiculaire par le point de contact; les surfaces de révolution offrent cette particularité, importante à noter, que la normale peut s'obtenir indépendamment du plan tangent et qu'elle peut même servir, comme on le verra plus loin à le déterminer ou à le remplacer.

Remarque. — *Le long d'un parallèle, les normales à une surface de révolution ou les tangentes aux divers méridiens de la surface, constituent un faisceau, dont le sommet est sur l'axe.* — Conservons encore la figure 4, et désignons par θ, θ_1, les points de croisement de la normale CN et de la tangente CT_1 avec l'axe z. En imprimant aux droites CN, CT un mouvement de rotation autour de Z, les points θ et θ_1 seront fixes, ce qui justifie la remarque qui nous occupe.

390. Corollaire II. — *Lorsqu'une surface de révolution offre un méridien principal par rapport à un plan de projection, ce méridien est le contour apparent de la surface relatif à ce même plan de projection.* — Ce corollaire est presque évident, il le devient tout à fait si l'on observe que les plans tangents le long du méridien considéré sont perpendiculaires au plan du méridien (§ 388) et, par suite, au plan de projection correspondant. On voit semblablement que toute surface de révolution dont l'axe est vertical et qui offre un collier ou un équateur, a pour contour apparent horizontal le collier ou l'équateur.

SURFACES ENVELOPPES

391. Définitions. — On peut déterminer la courbe mobile qui engendre une surface par la limite de l'intersection des positions successives d'une autre surface qui se déplace suivant une loi déterminée, soit en conservant sa forme, soit en se déformant suivant une loi également déterminée.

La surface que l'on engendre ainsi prend le nom de *surface enveloppe*, celle qui sert à sa génération est nommée *surface enveloppée* et la courbe qui l'engendre s'appelle *caractéristique*. L'existence de la courbe de rencontre des surfaces s'établit comme au paragraphe **371**.

392. Théorème I. — *Tout le long de la caractéristique une surface enveloppe touche la surface enveloppée correspondante.* — Soient une enveloppée Σ supposée fixe et deux enveloppes voisines, l'une Σ_1,

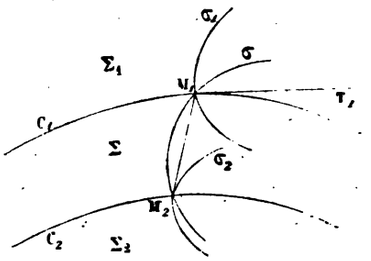


FIG. 16.

précédant Σ, l'autre Σ_2, suivant cette même surface Σ; considérons en outre la courbe C_1 de rencontre de Σ et de Σ_1 et celle C_2 commune à Σ et à Σ_2 (fig. 16).

Coupons les trois surfaces Σ, Σ_1, Σ_2, par un plan quelconque et soit σ, σ_1, σ_2 les lignes de rencontre, ces deux dernières ont en commun avec la première deux points M_1, M_2 sur C_1, C_2; tirons enfin par le point M_1 la tangente M_1T_1 à C_1, ainsi que la corde M_1M_2 et considérons le plan $T_1M_1M_2$; ensuite, rendons les surfaces Σ_1, Σ_2 mobiles pour les rapprocher de plus en plus de Σ; M_1M_2, on l'a déjà vu, tend vers la tangente commune à l'enveloppée σ et à l'enveloppe des courbes σ, σ_1, σ_2 etc., ce sera donc une commune tangente à la surface enveloppe et à son enveloppée Σ; et comme la limite de M_1T_1 offre la même propriété, il en résulte que les deux surfaces ayant en commun deux tangentes menées en un point de la limite de C_1, c'est-à-dire en un point quelconque de l'une des caractéristiques, seront bien tangentes en ce point.

393. Théorème II.—*Une surface de révolution peut être considérée comme l'enveloppe d'une sphère, d'un*

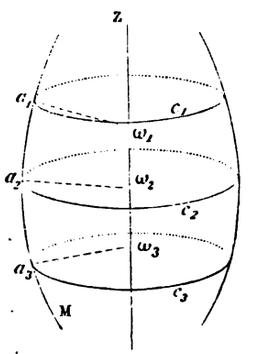


FIG. 17.

cône ou d'un cylindre. — Soient : Z l'axe de la surface (fig. 17), M l'un des méridiens et divers parallèles c_1, c_2, c_3, etc.

Par les points de rencontre a_1, a_2, a_3 des parallèles avec M, menons les normales $a_1\omega_1$, $a_2\omega_2$, $a_3\omega_3$,

à cette dernière, concevons ensuite des sphères de centres ω_1, ω_2, ω_3, etc., et dont les rayons respectifs seraient $a_1\omega_1$, $a_2\omega_2$, $a_3\omega_3$, etc. Ces sphères constituent bien des surfaces se déplaçant et se déformant suivant une loi déterminée; pour le montrer, d'après la définition donnée au paragraphe 371, qu'il faut évidemment appliquer aux surfaces, il suffit d'observer que l'une des sphères se trouve déterminée lorsqu'on connaît, par exemple, la distance du plan du parallèle qu'elle contient à un point fixe placé dans une position arbitraire sur Z, distance qui n'est autre que le paramètre variable déterminant en grandeur et en position la sphère mobile. La forme et la position de l'enveloppée mobile dépend donc bien d'un seul paramètre variable; on en déduit que les sphères offrent une enveloppe; d'un autre côté, comme les rencontres de deux sphères passant par des parallèles voisins, se font suivant des cercles qui doivent à la limite se confondre avec ces parallèles, on en conclut que la surface de révolution considérée est l'enveloppe d'une sphère mobile.

On verrait, d'une manière toute semblable, que les faisceaux de tangentes aux méridiens menées suivant les divers parallèles, constituent des cônes dont l'enveloppe n'est autre que la surface de révolution.

Dans ces deux systèmes de génération des surfaces de révolution les caractéristiques sont les parallèles; occupons-nous du troisième système dont les caractéristiques sont les divers méridiens.

Prenons un méridien quelconque et menons des tangentes aux divers parallèles en leurs points de rencontre avec ce méridien, nous formerons ainsi un cylindre droit dont la directrice sera le méridien choisi; en faisant varier ce dernier, on voit, par analogie avec ce que nous venons de dire pour la sphère, que la surface de révolution est l'enveloppe des divers cylindres droits qui ont pour bases les différents méridiens de la surface.

394. Théorème III. — *Le contour apparent d'une surface enveloppe est le lieu des points de rencontre des contours apparents de ses enveloppées avec les caractéristiques correspondantes.* — Soient : S le point

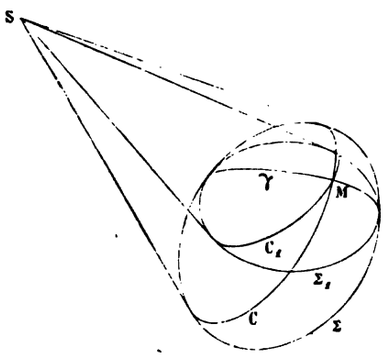


FIG. 18.

de vue (fig. 18), Σ la surface enveloppe, C son contour apparent, Σ_1, C_1, γ l'une des enveloppées, son contour apparent et la caractéristique correspondante.

Il faut démontrer que les trois courbes C, C_1, γ concourent en un seul point : désignons par M l'un des points communs à C et à γ; aux divers points de C le plan tangent à Σ passe par S, et à ceux de γ il touche également Σ_1, donc en M le plan tangent à Σ l'est également à Σ_1 et passe

par S; on en conclut que M est au contour apparent de Σ_1, c'est-à-dire à la courbe C_1, ce qui démontre le théorème.

395. Corollaire. — *Le contour apparent en projection d'une surface enveloppe, celui de l'une quelconque de ses enveloppées et la projection de la caractéristique correspondante se touchent au même point, lorsqu'on place le centre de projection au point de vue.* — Conservons la figure et les notations du précédent paragraphe. Les deux surfaces Σ, Σ_1 ont en commun un plan tangent conduit par M, lequel passe par S et contient les tangentes à C, à C_1, et à γ, menées par ce même point M, c'est donc le plan projetant commun des tangentes aux courbes qui se croisent en M, il s'ensuit que les projections des trois courbes se touchent en un même point qui n'est autre que la projection de M.

Ce corollaire étant établi, les deux propriétés qui suivent deviennent manifestes.

395bis. *Le contour apparent en projection d'une surface enveloppe est l'enveloppe des contours apparents en projection de ses enveloppées. Le contour apparent en projection d'une surface enveloppe est l'enveloppe des projections des diverses caractéristiques.* — Ajoutons que ce dernier énoncé peut être généralisé. Nous avons en effet précédemment démontré que toute courbe d'une surface se projette tangentiellement au contour apparent en projection de la surface, ce qu'on peut énoncer en disant :

395ter. *Le contour apparent en projection d'une surface quelconque est l'enveloppe des projections des génératrices de la surface.*

Les divers théorèmes que nous venons d'établir s'appliquent non seulement aux contours apparents servant à représenter les surfaces dans les conditions ordinaires, pour lesquelles le spectateur est à l'infini sur une perpendiculaire à l'un des plans de projection; mais ils s'appliquent encore au cas d'un point de vue quelconque, et peuvent servir, par suite, à trouver : la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à une surface, la trace horizontale de ce cône ou de ce cylindre, l'ombre au flambeau ou au soleil d'une surface, et enfin l'ombre portée par cette surface sur l'un des plans coordonnés.

TRACÉS DES PLANS TANGENTS ET DES CONTOURS APPARENTS DES SURFACES DE RÉVOLUTION

396. Problème I. — *Représenter par ses contours apparents une surface de révolution dont l'axe est vertical, et construire ensuite l'une des projections d'un point de cette surface, connaissant l'autre projection de ce point.* — Nous considérerons deux cas; dans le premier, la surface sera engendrée par son méridien principal relatif au plan vertical, dans l'autre la génératrice sera quelconque.

Premier cas. — Soit d'abord à représenter l'ellipsoïde de révolution dont l'axe, que l'on suppose vertical, se projette en z, z' (*fig.* 288, pl. XXVII) et qui est engendré par la rotation complète de l'ellipse $a'b'c'd'$, ac.

Cette surface a pour méridien principal l'ellipse donnée et pour équateur le cercle décrit par le petit axe de l'ellipse, on en déduit (§ 390) que les lignes des contours apparents en projection sont : l'ellipse $a'b'c'd'$, sur le plan vertical, et, sur l'autre plan coordonné, le cercle de centre z et de rayon za.

Après la détermination des contours apparents on peut se donner l'une des projections m' d'un point de la surface; il suffit en effet de placer ce point dans l'intérieur du contour apparent correspondant.

Le point m' étant ainsi placé, pour trouver la seconde projection du point M, traçons le parallèle qui passe par ce point. Sa projection verticale est une parallèle $c'f'$ à la ligne de terre; quant à l'autre projection du parallèle, c'est un cercle qui a pour centre le pied z de l'axe et qui passe par la projection horizontale e de l'un des points de rencontre e, e' du parallèle et du méridien.

Après avoir tracé la circonférence de ce cercle, une ligne de rappel menée par m' donnera, par ses rencontres m_1, m_2 avec la projection horizontale du parallèle, les projections sur le même plan de deux points (m_1, m'), (m_2, m'), qui satisfont aux conditions du problème.

Comme deuxième exemple du premier cas, nous allons reprendre sur le tore les deux questions qui viennent d'être traitées.

Soient : z, z' les projections de l'axe (*fig.* 289, pl. XXVII), toujours supposé vertical, et ac, $a'b'c'd'$ celles du cercle générateur que l'on suppose placé dans le plan de front conduit par l'axe. Pour construire les contours apparents traçons, en premier lieu, la circonférence $a'_1b'_1c'_1d'_1$ symétrique de $a'b'c'd'$ par rapport à z'; en second lieu, les projections horizontales de l'équateur et du collier, lesquelles sont des circonférences concentriques de centre z dont l'une passe en c, et l'autre en a. Ces deux dernières circonférences seront : le contour apparent en projection horizontale du tore (§ 390), et, d'après le même paragraphe, les deux autres seront le contour apparent vertical, ou du moins une partie de ce contour. On le complètera en adjoignant au double cercle méridien les droites $b'b'_1, d'd'_1$ qui constituent les projections horizontales de deux cercles placés dans des plans touchant le tore tout le long des circonférences de ces cercles et qui sont, par suite, perpendiculaires au plan vertical.

Pour terminer, ajoutons cette remarque importante, que les parties des cercles méridiens principaux figurées en points ronds sur notre épure sont virtuelles ou parasites; effectivement, pour arriver aux points qui les constituent il faudrait que le rayon lumineux traversât la surface, ce qui est inadmissible; donc, bien que ces portions de circonférence fassent partie du lieu des contacts des plans tangents perpendiculaires au plan vertical, elles n'appartiennent point au contour apparent proprement dit, ce sont simplement les prolongements des lignes géométriques qui forment ce contour.

Les contours apparents étant tracés, nous pouvons mettre en place l'une des projections m' d'un point de la surface, il suffit de la prendre à l'intérieur du contour apparent vertical. Alors, pour obtenir les projections horizontales correspondantes, cherchons celles de deux parallèles dont les projections verticales confondues passent par m', sont parallèles à ligne de terre et rencontrent le cercle méridien de gauche en e', f', points dont les projections horizontales correspondantes se font en e, f. En traçant ensuite les circonférences concentriques dont le centre est au pied de l'axe z et qui passent, l'une par e, l'autre par f, nous aurons les projections horizontales des parallèles cherchés; la ligne de rappel du point m' coupera ces circonférences aux quatre points m_1, m_2, m_3, m_4. Le problème offre par conséquent quatre solutions données par les points (m', m_1), (m', m_2), (m', m_3), $m', m_4)$.

Deuxième cas. — *La courbe génératrice de la surface est quelconque.* — Soient : z, z' les projections de l'axe, encore supposé vertical, et gg' celles de la génératrice (*fig.* 290, pl. XXVII).

Construction du contour apparent en projection horizontale. — Il faut chercher le collier et l'équateur de la surface (§ 390), c'est-à-dire les parallèles qui ont des rayons minimum ou maximum; or, sur le plan horizontal, les parallèles se projettent en véritable grandeur, on en conclut que deux cercles tangents à g et comprenant entre eux cette courbe constituent le contour apparent en projection horizontale.

L'examen de la figure met en évidence que les rayons za, zb passant par les contacts de la courbe g et des cercles cherchés, sont normaux au cercle et par suite à g; les normales à la projection

horizontale de la génératrice menées par le pied de l'axe donnent donc les rayons des cercles du contour apparent en projection horizontale.

CONTOUR APPARENT EN PROJECTION VERTICALE. — *Construction d'un point quelconque.* — Le contour apparent cherché n'est autre que le méridien principal de la surface; ce méridien, entièrement contenu dans le plan de front P conduit par l'axe, pourra s'obtenir par les rencontres du plan P et des divers parallèles de la surface. Ainsi, prenons le parallèle conduit par un point m, m' placé dans une position arbitraire sur g, g', ses projections sont : sur le plan vertical, la parallèle à la ligne de terre menée par m'; sur le plan horizontal, la circonférence de cercle décrite de z comme centre et passant par m. Il faut alors chercher la rencontre du parallèle et du plan P; elle se fait en deux points dont l'un se projette horizontalement en m_1 et verticalement au point de croisement m'_1 de la ligne de rappel du point m_1 et de la projection verticale du parallèle; l'autre point s'obtiendrait pareillement.

397. Construction de la tangente au contour apparent vertical. — Pour construire la tangente en m'_1 à la projection verticale de la méridienne de front, on prend simplement la projection verticale d'une tangente en m'_1, m_1 à la génératrice correspondante de la surface; il est en effet évident que les projections verticales des tangentes à la surface au point m_1, m'_1 se confondent toutes avec la tangente en m'_1 à la projection du méridien, car ce point est au contour apparent et, comme tel, son plan tangent est perpendiculaire au plan vertical; toutes les droites de ce plan ont donc leurs projections verticales sur la trace de même nom du plan.

Afin d'exécuter le tracé tirons les projections mt, $m't'$ de la tangente en m, m' à la génératrice g, g' et faisons tourner cette droite autour de z, z' en amenant m, m' en m_1, m'_1; dans ses diverses positions la projection horizontale de la tangente mobile touchera le cercle de centre z et de rayon égal à la distance zp du pied de l'axe à mt, cette projection horizontale s'arrêtera donc sur la tangente m_1t_1 à ce cercle menée par m_1; quant à la projection verticale correspondante, après avoir relevé p en p' et observé que p, p' vient en p_1, p'_1, que d'ailleurs m, m' s'est placé en m_1, m'_1, on voit qu'elle n'est autre que la droite $m'_1\ t'_1$ obtenue par la jonction des points m'_1, p'_1.

398. Point le plus haut ou le plus bas du contour apparent vertical — Menant des tangentes horizontales à g' et prenant les points (h', h), (β', β) qui correspondent à leurs contacts, on trouvera, en opérant sur ces points comme sur m, m', le point le plus haut et le point le plus bas; en effet, suivant les parallèles décrits par (h, h'), (β, β'), les plans tangents sont perpendiculaires au plan vertical; conséquemment, les tangentes aux diverses courbes de la surface, menées en leurs points de croisement avec l'un des parallèles considérés, se projettent toutes sur la trace verticale du plan de ce parallèle, il s'ensuit que sur le plan vertical les tangentes aux projections des courbes seront horizontales, et c'est là ce qu'on voulait établir.

399. Points limites dans le sens latéral du contour apparent vertical. — Ce sont les points en lesquels la tangente au contour apparent vertical est verticale, ou, si l'on veut, les points des parallèles, maximum ou minimum; l'un d'eux a'_1 est donné par le collier; on construirait facilement les autres points limites que l'épure peut offrir.

400. Points doubles du contour apparent vertical. — Ces points sont évidemment sur les parallèles de même rayon et de même niveau. Pour résoudre la question dans son cas général, il faut recourir au tracé de deux courbes d'erreur (§ 373). Que l'on prenne, en effet, les projections horizontales d'une suite de cordes horizontales de la courbe donnée; c'est parmi elles que l'on devra trouver la corde commune à g et à la projection horizontale du parallèle double; il faut choisir celle de ces

cordes qui se trouve être divisée en deux parties égales par sa perpendiculaire issue du pied z de l'axe. Cherchons donc le point qui remplit les deux conditions : d'être d'abord au milieu de la corde, puis au pied de la perpendiculaire à cette corde menée par z ; négligeant la première, nous aurons une courbe d'erreur donnée par les pieds des perpendiculaires menées par z aux projections horizontales des diverses cordes ; négligeant la seconde, nous aurons une autre courbe d'erreur donnée par le lieu des milieux des cordes. — Au point de rencontre des deux courbes l'erreur sera nulle ; unissant ce point au centre, on aura la perpendiculaire à la corde, d'où résultera celle-ci ; le tracé l'achèvera alors très aisément.

Dans les cas du *tore général* (§ **338**) la courbe g, g' est du second degré et le tracé précédent se simplifie très notablement.

En effet, les deux courbes d'erreur sont alors rectilignes ; car la génératrice étant plane, les cordes horizontales seront parallèles, leurs projections horizontales le seront également. Il en résulte, d'une part, que le lieu du milieu des projections horizontales de ces cordes ne sera autre chose que leur diamètre conjugué, d'autre part, que le lieu du pied des perpendiculaires menées de z à ces mêmes projections sera la perpendiculaire unique menée de ce point z à leur direction. La rencontre des deux droites donnera le point milieu cherché, et le tracé l'achèvera comme dans le cas général.

401. Tangentes aux points double du contour apparent vertical. — On les trouvera en opérant sur les deux points de la génératrice appartenant au parallèle double comme on l'a fait pour le point quelconque m, m'.

402. Problème II. — *Construire le plan tangent en un point d'une surface de révolution.*

Première solution générale. — *Au point donné, un parallèle et une génératrice se croisent et les tangentes menées en ce même point à ces deux lignes déterminent le plan cherché.*

Seconde solution générale. — *Menant par le point donné la normale au méridien et le plan perpendiculaire à cette ligne, ce dernier sera le plan tangent demandé.*

Troisième solution générale. — *On amène, par une rotation autour de l'axe, le point donné sur le méridien principal, on construit alors le plan tangent en ce point et on ramène le point de contact sur sa première position, en entraînant le plan tangent.* — La construction du plan qui touche la surface suivant un point du méridien principal est des plus simples, elle s'exécute en effet en conduisant par la tangente au méridien au point considéré, un plan perpendiculaire au plan vertical.

Exécution du tracé. — *Nous supposerons d'abord que la surface est donnée par un axe vertical et par son méridien principal.*

403. Première solution. — Prenons, par exemple, l'ellipsoïde de révolution et traçons ses contours apparents sur les deux plans de projection (*fig.* 291, pl. XXVII). Un point m, m' ayant été placé sur la surface, par la méthode du paragraphe **396**, cherchons à construire, à l'aide de la première solution générale, le plan tangent en m, m' ; menons les projections t, t' de la tangente au parallèle, et, en vue de déterminer celles de la tangente au méridien, tirons la tangente en a, a' au méridien principal, prenons sa rencontre ω', z avec l'axe, ce point est le sommet du faisceau des tangentes aux méridiens le long du parallèle conduit par m, m' ; conséquemment, les droites zm, $\omega' m'$ ne sont autre chose que les projections de la tangente au méridien du point donné. Le plan tangent se trouve alors déterminé par les droites (t, t'), $(mz, m'\omega')$.

Nous pouvons chercher les traces de ce plan tangent ; en prenant celle θ sur le plan horizontal de la tangente au méridien et en tirant de ce point la parallèle P à la tangente t, on trouve sa trace horizontale. Quant à la trace verticale, comme ici P rencontre xy en un point éloigné, nous conduirons

par z, ω' une parallèle à P et nous en prendrons la trace verticale v'_1, ainsi que celle v' de la tangente au parallèle; par la droite de jonction des points v', v'_1 nous aurons enfin la trace verticale P′ du plan tangent.

404. Seconde solution. — **Tore.** — Dans le cas du tore la normale à la surface s'obtient très aisément, puisqu'elle se confond avec le rayon du méridien qui passe au point considéré; la seconde solution que nous avons indiquée (§ **402**) est donc particulièrement commode pour cette surface : donnons-en le tracé.

Soient z, z' les projections de l'axe (*fig.* 292, pl. XXVII); figurons les contours apparents de la surface et construisons les projections m, m' de l'un de ses points (§ **396**). Pour construire la normale en m, m', déterminons, par la rencontre de z' et du rayon $c'a'$, la projection verticale ω' du sommet du faisceau des normales le long du parallèle conduit par m, m'; quant à la projection horizontale de ce sommet, on la trouve immédiatement en z. La normale cherchée a donc pour projection verticale la droite $\omega' m'$ et aurait pour projection horizontale la droite qui unirait m, z, droite que nous n'avons point figurée sur l'épure.

Il faut ensuite mener par m, m' un plan perpendiculaire à la normale; une horizontale de ce plan a sa projection verticale en $a'm'$, sa projection horizontale sur la tangente mv à la projection de même nom du parallèle conduit par M et sa trace verticale en v'; la trace verticale P′ du plan tangent s'obtient alors par la perpendiculaire abaissée de v' sur $m'\omega'$, et la rencontre α de cette trace avec xy donne un point de la trace horizontale du plan tangent cherché; en menant par ce point une parallèle à vm on a enfin la trace horizontale αP de ce plan.

Dans le cas de la sphère la méthode de la normale doit être préférée aux deux autres; effectivement, le rayon du point de contact donne immédiatement la normale à la surface; on en déduit très aisément alors, comme nous venons de le faire pour le *tore*, les traces du plan tangent.

405. Troisième solution. — Soient z, z' les projections de l'axe et c' la projection verticale de la courbe méridienne principale que l'on supppose quelconque (*fig.* 293, pl. XXVII). Plaçons un point m, m' sur la surface, et, par une rotation autour de z, z', amenons-le dans le plan du méridien principal; il vient alors se projeter verticalement en a' et les traces du plan tangent correspondant sont $P'_1\alpha_1P_1$. Nous pouvons maintenant ramener le point de contact en sa position initiale m, m', tout en entraînant le plan : sa trace horizontale α_1P_1 vient en αP; quant à la trace verticale on prend, pour la trouver, le point de croisement b', z de l'axe z, z' et du plan $P_1\alpha P'_1$, point qui se maintient fixe pendant la rotation, et on conduit par ce point l'horizontale zv, $b'v'$ du plan tangent cherché; puis on en prend la trace verticale v', laquelle appartient à celle du même nom du plan tangent; en tirant la droite $\alpha v'$ on a enfin la seconde trace P′ du plan demandé.

EXÉCUTION DU TRACÉ DU PLAN TANGENT EN UN POINT D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION AYANT SON AXE VERTICAL ET DONT LA GÉNÉRATRICE EST QUELCONQUE

406. Première solution. — Soient z, z' les projections de l'axe et g, g' celles de la génératrice (*fig.* 294, pl. XXVII). Plaçons m, m' sur la surface (§ **396**) et cherchons le plan tangent en ce point. Le parallèle conduit par m, m' rencontre la génératrice en μ, μ', menons les projections $\mu\theta$, $\mu'\theta'$ de la tangente à la génératrice en ce point et prenons la trace horizontale θ de cette tangente. Il faut actuellement faire tourner, afin d'amener μ, μ' en m, m' la tangente à la génératrice; la projection

horizontale $\mu\theta$ de la tangente conservera dans le mouvement sa distance zq au pied de l'axe, et, comme μ devra venir en m, en traçant le cercle de centre z dont le rayon est égal à la distance zq de z à $\mu\theta$, et en tirant la tangente mq_1 à ce cercle, on aura la projection horizontale de la tangente à la génératrice après sa rotation ; la trace horizontale de cette ligne sera au croisement θ_1 de mq_1 et de la circonférence de centre z qui passe par θ.

Le plan tangent est actuellement déterminé par le point θ_1 et par la tangente mv, $m'v$ au parallèle du point m, m'. Pour construire ses traces, on mène d'abord par θ_1 une parallèle à vm, qui donne la trace horizontale P ; la trace verticale P' s'obtient ensuite par la droite de jonction du point v' au croisement α de P avec xy.

407. Deuxième solution. — Reportons sur la figure 295, pl. XXVII, les données de la précédente épure et proposons-nous de construire le plan tangent en m, m' à l'aide de la normale en ce point à la surface donnée. Pour le faire, cherchons le sommet du faisceau des normales suivant le parallèle du point m, m', sommet qui se trouve à la rencontre de l'axe z, z' et d'un plan mené par μ, μ' perpendiculairement à la tangente t, t' à g, g', conduite par ce même point μ, μ'. Pour obtenir le point de rencontre, tirons par μ, μ' une horizontale du plan perpendiculaire à t, t' ; sa projection sur le plan vertical se confond avec celle $\mu'm'$ du parallèle, celle sur le plan horizontal est la perpendiculaire μh, à μt, menée par μ ; cela fait, afin de déterminer tout à la fois le plan normal ainsi que sa trace sur z, z', tirons la ligne de front de ce plan projetée horizontalement en zf, laquelle rencontre μh au point a, en relevant ce dernier au point a' et en conduisant par ce point a' une perpendiculaire $a'f'$ à t', on obtient la projection verticale de la ligne de front qui doit rencontrer z, z' ; en prenant cette rencontre ω', z on a les projections du sommet du faisceau des normales ; les projections de la normale cherchée sont alors obtenues en traçant les droites $\omega'm', zm$. La construction du plan tangent ne saurait alors offrir aucune difficulté. Le tracé qui vient d'être indiqué est surtout utile lorsqu'on veut simplement construire les projections de la normale, soit pour l'utilité propre que peut offrir cette ligne, soit dans le but de déterminer le plan tangent par l'une de ses normales et le pied de cette ligne.

408. La tangence à une surface de révolution équivaut à une condition. — En effet, toutes les tangentes aux sections faites sur la surface de révolution par des plans issus d'un point quelconque, constituent un cône ayant son sommet au point choisi et circonscrit à la surface. On en déduit qu'il est possible de faire passer par deux points un plan tangent à une surface de révolution : pour le faire, on pourra conduire par l'un des points un cône circonscrit à la surface auquel on mènera un plan tangent passant par le second point donné. En somme, deux points et la tangence déterminent un plan, la tangence équivaut donc à une seule condition.

409. Problème III. — *Mener par un point extérieur à une surface de révolution un plan qui la touche sur un parallèle donné.*

Méthode des enveloppées coniques. — La surface de révolution est l'enveloppe des cônes circonscrits suivant les parallèles ; on peut donc lui substituer l'enveloppée conique dont la caractéristique est le parallèle donné et conduire simplement par le point extérieur un plan tangent à ce cône.

Passons au tracé. Soient donnés (*fig.* 296, pl. XXVIII) : un ellipsoïde aplati, un parallèle $a'b'$, ab et un point extérieur m, m'. Conduisons par a' la tangente à la projection verticale de l'ellipse méridienne principale, et prenons sa rencontre s' avec z' ; ce point s' est la projection verticale du sommet du cône circonscrit à l'ellipsoïde, sa projection horizontale est au pied z de l'axe et le problème se réduit à celui de la construction du plan tangent mené par m, m' au cône auxiliaire dont le sommet se trouve en s', z. Ce plan tangent contient la droite qui unit m, m' a s', z ; en coupant cette droite, le cône et le

plan tangent cherché par celui du parallèle, on trouve : sur la droite, le point μ', μ, sur le cône, le parallèle donné $a'b'$, ab, et, sur le plan tangent inconnu, l'une des tangentes au parallèle menées par μ, μ'; tangentes qui se projettent en μc_1, μc_2 sur le plan horizontal, et sur l'autre plan de projection, en $\mu' e'$.

Le plan tangent est actuellement déterminé par l'une des tangentes que nous venons de tracer et par la droite $s'\mu'$, $z\mu$; le problème offre donc deux solutions et les contacts se font en (c_1, c'_1), (c_2, c'_2). Quand les traces des plans tangents seront utiles, on les construira sans aucune difficulté.

410. Méthode des enveloppées sphériques.—Soient encore donnés : par ses deux contours apparents, un ellipsoïde de révolution (*fig.* 297, pl. XXVIII); par leurs projections $(ab, a'b')$, (m, m'), un parallèle de la surface et un point extérieur à celle-ci.

Déterminons l'enveloppée sphérique dont la caractéristique est le parallèle donné, son centre $\omega' z$ est au point de rencontre de la normale en b, b' avec l'axe z, z' et son rayon est la longueur $\omega' b'$ de cette normale. D'après cela on peut tracer la projection verticale de la sphère.

En imaginant un point de vue en m, m', le contour apparent correspondant de l'enveloppée, celui de l'enveloppe et la caractéristique concourent en un seul point (§ 394), qui n'est autre que le point de contact du plan tangent cherché.

Pour obtenir simplement le contour apparent de l'enveloppée amenons, par une rotation autour de z, z', le point donné m, m' en μ, μ', dans le plan de front conduit par l'axe; alors, en plaçant le point de vue en μ, μ', le contour apparent de la sphère se projette verticalement suivant la *polaire* $p'q'$ du point μ' par rapport au cercle figuré sur le plan vertical, la rencontre de ce contour et de la caractéristique se fait en deux points, placés sur une corde perpendiculaire au plan vertical et projetée sur ce plan en γ'; cette corde se projette horizontalement suivant une portion de la perpendiculaire à xy menée par γ' et se trouve à une distance de l'axe z, z' égale à $z\gamma$. Si l'on revient à la position primitive, γ vient en γ_1 et la corde prend en projection horizontale la position c_1c_2 perpendiculaire à $z\gamma_1$, ses extrémités c_1, c_2 sont les projections sur ce même plan des points de contact des plans tangents cherchés, leurs projections verticales correspondantes sont au croisement c'_1, c'_2 des lignes de rappel menées par c_1, c_2 et de la projection $a'b'$ du parallèle donné; on achèvera le tracé comme au paragraphe 403.

411. Problème IV. — *Mener, par un point extérieur à une surface de révolution, un plan qui la touche sur un méridien donné.* — Déterminons la surface par les projections z, z' de l'axe (*fig.* 298, pl. XXVIII) et le contour apparent γ' en projection verticale; soient P la trace horizontale du méridien donné et m, m' le point extérieur. Il faut conduire par ce dernier un plan tangent au cylindre qui touche la surface de révolution par le méridien donné; ce que l'on fait en tirant par m, m' une parallèle aux génératrices de ce cylindre, laquelle n'est autre que la perpendiculaire menée de ce point m, m' au plan de base, et se projette, par suite, suivant deux droites d, d', l'une perpendiculaire à P, l'autre parallèle à xy.

Le plan de base rencontre cette perpendiculaire en un point projeté horizontalement en μ et le problème se réduit à conduire par ce point des tangentes au méridien donné. On y parvient, sans tracer de courbe, en amenant ce méridien, par une rotation autour de z, z', sur celui de front projeté verticalement en γ'; le croisement de d, d' et du plan P vient alors en μ_1, μ'_1; et la tangente $\mu'_1 c'_1$ menée par μ'_1 à la courbe γ' donne la projection verticale de celle que nous cherchons; il faut lui faire subir un mouvement inverse du premier dans lequel c_1, c'_1 vient en c, c'.

Le plan tangent cherché est actuellement déterminé par l'une de ses droites d, d' et son contact c, c' sur la surface.

412. Problème V. — *Mener, parallèlement à une droite donnée, un plan qui touche une surface de*

révolution sur un parallèle donné. — Le présent problème est un cas particulier de celui traité plus haut (§ 409), cas dans lequel le point extérieur est placé à l'infini sur une droite donnée.

Nous allons donc reproduire la solution du paragraphe précité, en introduisant les modifications qui résultent de la position particulière du point extérieur.

MÉTHODE DES ENVELOPPÉES CONIQUES.—Soient donnés : un ellipsoïde de révolution (*fig.* 299, pl. XXVIII), l'un de ses parallèles projeté verticalement en $a'b'$ et une droite d, d'. Pour construire le plan parallèle à d, d' et touchant sur le parallèle donné l'ellipsoïde, substituons à cette surface l'enveloppée conique dont la caractéristique est le parallèle, et dont on trouve le sommet par la rencontre s', z de l'axe et de la tangente en A à l'ellipse méridienne principale.

Le plan tangent au cône doit contenir la parallèle δ, δ' à d, d' menée par le sommet $s,'z$; pour achever de le déterminer il faut employer un plan sécant auxiliaire, nous le formerons du plan du cercle d'intersection du cône et du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde le long de l'équateur; ce cercle est horizontal, f' est la projection verticale de l'un de ses points, conséquemment la parallèle P' à xy menée par ce point f' est la trace verticale du plan horizontal auxiliaire; ses intersections sont : avec le cône, un parallèle projeté verticalement sur P', horizontalement sur la projection correspondante de l'équateur; avec δ, δ' le point μ, μ'; enfin avec le plan tangent cherché, les tangentes (μt_1, $\mu' t'$), (μt_2, $\mu' t'$) au cercle de section que l'on vient d'obtenir.

Le problème offre donc deux solutions respectivement déterminées par les deux couples de droites (δ, δ'), (μt_1, $\mu' t'$), et (δ, δ'), (μt_2, $\mu' t'$).

MÉTHODE DES ENVELOPPÉES SPHÉRIQUES. — Soient donnés : un ellipsoïde de révolution par son axe et son méridien de front (*fig.* 300, pl. XXVIII); un parallèle (ab, $a'b'$) de la surface et une droite δ, δ', que nous avons fait partir, afin de faciliter le tracé, d'un point f', z placé sur l'axe. Prenant pour caractéristique le parallèle donné, nous substituerons à la surface l'enveloppée sphérique correspondante; le centre de cette enveloppée se projette horizontalement au pied z de l'axe, et, sur l'autre plan coordonné, au point de croisement ω' de z' avec la normale menée par b' à la projection verticale du méridien principal; le rayon de l'enveloppée sphérique est donné dans sa véritable grandeur par $b'\omega'$.

Pour trouver le point de contact du plan tangent cherché, nous prendrons les rencontres de la caractéristique ab, $a'b'$ et de la courbe de contact du cylindre parallèle à δ, δ' et circonscrit à la sphère; cette courbe est un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la direction des génératrices du cylindre auxiliaire, et qui se détermine très simplement en rendant la droite δ, δ' parallèle au plan vertical, au moyen d'une rotation que l'on imprime, autour de l'axe z, z', à la figure complète; la trace θ, θ' de δ, δ' vient en θ_1, θ'_1; le point f', z ne bouge pas; les projections de la droite δ, δ' deviennent donc $z\theta_1$, $f'\theta_1'$.

Par la projection verticale ω' du centre de l'enveloppée sphérique on abaisse sur la droite $z'\theta'_1$ une perpendiculaire $\omega'p'$, qui donne la droite sur laquelle le grand cercle de contact se projette verticalement. Ce cercle et la caractéristique ont en commun une corde, projetée verticalement au point de croisement γ' des droites $a'b'$, $\omega'p'$, horizontalement suivant une portion de la perpendiculaire à la ligne de terre menée par ce même point γ'. Ramenons la corde sur sa position initiale : sa distance à l'axe est $z\gamma$; en décrivant de z comme centre avec cette distance $z\gamma$ pour rayon un arc de cercle et en prenant sa rencontre avec δ, on trouve la projection horizontale γ_1 d'un point de la corde, la projection de celle-ci se place à son tour sur la perpendiculaire à δ, menée par γ, et se limite en c_1, c_2, sur celle du parallèle; en menant des lignes de rappel par les points que nous venons de déterminer, nous aurons en leurs croisements avec $a'b'$ les projections verticales c'_1, c'_2 des points de contact.

La connaissance des points de contact (c_1, c'_1), (c_2, c'_2) des plans tangents qui satisfont aux conditions du problème suffit, comme on l'a vu au paragraphe **403**, à la détermination de ces plans.

413. Problème VI. — *Mener, parallèlement à une droite donnée, un plan qui touche une surface de révolution sur un méridien donné.*

Méthode des enveloppées cylindriques. — Soient donnés (*fig.* 301, pl. XXVIII) : un ellipsoïde, par son axe vertical z, z' et par son méridien principal ; la trace horizontale P du méridien de contact et une droite δ, δ' menée par un point quelconque a, a' de l'axe z, z'.

Substituons à l'ellipsoïde une enveloppée cylindrique qui aura pour section droite le méridien P donné et conduisons parallèlement à δ, δ' le plan tangent à l'enveloppée ; ce plan sera celui que nous cherchons à construire.

En vue de ce but, déterminons la direction du plan tangent à l'aide de la droite δ, δ' et d'une parallèle aux génératrices du cylindre conduite par la trace θ, θ' de δ, δ' ; cette parallèle n'est autre que la perpendiculaire menée par θ, θ' au plan méridien dont la trace horizontale est en P, c'est une droite du plan horizontal placée sur la perpendiculaire θb menée à P, du point θ.

Prenons pour plan sécant auxiliaire celui du méridien conduit par P, il rencontre le cylindre suivant le méridien donné ; le plan des droites (δ, δ'), (θb) suivant une droite dont on connaît deux points de passage, l'un a, a', sur l'axe, l'autre b, sur le plan horizontal.

D'après cela, le plan tangent inconnu coupe le plan du méridien donné suivant des tangentes à ce méridien dirigées parallèlement à la droite de jonction des points (a, a'), b. Pour conduire ces tangentes, sans tracer la projection verticale du méridien donné, amenons, par une rotation autour de z, z', le plan de ce méridien dans une position parallèle au plan vertical ; a, a' ne bougera pas, b ira se projeter en b_1, b'_1. En unissant par une droite a', b'_1 et en traçant des tangentes au méridien principal parallèles à cette droite, on aura les points de contact (c'_1, c_1), (γ'_1, γ_1) après la rotation.

Revenons à la position naturelle de la figure : (c_1, c'_1) ira en c, c' et γ_1, γ'_1 en γ, γ'. Le problème s'achèvera très aisément, puisqu'on connaît le point de contact du plan tangent pour chacune des solutions et la direction de ces plans, qui est celle du plan dont la trace horizontale se fait en θb et dont a, a' est un point de passage.

414. Tore. — Méthode des enveloppées sphériques. — Il est pour le tore un mode de génération à l'aide d'enveloppées mobiles qui, bien que non applicable aux autres surfaces de révolution, n'est pas sans intérêt ; il consiste à considérer le tore comme l'enveloppe d'une sphère dont le rayon est constamment égal à celui du cercle méridien et dont le centre se déplace en décrivant le cercle que parcourt, dans sa rotation autour de l'axe de la surface, le centre de ce méridien. Les caractéristiques sont alors les méridiens de la surface. Par l'emploi de cette enveloppée sphérique, on peut résoudre le présent problème aussi bien que celui du paragraphe **411**. Nous nous bornerons à tracer par cette méthode particulière le plan tangent au tore parallèle à une droite donnée.

Exécutions du tracé. — Soient donnés le tore par ses deux contours apparents, le plan méridien de contact par sa trace horizontale P (*fig.* 302, pl. XXVIII) et la droite δ, δ' toujours menée par un point a, a' de l'axe z, z'.

Amenons, à l'aide d'une rotation autour de z, z', le plan méridien donné sur celui de front F en entraînant la droite δ, δ' ; cette dernière ira se projeter horizontalement sur une droite δ_1 qui fait avec δ l'angle de rotation α dans le sens de la flèche f, la trace θ, θ' de δ, δ', ira en θ_1, θ'_1 et la projection verticale de cette même droite δ, δ' viendra en δ_1 sur la droite de jonction des points a' θ'_1. Le méridien donné conduit à deux sphères enveloppées ; l'une d'elles, après la rota-

tion, sera représentée sur le plan vertical par le cercle méridien principal, dont le centre est en ω'; il faut simplement chercher la rencontre de ce cercle et de la courbe de contact du cylindre circonscrit à la sphère dans la direction δ_1, δ'_1. Bien que le grand cercle de contact ait pour projection verticale une ellipse, le tracé se fait très aisément. Effectivement, en conduisant par ω' une perpendiculaire à δ'_1, cette ligne n'est autre chose qu'une droite de front du plan du cercle de contact, droite qui détermine en c'_1, γ'_1 les projections verticales, après la rotation, des points de croisement de la caractéristique et de la courbe de contact du cylindre circonscrit, ou, ce qui est la même chose, les points de contact des plans tangents cherchés, après la rotation de la figure.

En revenant à la position primitive les points (c_1, c'_1), (γ_1, γ'_1) iront respectivement se placer en (c, c'), (γ, γ') et la construction du plan tangent pourra s'achever par la méthode du paragraphe **403**. Le problème offre deux autres solutions, non figurées sur notre épure, qui seraient données par la seconde enveloppée sphérique.

415. Problème VII. — *Construire les projections de la courbe de contact d'une surface de révolution avec un cône circonscrit dont on donne le sommet.* — Le présent problème peut être résolu par diverses méthodes, dont les plus importantes sont : 1° *la méthode de section*, et 2° *la méthode des enveloppées.*

1° Méthode des sections. — Cette méthode, que l'on peut appliquer à une surface quelconque, consiste à couper celle-ci par un plan conduit par le sommet du cône et à mener par ce même sommet des tangentes à la section; les points de contact de ces tangentes font partie de la courbe cherchée. On construira pareillement, en changeant l'orientation du plan auxiliaire, des points en nombre suffisant pour pouvoir, avec toute l'exactitude que comporte la méthode graphique, tracer la courbe de contact.

La méthode des sections, donnant généralement lieu à des constructions laborieuses, ne s'emploie guère que pour certaints points particuliers, placés dans deux plans sécants auxiliaires dont la rencontre avec la surface se trouve déjà tracée sur l'épure, ou se construit très simplement.

2° Méthode des enveloppées. — Pour construire les points de la courbe de contact menons des parallèles ou des méridiens suffisamment rapprochés et déterminons, comme on l'a fait pour les problèmes traités plus haut, les contacts sur ces parallèles ou sur ces méridiens, des plans tangents conduits par le sommet du cône donné. En unissant ensuite tous ces points nous en déduirons la courbe cherchée.

416. Modification de la méthode des enveloppées coniques pour les caractéristiques voisines du collier ou de l'équateur. — Déterminons la surface de révolution par son axe z, z' (*fig.* **303**, pl. XXVIII) et par la projection verticale μ' de son méridien principal; puis, à l'aide d'une rotation autour de z, z', supposons que l'on ait amené le sommet s, s' du cône dont on cherche la courbe de contact dans le plan de front conduit par l'axe. Considérons la projection verticale m' d'un point du méridien principal, et figurons, sans la limiter, par une perpendiculaire $m'\omega'$ abaissée du point m' sur z', la projection verticale du parallèle passant par **M**; cherchons ensuite les points de la courbe de contact qui se trouvent sur ce parallèle. Pour cet effet, menons la tangente en m' à μ', sa rencontre σ' avec z' détermine la projection verticale du sommet d'une enveloppée conique; il faut maintenant conduire du point s, s', un plan tangent à l'enveloppée; adoptons pour plan sécant auxiliaire le plan horizontal mené par s, s'; sa rencontre avec la tangente $m'\sigma'$, sz se fait en t, t'; celle avec l'enveloppée est une circonférence, dont la projection horizontale a pour centre z et passe par t; enfin la rencontre avec les plans tangents cherchés est, en projection horizontale, le système des tangentes sa_1, sa_2, menées du point s au cercle que l'on vient de tracer, les contacts de ces

tangentes se projettent en (a_1, a'), (a_2, a'); en tirant la droite $\sigma'a'$, on trouve la projection verticale commune aux deux génératrices de contact, laquelle donne en son croisement c' avec $m'\omega'$ la projection verticale d'un point cherché. Sans nous arrêter à construire la projection horizontale du point de contact, occupons-nous de rendre le tracé qui détermine c' indépendant du point σ', afin qu'il devienne applicable aux parallèles voisins de l'équateur ou du collier, pour lesquels ce point sort des limites de l'épure.

Soit p le point de rencontre de a_1, a_2 avec zs, le triangle rectangle za_1z donne

$$\frac{zp}{za_1} = \frac{za_1}{zs},$$

ou, en remplaçant chaque ligne par son égale prise sur la projection verticale,

$$\frac{o'a'}{o't'} = \frac{o't'}{o's};$$

d'un autre côté on a

$$\frac{o'a'}{o't'} = \frac{\omega'c'}{\omega'm'},$$

en égalant les seconds membres des deux dernières égalités, il vient

$$\frac{o't'}{o's'} = \frac{\omega'c'}{\omega'm}.$$

On en conclut que la droite $o'\omega'$ et celles de jonction des deux couples de points (s', m'), (t', c'), concourent en un seul point α.

La construction se réduit alors, ayant tracé, sans qu'il soit nécessaire de la limiter, la projection verticale $m'\omega'$ d'un parallèle, à conduire la tangente en m' au méridien, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre t' avec la parallèle à la ligne de terre menée, une fois pour toutes, par s'; à tirer la droite $s'm'$ qui donne, par sa rencontre avec z, le point α, que l'on unit par une droite à t', et à prendre enfin la rencontre c' de cette droite $\alpha't'$ avec $m'\omega'$, ce point c' que l'on a pu obtenir sans recourir à σ', est un point de la courbe cherchée.

La construction qui vient d'être indiquée permet, non seulement de rendre le tracé indépendant des positions que peut occuper le sommet de l'enveloppée, mais encore, lorsque le point s, s' est dans le plan de front conduit par l'axe, de rendre la construction de la projection verticale indépendante du plan horizontal.

Cela dit, passons à la recherche des points remarquables de la courbe de contact.

Démontrons d'abord ce théorème, qui sera dans la suite d'un fréquent emploi :

417. Théorème. — *Lorsqu'une courbe admet un plan de symétrie perpendiculaire au plan horizontal, ses points le plus haut et le plus bas sont dans ce plan, et réciproquement.* — Soient : H le plan horizontal (fig. i_9), P le plan de symétrie perpendiculaire à H et C la courbe considérée. Au point M de la courbe correspond sur celle-ci un symétrique M_1; la corde MM_1 est perpendiculaire à P et, par conséquent, horizontale. Pour que la tangente le soit aussi, il faut que deux points de section M, M_1 d'une corde horizontale se soient confondus, ou, en d'autres termes, que MM_1 ait une longueur nulle, ou encore que les points M, M_1 se soient confondus en un seul point de P.

Le théorème direct est donc démontré.

En ce qui concerne la réciproque, on voit que tout point du plan P et de la courbe C représente

deux points de celle-ci confondus sur une corde perpendiculaire à P, ou, autrement, sur une tangente horizontale; la réciproque est ainsi établie.

La démonstration directe suppose que, lorsque deux points d'une corde horizontale se confondent, ils sont sur le plan P.

Pour que deux points viennent coïncider en dehors de P, il faudrait en effet que la courbe offrît quatre points confondus deux à deux sur une corde horizontale telle que $\mu\mu'_1$; cette circonstance peut se produire, mais très exceptionnellement.

Pour que la réciproque présentât une exception, il faudrait qu'en un des points de rencontre de la

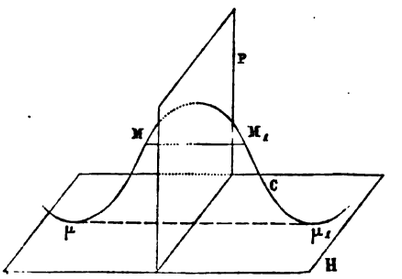


Fig. 15.

courbe et du plan P celle-ci ne fût pas tangente à la limite de sa corde horizontale, c'est-à-dire qu'il y eût dans P des points singuliers de la courbe (§ 376), ce qui peut aussi se produire, mais encore très exceptionnellement.

418. Points le plus haut et le plus bas. — Soient données la surface par son axe z, z' (*fig.* 304, pl. XXIX) et par la projection verticale μ' du méridien de front, ainsi que les projections s, s' du sommet du cône circonscrit. Le plan perpendiculaire au plan horizontal dont la trace sur ce dernier se trouve sur la droite qui unit s, z est un plan de symétrie de la courbe de contact; il s'ensuit (§ 417) que les points de la courbe placés dans ce plan sont ceux que nous cherchons; rien n'est plus simple que de les trouver, il suffit d'appliquer la méthode des sections. A cet effet, coupons la surface donnée par le plan vertical conduit par z, z' et s, s'; la rencontre est une courbe méridienne à laquelle on doit conduire des tangentes par s, s'; pour éviter de construire la projection verticale de cette courbe, rendons-la, par une rotation autour de z, z', parallèle au plan vertical, en entraînant le point s, s', lequel prend la position s_1, s'_1, tandis que la méridienne du plan de symétrie s'applique sur celle du contour apparent vertical. En tirant à la projection verticale μ' de cette dernière une tangente $s'_1b'_1$ par s', nous aurons en son point de contact b'_1 la projection verticale du point cherché, dans la nouvelle position de la figure; la projection horizontale correspondante b_1 s'obtient très aisément; ce point b_1, b'_1, remis en place par la construction qu'indique l'épure, vient en b, b'; c'est le point le plus bas de la courbe.

Quant au point le plus haut, nous l'eussions trouvé en opérant sur la tangente issue de s'_1 et menée à la courbe symétrique de γ' par rapport à z', comme nous venons de le faire sur $s'_1b'_1$.

419. Parallèles limites. — Un parallèle pris arbitrairement pourrait ne pas contenir des points de la courbe; conséquemment il importe de chercher les limites entre lesquelles doit varier le parallèle employé; on devra donc commencer le tracé par la construction des points le plus haut et le plus bas, qui sont précisément sur les parallèles limites et qui les déterminent complètement.

420. Points de rebroussement de seconde espèce en projection verticale. — Si l'on suppose le sommet du cône en s_1, s'_1 (*fig.* 304, pl. XXIX) dans le plan méridien de front conduit par l'axe z, z', et que l'on trace, sans déplacer ce sommet, la courbe de contact correspondante en projection verticale, il se produira aux points tels que (b_1, b'_1) un rebroussement de seconde espèce; effectivement, la tangente en ce point de la courbe de contact est perpendiculaire au plan vertical, donc d'après le théorème et la remarque paragraphes **385**, **387**, la projection verticale de la courbe offrira en b'_1 un rebroussement de seconde espèce; seulement, à cause de la symétrie, les deux branches du rebroussement se recouvriront.

421. Points parasites en projection verticale. — En nous plaçant dans l'hypothèse du précédent alinéa, c'est-à-dire en supposant que le sommet s'_1, s_1 (*fig.* 304) soit situé dans le plan de front conduit par l'axe z, z', les points tels que b'_1 sont sur les parallèles limites.

Il est, d'autre part, manifeste que le tracé indiqué au paragraphe **416** devra conduire à la détermination de certains points non compris entre ces parallèles limites; points qui tomberont à l'extérieur de la surface et seront par conséquent inutiles. Mais ces points sont soumis à la même loi de génération géométrique que ceux de la courbe utile; ils en constituent donc le prolongement et portent pour ce motif le nom de *points parasites* de la courbe.

422. Asymptotes des branches parasites en projection verticale. — Reportons, en plaçant le sommet s_1, s'_1 du cône donné dans le plan de front conduit par l'axe z, z' de la surface, les données de la figure 304 sur la figure 305, pl. XXIX, et appliquons au parallèle maximum, dont une partie se projette verticalement en $m'\omega'$, le tracé du paragraphe **416** : joignons s'_1m' par une droite et prenons sa rencontre α' avec z'; menons ensuite la tangente en m', laquelle se confond ici avec la projection $m'\omega'$ d'une partie du parallèle; par s_1' menons une parallèle à la ligne de terre et prenons sa rencontre t'_∞ avec la tangente; tirons la droite de jonction du point α au point t'_∞, ou, ce qui revient au même, menons par α une parallèle à $s'_1t'_\infty$ et prenons enfin la rencontre c'_∞ de cette parallèle avec $m'\omega'$; c'_∞ est le point cherché et, comme il se trouve à l'infini sur $m'\omega'$, que tout parallèle voisin donne un point très éloigné de z' mais très rapproché de $m'\omega'$, on en conclut que la projection $m\omega'$ du parallèle le plus haut est une asymptote de la courbe. Ce raisonnement est en tout applicable au parallèle le plus bas.

423. Méridiens limites. — Reprenons l'axe z, z' de la surface (*fig.* 306), la projection verticale μ' du méridien de front et le sommet s, s' du cône.

La construction du paragraphe **411** donne les points de contact placés sur les divers méridiens; il suffit, on le sait, de déterminer par sa trace horizontale P le plan d'un méridien quelconque, d'abaisser la perpendiculaire sq, $s'q'$ à ce plan et de conduire par son pied q, q' des tangentes au méridien choisi; on trouve ainsi sur celui-ci des points de contact qui sont à la courbe cherchée. Le lieu du point q, q' est une circonférence de cercle située dans le plan horizontal H' conduit par s, s', laquelle se projette : verticalement sur H', horizontalement suivant la circonférence décrite sur sz comme diamètre. Cela dit, construisons la projection horizontale du parallèle de même niveau que le sommet s, s', et observons qu'elle divise le lieu du point q en deux parties, dont l'une c_1sc_2 est la projection horizontale des pieds des perpendiculaires placés à l'extérieur de la surface et l'autre c_1c_2 la projection horizontale des pieds des perpendiculaires placés à l'intérieur de cette même surface. On en déduit que pour les diverses positions de q situées sur l'arc c_1sc_2 chaque plan méridien donne des points de la courbe, et que pour celles situées sur l'arc c_1zc_2 les plans méridiens ne donnent aucun point. Les traces horizontales des plans limites sont donc les droites P_1, P_2 obtenues par la jonction du pied de l'axe z aux points c_1, c_2.

Relevons c_1, c_2 en c'_1, c'_2, sur H', et considérons les points (c_1, c'_1), (c_2, c'_2) respectivement placés dans les plans méridiens limites; sur les méridiens voisins de chacun de ces points et rencontrant la courbe de contact, on trouve deux points de celle-ci très rapprochés de (c_1, c'_1) ou de (c_2, c'_2) et qui, lorsque le méridien qui les contient prendra l'une de ses positions limites, se confondront entre eux et avec (c_1, c'_1) ou (c_2, c'_2); on déduit de là que les méridiens des plans limites sont respectivement tangents à la courbe de contact aux points (c_1, c'_1), (c_2, c'_2); ces deux points portent, pour ce motif, le nom de points limites.

424. Points de rebroussement de seconde espèce en projection horizontale. — Lorsque la surface est symétrique par rapport au plan de l'équateur ou du collier et qu'en outre le sommet du cône circonscrit se trouve dans le plan de symétrie, en menant, directement, par ce sommet des tangentes soit à l'équateur, soit au collier, on trouve, d'après la méthode des sections, des points de contact appartenant à la courbe cherchée, et les tangentes à celle-ci sont verticales en ces points; il en résulte pour la projection horizontale des points de rebroussement (§ 385). D'autre part, à cause de la symétrie, le rebroussement est de seconde espèce (§ 387) et les deux branches de la courbe se recouvrent.

Prenons, pour exemple, le tore général dont l'axe est z, z' (*fig.* 307, pl. XXIX), dont le méridien de front est formé de deux ellipses (μ, μ'), (μ_1, μ'_1) symétriques par rapport à z, z' et qui ont un de leurs axes parallèle à celui de la surface; plaçons le sommet du cône circonscrit en s, s' sur le plan horizontal H' conduit par le centre ω, ω' de l'une des ellipses données.

Cela fait, décrivons, d'après ce qui a été vu plus haut, une circonférence sur sz comme diamètre; elle nous donnera, en ses points de rencontre avec le collier et l'équateur, les points de rebroussement $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ de la projection horizontale et permettra de construire les traces $z\gamma_1, z\gamma_2, z\gamma_3, z\gamma_4$ des méridiens limites.

425. Points parasites de la projection horizontale. — La circonférence décrite sur sz comme diamètre est le lieu des projections horizontales des pieds des perpendiculaires menées des points s, s' sur les divers méridiens; c'est de chacun des points de ce lieu qu'il faut conduire des tangentes aux méridiens correspondants; on en déduit que les pieds des perpendiculaires placés soit entre γ_1, γ_2, soit entre γ_3, γ_4, ne donnent aucun point utile sur l'une des ellipses méridiennes correspondantes. Cherchons s'il peut donner des points parasites.

Un point quelconque de la projection horizontale de la courbe étudiée est (382), en plaçant le pôle au pied de la perpendiculaire abaissée de s, s' sur le plan méridien considéré, la trace horizontale de la polaire d'une des ellipses méridiennes correspondantes; soit donc pris sur l'arc qui unit γ_3, γ_4 par exemple, le pied q de l'une des perpendiculaires, le méridien correspondant a pour trace horizontale la droite P de jonction des points z, q; le point parasite correspondant est, en plaçant le pôle au point du plan H' projeté horizontalement en q, le pied sur le plan horizontal de la polaire de l'ellipse projetée en uv.

Pour construire ce pied, amenons, par une rotation autour de z, z', l'ellipse et le pôle dans le plan méridien principal, l'ellipse se confond, par exemple, avec μ', μ; le pôle vient en q_1, q'_1.

Le pôle par rapport à μ' de toute divergente issue de q'_1 est un point de la projection verticale de la polaire cherchée, après la rotation; en adoptant la divergente verticale qui coupe μ' en deux points dont l'un est a'_1, en tirant la tangente à l'ellipse en ce point et en prenant enfin sa rencontre avec H', on a la projection verticale m'_1 du pied sur H' de la polaire; comme cette polaire est verticale, son pied sur le plan horizontal se fait actuellement en m_1. Il faut alors le remettre en place, en lui

faisant décrire un arc de cercle de centre z pour l'amener en m, sur P. Ce point m est le point parasite cherché.

Il importe de remarquer que cette construction se base sur la forme particulière du méridien de la surface, contrairement à ce qui a lieu pour le tracé d'un point utile, qui est tout à fait indépendant de la forme du méridien.

426. Branches infinies des parties parasites en projection horizontale. — Nous nous occuperons seulement du tore général et nous conserverons l'épure du précédent paragraphe.

Pour que m soit à l'infini il faut que la polaire, dont m est le pied, s'éloigne entièrement à l'infini; or, dans le plan d'une conique, le pôle, par rapport à cette courbe de la droite à l'infini, est le centre de la conique et réciproquement, il faut donc placer le point q au centre de l'ellipse méridienne. En prenant le lieu des projections horizontales des centres des divers méridiens, qui n'est autre que la circonférence dont ω est un point de passage et qui a son centre en z, on trouvera, aux points de croisement q_2, q_3 de ce lieu et de celui du point q les pôles cherchés; on voit, en outre, que les droites zq_2, zq_3 qui contiennent des points parasites à l'infini sont les directions asymptotiques des branches parasites de la projection horizontale de la courbe de contact.

427. Points sur les contours apparents. — Ces points limitent les parties visibles des projections de la courbe de contact; il importe donc, si l'on veut indiquer la visibilité, de les déterminer. Ils offrent encore cette propriété importante que leurs projections sur le plan coordonné relatif au contour apparent considéré, sont des points de contact du contour apparent en projection et de la projection de la courbe. Il faut donc avoir grand soin, lorsqu'on dessine les projections de celle-ci, de leur faire toucher en ces points le contour apparent en projection (§ 342).

Cela dit, supposons le sommet s, s' du cône dans une position quelconque (*fig.* 308, pl. XXIX), et occupons-nous du tracé. Cherchons d'abord les points du contour apparent horizontal; que l'on conçoive deux cylindres verticaux ayant pour base l'équateur et le collier de la surface donnée, ainsi que les plans conduits tangentiellement à ces cylindres par s, s', et ces plans toucheront le collier et l'équateur aux points cherchés; d'après cela, en tirant par s les tangentes à la projection horizontale du collier et de l'équateur, on a, par leurs contacts, les projections horizontales $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ des points cherchés; ces points se projettent verticalement en γ'_1, γ'_2, γ'_3, γ'_4 sur les projections verticales $a'b'$, $d'f'$ du collier ou de l'équateur.

Un raisonnement en tout semblable à celui qui vient d'être fait conduit à tirer par s' des tangentes à la projection verticale du méridien principal, afin d'obtenir les projections de même nom c'_1, c'_2, c'_3, c'_4, des points placés sur le contour apparent vertical; des lignes de rappel menées par ces projections donnent sur df les projections horizontales c_1, c_2, c_3, c_4, correspondantes.

428. Problème VIII. — *Construire la trace horizontale d'un cône circonscrit à une surface de révolution.* — La surface de révolution et le sommet du cône étant donnés, on peut déterminer la courbe de contact du cône et de la surface; puis, en unissant le sommet du cône aux divers points de cette courbe, afin d'obtenir les projections des génératrices du cône, on prendra les traces horizontales de ces génératrices, qui seront les points de la courbe cherchée.

429. Construction de la tangente. — C'est la trace horizontale du plan tangent à la surface de révolution menée par le point correspondant de la courbe de contact.

430. Points de rebroussement de première espèce. — En menant par le sommet du cône circonscrit des tangentes à la courbe de contact, et en prenant ensuite la trace horizontale de cette ligne, on trouve les points de rebroussement de première espèce (§ 385).

431. Tangentes aux rebroussements. — Il suffit de prendre, comme pour un point quelconque, la trace horizontale du plan qui touche la surface de révolution au point correspondant de la courbe de contact.

432. Visibilité. — En se reportant aux données et aux constructions de la figure 308 (pl. XXIX) et au paragraphe **427**, on voit que les tangentes $s\gamma_1$, $s\gamma_2$, $s\gamma_3$, $s\gamma_4$, forment le contour apparent horizontal du cône circonscrit; en effet, la surface de révolution peut être considérée comme une enveloppée du cône et nous savons que le contour apparent en projection de l'enveloppe doit être tangent à celui de l'enveloppée (§ **395**. *bis*) ; donc les tangentes considérées constituent bien le contour apparent horizontal du cône circonscrit. Les projections verticales $s'\gamma_1'$, $s'\gamma'_2$, $s'\gamma'_3$, $s'\gamma'_4$ des génératrices qui forment le contour apparent horizontal du cône circonscrit, s'obtiennent, comme on peut le voir sur notre épure, par un tracé très simple.

En construisant les traces horizontales des génératrices $(s\gamma_1, s'\gamma'_1)$, $(s\gamma_2, s'\gamma'_2)$, $(s\gamma_3, s\gamma'_3)$, $(s\gamma_4, s\gamma'_4)$, on aura les points de la trace du cône placés sur le contour apparent; la visibilité se règlera alors facilement en déterminant celle d'un point pris dans une position arbitraire sur la courbe, et en observant qu'elle change toutes les fois que le point décrivant la courbe passe par le contour apparent relatif à la projection considérée.

Une remarque importante à faire est que les lignes $s\gamma_1$, $s\gamma_2$, etc., devront toucher la trace horizontale du cône.

433. Points limites dans le sens latéral. — Ce sont les points en lesquels la tangente est perpendiculaire à la ligne de terre; or, cette tangente est précisément la trace horizontale d'un plan tangent au cône ou à la surface de révolution, on en conclut que les points cherchés sont ceux qui correspondent aux contacts des plans tangents perpendiculaires au plan vertical, ou, ce qui est la même chose, ceux qui correspondent au contour apparent vertical du cône.

Ainsi, en reprenant encore la figure 308, pl. XXIX, on trouve en $s'\alpha\Sigma$ l'un des plans tangents perpendiculaires au plan vertical.

Le point de contact c_1, c'_1 de ce plan est placé sur la génératrice $s'c'_1$, sc_1 dont la trace horizontale θ est à la courbe cherchée; enfin, la trace horizontale $\alpha\Sigma$ du même plan donne la tangente à celle-ci en θ; ce dernier est donc bien un point limite dans le sens latéral et les trois autres points limites se construiront pareillement.

434. Points le plus haut et le plus bas. — Pour les trouver, il faut simplement chercher ceux qui correspondent aux plans tangents qui touchent la surface sur son méridien de profil; car, en effet, ces plans tangents sont perpendiculaires au plan du méridien de contact et, par suite, parallèles à la ligne de terre; leurs traces horizontales sont donc également parallèles à cette ligne.

En ce qui concerne leur tracé on a recours à la méthode du paragraphe 411.

435. Points à l'infini. — Asymptotes. — Les points à l'infini sont placés sur les génératrices du cône circonscrit parallèles au plan horizontal, génératrices que l'on trouve directement par la méthode des sections; il suffit, en effet, de couper la surface de révolution par le plan horizontal H′ conduit par le sommet s, s' du cône (*fig.* 309, pl. XXIX) et de tirer de ce point des tangentes à la section. Le plan H′ donne sur la surface un parallèle dont a, a' est un point de passage et dont le centre se trouve projeté horizontalement en z; en décrivant de z comme centre avec za pour rayon une circonférence on a la projection horizontale du parallèle; celles sur le même plan coordonnées des génératrices horizontales sont les tangentes sc, sc_1 menées par s à la projection horizontale de ce parallèle.

L'existence sur notre épure de génératrices parallèles au plan horizontal prouve celle des branches infinies de la trace horizontale du cône circonscrit.

Cherchons maintenant les asymptotes : ce sont les tangentes aux points à l'infini que nous venons de déterminer, c'est-à-dire les traces horizontales des plans tangents à la surface de révolution menés par les points du plan H' projetés horizontalement en c, c_1. Comme ces traces sont évidemment parallèles à sc, sc_1, on les connaîtra dès que l'on aura déterminé un point de chacune d'elles. Dans ce but, par a, a', menons la tangente au méridien de front et prenons sa trace horizontale θ; en faisant tourner cette trace, autour de z, z', pour l'amener dans les plans méridiens conduits par c ou par c_1, on trouve soit t, soit t_1; puis en tirant de chacun deux des droites $t\alpha$, $t_1\alpha_1$ respectivement parallèles à sc, sc_1 on obtient enfin les asymptotes cherchées.

436. Méthode des projections centrales. — La construction des points quelconques de la trace horizontale du cône circonscrit à une surface de révolution, donnée au paragraphe **428**, exige que l'on construise au préalable la courbe de contact de ce cône, ce qui conduit à un tracé long et délicat, auquel on peut substituer une construction, moins bonne sous le point de vue graphique, mais qui s'exécute avec une grande rapidité, et qui, en permettant de construire la trace du cône indépendamment de la courbe de contact, peut également donner la construction de celle-ci d'une façon expéditive.

Soient : z, z' les projections de l'axe de la surface de révolution, γ' l'une des lignes de son contour apparent en projection verticale et s, s' le sommet du cône circonscrit (*fig.* 310, pl. XXIX).

Imaginons que s, s' soit le point de vue, la courbe que nous cherchons sera alors le contour apparent en projection horizontale de la surface de révolution; or, le contour apparent en projection est l'enveloppe des projections des génératrices de la surface (§ **395** *ter*), on en déduit, en prenant pour génératrices de la surface les divers parallèles, qu'il suffit, le centre de projection étant en s, s', de construire les projections centrales de ces parallèles sur le plan horizontal et de tracer leur enveloppe.

Opérons d'abord sur le parallèle qui passe par a', a : sa projection centrale est un cercle dont on trouve, en premier lieu, le centre Ω, en projetant coniquement celui $\omega'z$ du parallèle, en second lieu un point de passage A en projetant dans le même système le point a, a'. Ce cercle peut alors se tracer.

On eût pu se borner, pour construire la projection centrale du parallèle, à déterminer celle Ω du centre et le rayon de la projection, qui est évidemment égal à $A'_1\,\Omega'$, ce qui eût permis la suppression des lignes AA', sa, aa'. C'est en profitant de ces réductions que l'on a construit les centres Ω_1, Ω_2, Ω_3, et les rayons $\Omega'_1A'_1$, $\Omega'_2A'_2$, $\Omega'_3A'_3$ des projections coniques de trois autres parallèles, ce qui a permis de tracer ces dernières et de prendre l'enveloppe μ, μ_1 des projections centrales des divers parallèles, qui n'est autre que la trace horizontale du cône demandé.

437. *Application de la méthode des projections centrales à la construction de la courbe de contact d'une surface de révolution et d'un cône circonscrit dont le sommet est donné.* — Conservons l'épure du paragraphe précédent et prenons l'un M des points de contact de l'enveloppe et de l'une des enveloppées; ce point peut être considéré comme la projection centrale d'un de ceux de la courbe de contact. En projetant M en M' et en tirant les droites sM, s'M', on détermine la projetante conique du point et, par sa rencontre m, m' avec le parallèle correspondant, on trouve enfin le point de contact demandé; l'épure offre cette vérification que les deux projections m, m' du point de contact doivent appartenir à la même ligne de rappel.

Par suite de la symétrie, un point de la courbe peut en faire trouver ou vérifier un second.

La construction qui vient d'être appliquée est très expéditive, mais n'offre que peu d'exactitude à cause de l'incertitude de la position des contacts de l'enveloppe et des diverses enveloppées.

438. Problème IX. — *Construire les projections de la courbe de contact d'une surface de révolution et d'un cylindre circonscrit parallèle à une direction donnée.* — En conduisant, parallèlement à la droite donnée, des plans tangents aux enveloppées coniques, sphériques ou cylindriques qui touchent la surface de révolution par des parallèles ou des méridiens, on détermine les projections des points de la courbe de contact situés sur les parallèles ou sur les méridiens choisis, et l'on peut tracer celles de cette courbe.

Lorsqu'on emploie la méthode des enveloppées coniques, l'ensemble du tracé peut être conduit comme il suit :

Premier tracé. — Soient : z, z' les projections de l'axe de la surface de révolution considérée (*fig.* 311, pl. XXX) ; μ' la projection verticale du méridien principal ; $(a'b', ab)$, (s, s') les projections de la base et celles du sommet d'une enveloppée conique ; soient encore d, d' les projections de la parallèle aux génératrices du cylindre menée par un point σ', z de l'axe.

Transportons l'enveloppée parallèment à elle-même afin d'amener son sommet s, s' en z, σ' ; la parallèle à la génératrice $s'a'$, za se projette en $\sigma'h'$, za et la trace horizontale de cette dernière se trouve en h ; en décrivant de z comme centre avec zh pour rayon une circonférence, on obtient la trace du cône sur le même plan coordonné. Il faut conduire à ce cône des plans tangents par d, d' : la trace horizontale de cette droite est en θ ; au lieu de conduire par ce point des tangentes à la base du cône, on décrit, une fois pour toutes, sur θz comme diamètre une circonférence, dont les rencontres avec la base du cône donnent les traces horizontales t, t_1 des génératrices de contact, on en déduit les projections horizontales zt, zt_1 de ces génératrices. Observant alors que, lorsqu'on relève la figure, les projections horizontales des génératrices du cône ne changent pas, on trouve, par les rencontres de la projection horizontale du parallèle choisi et de celles sur le même plan des génératrices de contact, les projections m, m_1, toujours sur ce même plan de projection, des points cherchés.

Des lignes de rappel menées par m, m_1 donnent, en leurs points de croisement m', m'_1 avec $a'b'$, les projections verticales des points cherchés.

Malgré cette simplification, l'exécution du tracé est toujours très pénible, il y a donc lieu de chercher le moyen de le réduire encore et de le rendre plus commode pour les parallèles voisins de l'équateur ou du collier.

439. Second tracé. — *Modification de la méthode des enveloppées coniques pour les caractéristiques voisines du collier ou de l'équateur.* — On opère comme au paragraphe 416, en ayant soin de rejeter à l'infini, dans une direction donnée, le sommet du cône. Indiquons parallèlement les deux tracés ; la figure i_{10} se rapportent au cône circonscrit et celle j_1 au cylindre ; dans ce qui va suivre il ne sera question que de projections verticales.

Supposons que l'on ait amené, à l'aide d'une rotation autour de l'axe de la surface de révolution, le sommet du cône pour la figure i_{10}, la droite donnée pour la figure j_1, dans le plan de front conduit par l'axe et soient alors s' la projection verticale du sommet et d' celle sur le même plan de la droite, pour cette dernière la projection s'_∞ du sommet est à l'infini sur d'. Prenons sur les deux figures la projection $m'n'$ d'un parallèle, tirons la droite $s'm'$ ou $s'_\infty m'$, ou, ce qui revient au même, pour la figure j_1, menons par m' la parallèle $m's'_\infty$ à d' ; construisons la rencontre α' de la droite que l'on

vient de tracer et de z'; menons les tangentes $m't'$ et $m't'_\infty$ et cherchons leurs rencontres t' et t'_∞ avec la perpendiculaire à z' menée soit par s', soit par s'_∞; joignons par une droite t' ou t'_∞ au point α' et prenons la rencontre c' de cette droite avec $m'n'$, qui sera le point cherché.

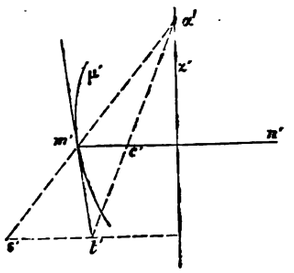


Fig. i_{10}.

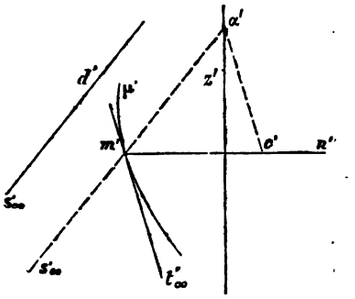


Fig. j_1.

440. Troisième tracé. — Soient z' la projection verticale de l'axe (fig. j_2) μ', $m'n'$, d' celles sur le même plan du méridien de front, d'un parallèle et de la direction donnée, rendue, comme précédemment, parallèle au plan vertical.

Employons l'enveloppée sphérique, qui touche la surface par la caractéristique projetée en $m'n'$, la projection verticale de son centre est au croisement ω' de z' avec la normale en m' à μ'. En abaissant

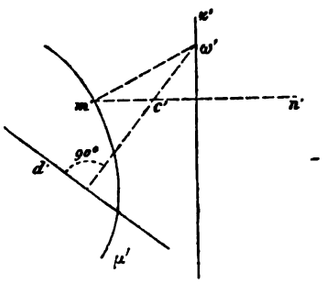


Fig. j_2.

du point ω' une perpendiculaire sur d', on a la projection verticale du grand cercle de contact de la sphère et d'un cylindre qui lui serait circonscrit dans la direction donnée; enfin, par la rencontre c' de cette perpendiculaire et de $m'n'$, on trouve la projection verticale d'un point de la courbe de contact.

441. Quatrième tracé. — *Résolvons d'abord ce problème. Construire la courbe de contact d'une sphère et d'un cylindre circonscrit parallèle à une direction donnée.* — Soient données, par ses contours apparents en projection, une sphère de centre o, o' et les projections d'une droite d, d' menée par le centre de la sphère dans la direction des génératrices du cylindre (*fig.* 312, pl. XXX).

La courbe de contact est un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à d, d'. Cherchons sa projection verticale; c'est une ellipse dont le grand axe est la projection du diamètre du cercle placé de front, et dont le petit axe est celle du diamètre perpendiculaire au premier (§ **136**). Le diamètre de front se projette suivant une perpendiculaire $b'c'$, à d', passant par o' et se limite sur le contour apparent en projection verticale de la sphère. Quant au deuxième axe, il est la projection verticale du diamètre du cercle de contact placé dans un plan conduit par o' et perpendiculaire à $b'c'$, plan

qui n'est autre que celui qui projette verticalement la droite D ; d'ailleurs, le diamètre que l'on doit projeter est perpendiculaire à cette même droite D. Rabattons, sur le plan de front conduit par le centre de la sphère, le plan projetant sur le plan vertical de la droite D et la figure qu'il contient : o' ne bouge pas, un point a, a', placé dans une position arbitraire sur d, d', vient sur une perpendiculaire à d', menée par a', et à une distance $a'A_1$ de ce dernier, égale à αa; en tirant la droite $o'A_1$, on obtient le rabattement de d, d'. Celui du diamètre dont on cherche les projections vient sur une perpendiculaire SS_1 à $o'A_1$. En revenant à la position initiale ses extrémités S,S_1 se placent aux points s', s'_1, points qui sont les sommets cherchés. Connaissant les axes de l'ellipse on sait la tracer. La visibilité se détermine en remarquant que S, A_1 placés, d'un même côté de la charnière d', sur le rabattement le sont aussi dans l'espace, après qu'on les a relevés, et comme A se projette horizontalement en a, en arrière de la projection horizontale pq du contour apparent vertical, ce point sera également en arrière du contour, il en sera de même du sommet projeté en s' ; d'ailleurs c', b' sont les projections verticales des points placés sur le contour apparent de même nom. La visibilité est donc celle que notre épure indique. Sur le plan horizontal on pourrait faire une construction en tout semblable à la précédente. On peut également remarquer que deux diamètres rectangulaires du cercle se projettent suivant deux diamètres conjugués de l'ellipse correspondante (§ 136), d'où l'on déduit que les projections horizontales des deux diamètres précédemment employés déterminent deux diamètres conjugués de la projection horizontale, et, par suite, cette dernière.

Pour construire ces diamètres conjugués, menons par b', c' deux lignes de rappel qui croisent pq aux extrémités b, c de l'un d'eux; traçons de même les lignes de rappel des points s', s'_1 et portons-y, de part et d'autre de pq, en σs, $\sigma_1 s_1$, les éloignements sS, s_1S_1, des extrémités du diamètre rabattu en SS_1 dans le plan de front du centre o, o'. Les deux diamètres conjugués de la projection horizontale sont donc bc, ss_1. Afin de pouvoir indiquer la visibilité, nous avons construit, en prenant simplement les contacts des tangentes menées au contour apparent horizontal de la sphère dans la direction d, les points u, v de la projection horizontale de la courbe de contact qui sont placés sur le contour apparent de même nom.

Revenons au quatrième tracé des projections de la courbe de contact d'une surface de révolution et d'un cylindre circonscrit. Soient donnés : l'axe z, z' de la surface de révolution (*fig.* 313, pl. XXX); la projection verticale μ' de l'une des courbes qui forment le méridien de front et la direction d, d' des génératrices du cylindre.

Supposons que l'on ait construit : le contour apparent en projection verticale ε' d'une sphère dont le centre et le rayon sont arbitraires ; ainsi que la projection ε'_1 de la courbe de contact avec un cylindre parallèle à d, d'; pour exécuter ce tracé sur notre épure nous devons simplement y reporter une partie de celle qui la précède.

Cela dit, cherchons le point de la courbe de contact qui se trouve sur un parallèle ab, $a'b'$ pris arbitrairement sur la surface donnée; employons dans ce but la méthode des enveloppes sphériques. L'enveloppe qui touche la surface de révolution par le parallèle choisi a pour centre un point dont les projections se trouvent l'une en z, l'autre à la rencontre ω' de z' avec la normale en a' à μ'. Concevons le cylindre circonscrit dans la direction d, d' à l'enveloppe sphérique considérée, il faut simplement trouver les croisements de sa courbe de contact et de la caractéristique ab, $a'b'$ (§ 394). Or, deux sphères quelconques sont homothétiques, deux cylindres circonscrits à ces sphères dans la même direction le sont également ; par suite, les projections verticales des courbes de contact des cylindres circonscrits dans la direction d, d' aux deux sphères employées dans notre épure, sont aussi homo-

thétiques. Ainsi donc on doit chercher la rencontre de la droite $a'b'$ avec l'ellipse homothétique à ε'_1 et relative à la sphère enveloppée choisie. Pour éviter le tracé d'une nouvelle ellipse, ce qui rendrait la construction impraticable, prenons l'homologue de $b'a'$ en tirant par o' un rayon $o'\alpha'$ parallèle à celui $\omega'a'$ de l'enveloppe, et en menant par α' la parallèle $\alpha'\beta'$ à $a'b'$. Les croisements γ', γ'_1 des lignes ε'_1, $\alpha'\beta'$ sont homologues aux points cherchés; en tirant, par suite, les droites $o'\gamma'$, $o'\gamma'_1$, et leurs parallèles par ω', on trouve, aux croisements de ces dernières avec $a'b'$, les projections verticales c', c'_1 de deux points de la courbe de contact; les lignes de rappel menées par chacun d'eux donnent enfin, en leurs croisements c, c_1 avec la projection horizontale du parallèle choisi, les projections de même nom des points de contact.

Les *parallèles limites* ont pour projections verticales les homologues des tangentes horizontales de la courbe ε'_1.

Nous devons actuellement nous occuper des points remarquables de la courbe de contact du cylindre circonscrit à une surface de révolution.

442. Points le plus haut et le plus bas. — Parallèles limites. — Il importe, bien que la présente question ait déjà été résolue dans le cours du précédent paragraphe, d'en donner une solution directe indépendante du quatrième tracé. Soient donc z, z' l'axe de la surface de révolution (*fig.* 314, pl. XXX), μ' la projection verticale du méridien de front et d, d' la direction donnée. Rien n'empêche de supposer que d, d' rencontre l'axe z, z'; alors le plan vertical projetant de cette droite est un plan de symétrie de la courbe de contact, et les points de celle-ci contenus dans ce dernier, d'après le théorème du paragraphe **417**, sont ceux que nous cherchons. Pour les déterminer, recourons à la méthode des sections : coupons la surface par le plan vertical projetant de la droite d, d', et menons au méridien de section des tangentes parallèles à cette droite; les contacts de ces tangentes seront les points cherchés. Pour éviter le tracé d'une nouvelle courbe, rendons le plan sécant, par une rotation autour de z, z', parallèle au plan vertical; le méridien de section vient sur celui qu'on nous donne; la droite d, d' a sa trace horizontale en θ, θ', point qui vient se placer en θ_1, θ'_1; et comme le point s', z reste fixe, la nouvelle projection verticale de la droite est $s'\theta'_1$.

Menons des tangentes à μ' parallèles à $s'\theta'_1$; l'un des contacts m'_1, m_1 vient, lorsqu'on remet la figure en place, en m, m'; c'est là le point le plus haut cherché. Le point le plus bas s'obtiendrait pareillement. Quant aux parallèles limites, ce sont ceux qui passent par les deux points dont on vient d'indiquer le tracé.

443. Points du contour apparent. — La construction donnée pour le cône circonscrit aux surfaces de révolution (§ **427**) est indépendante de la position attribuée au sommet du cône; elle est donc applicable au cylindre. Les points cherchés s'obtiendront simplement en conduisant parallèlement à chacune des projections de la droite donnée des tangentes au contour apparent en projection sur le plan de même nom.

444. Points parasites de la projection verticale. — On les détermine, lorsque les génératrices du cylindre sont parallèles au plan vertical, en opérant comme pour le cône circonscrit (§ **421** et **425**).

445. Problème X. — *Construire la trace horizontale du cylindre circonscrit dans une direction donnée à une surface de révolution.* — Les constructions de la trace du cône circonscrit données au paragraphe **428** sont entièrement applicables au cylindre. A cet égard, sans reprendre les explications, nous ferons simplement observer que la *méthode des projections cylindriques* devient particulièrement commode. Effectivement, les divers parallèles choisis sur la surface se projettent obliquement en véritable grandeur sur le plan horizontal, et, en ayant soin d'adopter des parallèles équidistants, les

centres des projections obliques seront eux-mêmes équidistants; par suite, pour les obtenir facilement on projettera obliquement les centres des parallèles extrêmes, et on divisera la droite de jonction de ces projections en autant de parties égales qu'il y en aura sur l'axe de la surface de révolution entre les points correspondants.

446. Problème XI. — *Construire les projections de la courbe de contact d'un tore général, dont l'axe de rotation est parallèle à l'un des axes des courbes méridiennes et d'un cylindre circonscrit dans une direction donnée. — Méthode de Dunesme.* — Soient z l'axe d'une surface de révolution et μ l'un de ses méridiens (fig. j_3). Donnons à μ un mouvement de translation perpendiculaire à z, c'est-à-dire un mouvement tel que tous les points de μ se déplacent d'une même quantité dans une direction perpendiculaire à z. Soit μ'_1 la nouvelle position du méridien. Nous allons faire voir *qu'en deux points* A, A'_1 *correspondants les tangentes aux courbes sont parallèles.* Prenons deux autres points correspondants B, B' voisins des premiers et tirons les deux cordes AB, A'B'; d'après la formation même de μ_1, les droites AA', BB' sont égales et parallèles, ABB'A' est donc un parallélogramme; conséquemment, les cordes AB, A'B' sont aussi égales et parallèles; et comme cette propriété est constamment vraie lorsque B se rapproche indéfiniment de A, elle le sera de même à la limite; ce qui veut dire que les tangentes en A et en A' aux courbes méridiennes sont parallèles.

Il est évident que les points de l'une des surfaces sont reliés à ceux de l'autre comme ceux de la courbe μ le sont à ceux de μ'_1, c'est-à-dire qu'ils sont deux à deux sur des perpendiculaires à z égales à la longueur dont la courbe μ s'est déplacée pour prendre la position μ'_1. Démontrons qu'en deux points correspondants les plans tangents aux surfaces sont parallèles.

En effet, aux points considérés, les tangentes aux parallèles sont dans un même plan et se dirigent perpendiculairement à la droite de jonction de ces points; ces tangentes sont donc

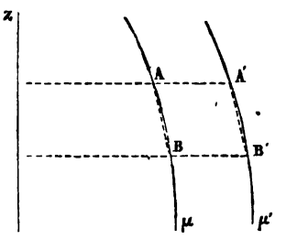


Fig. j_3.

parallèles; celles menées aux méridiens par les deux mêmes points le sont aussi, d'après la démonstration précédente. On déduit de là que les plans tangents aux points correspondants sont parallèles entre eux.

447. *Montrons maintenant qu'en circonscrivant aux deux surfaces de révolution, considérées dans une même direction, deux cylindres, on trouvera deux courbes de contact telles qu'à tout point de l'une correspondra un point de l'autre, sur une perpendiculaire à l'axe menée par le premier point et à une distance de ce point égale au déplacement des points du méridien.*

En effet, que l'on considère un des points de contact du cylindre circonscrit à l'une des surfaces de révolution, ou, autrement, un des contacts d'un plan tangent parallèle à la direction des génératrices du cylindre; à ce premier point correspondra, sur l'autre surface et sur une perpendicu-

laire à l'axe menée par le premier, un autre point, pour lequel le plan tangent à la seconde surface sera parallèle au premier plan et, par suite, parallèle aux génératrices du cylindre. Ce qui veut dire que le point correspondant au point considéré sur la première surface sera à la courbe de contact du cylindre circonscrit à la seconde surface de révolution; la propriété énoncée plus haut est donc établie.

448. *Enfin, nous allons démontrer que, sur un plan perpendiculaire à l'axe commun, les projections des courbes de contact des deux surfaces de révolution considérées et des cylindres circonscrits dans la même direction sont deux courbes respectivement conchoïdes l'une de l'autre.*

On appelle conchoïde d'une courbe C (fig. j_4) la courbe C_1, que l'on obtient en conduisant par un point fixe o des divergentes sur lesquelles on porte, de part et d'autre, et à partir de leurs rencontres avec C, des longueurs égales : ainsi on prendra sur les divergentes figurées $AA_1 = AA'_1 = BB_1 = BB'_1$; etc.

La propriété énoncée est, d'après cette définition, presque évidente, et le devient complètement lorsqu'on observe que les points des courbes de contact se trouvent deux à deux sur des perpendiculaires à l'axe dont les longueurs sont égales au déplacement commun imprimé aux points du méridien. Ces perpendiculaires prolongées constituent, en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe, des divergentes issues du pied de l'axe sur ce plan. D'autre part, ces mêmes perpendiculaires à l'axe sont égales et parallèles au plan de projection; elles sont donc encore égales en projection; la propriété énoncée se trouve ainsi démontrée.

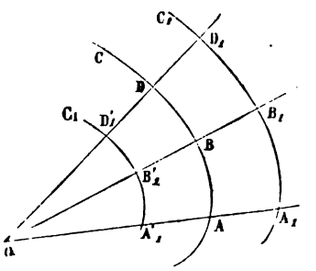


Fig. j_4.

449. Tangente à la conchoïde d'une courbe. — Soient une courbe C (fig. j_5) et le point de concours o des divergentes sur lesquelles on porte, pour former la conchoïde, une longueur λ constante à partir de part et d'autre de C.

Prenons pour pôle le point o, pour axe polaire l'une ox des divergentes, et démontrons qu'aux trois points A, A_1, A'_1, d'une même divergente oA, les sous-normales des courbes sont égales.

La sous-normale au point A de la courbe C est la portion oN d'une perpendiculaire au rayon vecteur menée par le pôle et comprise entre ce pôle et la normale en A. Ainsi nous voulons démontrer que les normales aux courbes figurées, et menées par A, A_1, A'_1, concourent en un seul point N, sur la perpendiculaire en o, au rayon vecteur oA.

Soit

$$\rho = f(\omega)$$

l'équation de C; celle de sa conchoïde sera

$$\rho = f(\omega) \pm \lambda.$$

Comme la sous-normale est égale à la dérivée de ρ en prenant pour variable indépendante ω, et que, d'un autre côté, les deux fonctions de ω qui donnent les valeurs ρ ne diffèrent que par une constante, leurs dérivées et, par conséquent les sous-normales, sont égales; c'est ce qu'on voulait établir.

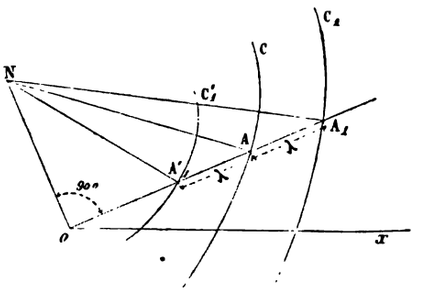


Fig. 315.

Cette propriété sert, lorsqu'on sait mener la tangente en un point d'une courbe, à construire celle de sa conchoïde au point correspondant.

450. Problème XI. — *Construire les projections de la courbe de contact d'un tore et d'un cylindre circonscrit dans une direction donnée.* — Nous supposerons l'axe du tore z, z' vertical (*fig.* 315, pl. XXX) et nous figurerons les contours apparents de cette surface sur les deux plans coordonnés, ainsi que les projections d, d' de la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le centre ω', z de la surface.

Donnons au méridien qui engendre le tore un mouvement de translation, afin d'amener son centre en celui ω', z du tore; le méridien ainsi déplacé engendrera, par sa rotation autour de z, z', une sphère, et la courbe de contact du cylindre circonscrit dans la direction d, d' à cette sphère aura pour projection horizontale (§ **441**) une ellipse. Si l'on applique au tore et à la sphère la méthode de Dumesme, on voit (§ **447**) que *la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de la courbe de contact du tore et du cylindre circonscrit est une conchoïde d'ellipse.*

Exécutons les constructions qui en résultent.

La projection horizontale de la sphère auxiliaire est un cercle γ de centre z et de rayon égal à celui du cercle méridien du tore; afin de construire la projection sur le même plan de sa courbe de contact avec le cylindre, appliquons le tracé du paragraphe précité : le diamètre S_1S_2 perpendiculaire à d est le grand axe de l'ellipse cherchée; quant au petit axe, c'est la projection horizontale du diamètre de la sphère placée dans le plan vertical projetant de d, d' et perpendiculaire à cette droite; nous l'aurons donc à l'aide du rabattement de d, d' sur le plan horizontal conduit par le centre ω', z de la sphère, rabattement que l'on obtient par la jonction du point z resté fixe, à celui H_1 qui se détermine en portant à partir de h, et sur une perpendiculaire en ce point à d, une longueur hH_1 égale à la cote $\omega'\omega_1$ du centre de la sphère. En tirant alors le diamètre S_3S_4 perpendiculaire à zH_1 et en relevant S_3 en s_3, S_4 en s_4 on a les deux autres sommets de l'ellipse cherchée. On peut ensuite tracer cette courbe à l'aide d'une méthode graphique qui donne rapidement les points de la courbe et leurs normales. Portons sur une bande de papier, figurée sur l'épure par une droite, des longueurs bm, am, respectivement égales au demi-grand axe zs_1 et au

demi-petit axe zs_3; puis faisons glisser b sur le petit axe et a sur le grand, en ayant soin de marquer un nombre suffisant de positions occupées par m; les points ainsi trouvés seront à l'ellipse.

Veut-on construire la normale en l'un d'eux, par exemple en m : on marque les positions correspondantes a, b des points glissants, et, d'après le théorème de M. Chasles, on sait que les perpendiculaires menées aux axes respectifs par a, b se croisent au centre instantané de rotation c, de la droite mobile ; en tirant alors la droite qui va de m à c, on a la normale à l'ellipse en m.

L'ellipse étant tracée, on portera sur des divergentes issues de z, de part et d'autre de cette courbe, des longueurs égales au déplacement $\omega'\omega'_2$ imprimé au cercle méridien du tore, pour former celui de la sphère auxiliaire. La figure indique la construction de deux, m_1, m_2, de ces points. Pour obtenir la projection verticale qui correspond à l'un d'eux, au point m_2 par exemple, on trace la projection horizontale du parallèle de la surface qui passe par M_2, et on prend sa rencontre μ_2, μ'_2 avec le méridien de front du tore, d'où l'on déduit la projection verticale $\mu'_2\mu'_3$ du parallèle. Une ligne de rappel menée par m_2 croise $\mu'_2\mu'_3$ au point m'_2. Finalement, nous connaissons les projections m_2, m'_2 d'un point quelconque de la courbe cherchée.

451. Tangente en un point de la courbe de contact. — La projection horizontale de la tangente s'obtient par la méthode du paragraphe **449**. Ayant déjà tracé la normale mc à l'ellipse en m, on mène en z la perpendiculaire au rayon vecteur zm et on prend sa rencontre N avec mc, rencontre qui détermine la seconde extrémité de la sous-normale zN commune pour les trois points m, m_1, m_2 à la courbe et à sa conchoïde; tirons alors les normales Nm_1, Nm_2 à la conchoïde, et menons-leur des perpendiculaires m_1t_1, m_2t_2, qui seront les projections horizontales des tangentes.

Une fois ces projections horizontales trouvées, rien n'est plus simple que d'obtenir les projections verticales correspondantes. Effectivement, pour déterminer la projection verticale de la tangente en m_2, m'_2 par exemple, on construit le plan tangent $P'_1\alpha P_1$, en μ'_2, μ_2, que l'on fait tourner autour de z, z', afin d'amener son contact μ'_2, μ_2 en m'_2, m_2. La trace horizontale P_1 se maintient tangente au cercle de centre z et de rayon égal à la distance zp_1 du centre à P_1; p_1 vient en p et P_1 en P.

La tangente cherchée étant dans le plan tangent en m_2, m'_2, sa trace horizontale sera sur P; et comme elle doit appartenir à mt_2, elle est à la rencontre θ, θ' de ces lignes; la projection verticale de la tangente sera donc la droite de jonction des points θ', m'_2.

452. Point sur le contour apparent. — On les obtient par la méthode générale (§ **443**). Pour le contour horizontal, on cherche les contacts d, e, f, g des tangentes menées à ce contour parallèlement à d, contacts que l'on a déterminés simplement sur l'épure par la rencontre du contour et de la perpendiculaire à d menée par z; les points ainsi tracés se relèvent en d', e', f', g'.

Quant aux points placés sur le contour apparent vertical, ils se trouvent à la rencontre des méridiens de ce contour et des perpendiculaires menées par leurs centres ω'_2, ω'_3 sur la direction d'; ce sont les points k', l', u', q'; ils ont pour projections horizontales correspondantes k, l, u, q.

453. Points sur le méridien de profil. — Le tracé général donne leurs projections horizontales en w_1, w_2, w_3, w_4.

Quant aux projections verticales correspondantes, il importe d'observer qu'elles doivent deux à deux se confondre et former seulement deux points inconnus w'_1, w'_2; effectivement, le cercle projeté en $s_1s_3s_2s_4$ n'a que deux points dans le plan de profil, et leurs correspondants sur le tore sont sur deux perpendiculaires à z, z', contenant chacune deux points de la courbe cherchée. Comme ces perpendiculaires à l'axe le sontaussi au plan vertical, elles ne donnent seulement que deux points sur

la projection verticale. Pour les construire, on opère en général sur les points correspondants de la projection horizontale comme on l'a fait pour le point quelconque m_2.

Il est un cas particulier que l'on rencontre fréquemment et pour lequel ce tracé devient fort simple : c'est celui où les droites d, d' s'inclinent de 45 degrés sur xy ; inclinaison que nous avons adoptée afin de donner plus d'intérêt à l'épure. Dans ce cas, la construction des points de contact sur le méridien de profil conduit à projeter d, d' sur le plan de ce méridien, et à mener au méridien des tangentes parallèles à cette projection, lesquelles, par leurs contacts, donnent les points cherchés. Or on voit facilement que la projection considérée de d, d' fait avec le plan horizontal un angle de 45 degrés, donc, si l'on rabat le méridien de profil sur celui du contour apparent, en entraînant cette projection, on trouvera pour cette dernière précisément d', et pour les contacts, q', k', l', u' ; c'est par conséquent aux rencontres de z' avec les droites $k'q'$, $l'u'$ que doivent être placés les points w'_1, w'_2 que nous cherchions.

454. Visibilité. — Pour régler, par exemple, la visibilité de la courbe $u'w'_2d'k'w'_1$ on détermine celle d'un point d' pris arbitrairement sur cette courbe, laquelle est indiquée par la position de la projection horizontale d ; en effet, d est en avant de la projection horizontale du méridien de front ; c'est donc un point visible sur le plan vertical. En revenant à la courbe, on en conclut qu'elle est visible de part et d'autre de d', jusqu'aux points k', u', placés sur le contour apparent vertical, et qu'elle devient ensuite cachée. Profitons des considérations qui précèdent pour insister sur ce point que la visibilité sur l'un des plans coordonnés se détermine en regardant surtout la projection sur *l'autre plan coordonné* de la ligne considérée, et du contour apparent relatif au plan de projection sur lequel on doit régler la visibilité.

CONE ET CYLINDRE CIRCONSCRITS AUX SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND DEGRÉ

455. Théorème. — *La courbe de contact d'une surface du second degré et d'un cône circonscrit est plane.* — Soient S le sommet du cône (fig j_6), Σ la surface considérée. Menons par S une divergente

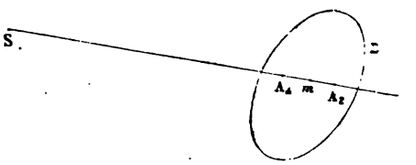


FIG. j_6.

quelconque qui coupe la surface en deux points A_1, A_2, et prenons le conjugué harmonique m du sommet S par rapport aux points de section A_1, A_2 ; on aura

$$\frac{SA_1}{SA_2} : \frac{mA_1}{mA_2} = -1$$

ou

$$(1) \qquad -\frac{mA_1}{mA_2} = \frac{SA_1}{SA_2} ;$$

il en faut conclure que, pour une divergente donnée, le second membre prend une seule valeur, et que, par suite, il existe sur chaque divergente un point m, et rien qu'un. Le degré du lieu de ce

point est donc égal au degré de multiplicité du point S augmenté de 1. Or, un point n'est jamais à lui-même son harmonique conjugué; donc le point S n'appartient pas au lieu du point m; ce dernier est donc du premier degré; c'est par conséquent un plan.

Démontrons que ce plan est celui de la courbe de contact du cône circonscrit dont S est le sommet. En effet, lorsque A_1 et A_2 se confondent sur une divergente, qui est alors tangente à la surface, la relation (1) devient

$$\frac{mA_1}{mA_2} = -1;$$

ce qui ne peut avoir lieu, eu égard au signe, que si m se confond avec les points A_1, A_2; par suite, le plan lieu du point m contient la courbe de contact; cette dernière est donc plane et du second degré.

La démonstration que nous venons d'indiquer est indépendante de la position du sommet; on en conclut qu'elle s'applique également au cylindre circonscrit.

456. Théorème. — *La projection d'une courbe du second degré faite sur un plan quelconque, et d'après un système également quelconque, est encore du second degré.* — Effectivement, toute sécante du plan de la courbe la rencontre en deux points, et cette propriété est projective.

457. Problème XII. — *Construire les projections de la courbe de contact d'une surface de révolution du second ordre et d'un cône circonscrit dont le sommet est donné.* — Prenons comme exemple l'ellipsoïde de révolution représenté sur la figure 316, pl. XXXI, par ses contours apparents, et cherchons sa courbe de contact avec le cône circonscrit dont le sommet se projette en s, s'.

Le plan conduit par l'axe z, z' et par le sommet s, s' est un plan de symétrie de la courbe de contact; par suite, la projection de cette dernière sur ce plan est rectiligne. Nous allons donc, pour simplifier sa construction, amener, à l'aide d'une rotation autour de z, z', le plan méridien qui passe par s, s' dans le plan de front conduit par l'axe; s, s' vient en s_1, s'_1. Tirons du point s'_1 des tangentes à l'ellipse méridienne donnée et traçons la polaire $a'_1b'_1$ de ce point, qui n'est rien autre chose que la projection verticale de la courbe de contact après son déplacement.

Pour construire les projections de la courbe dans sa position naturelle, cherchons les points qui correspondent à l'un μ' des points de la droite $b'_1a'_1$.

Le parallèle qui contient les points cherchés a pour projection verticale la parallèle $u'v'$ à la ligne de terre menée par μ'. Quant à sa projection horizontale, elle passe par celle u qui correspond à u'; c'est donc la circonférence décrite de z comme centre avec zu pour rayon. La corde des points projetés verticalement en μ' se trouve à une distance de l'axe égale à zp_1; et comme p_1 se place en p lorsqu'on revient à la position initiale de la figure, on voit que la perpendiculaire à zp menée par p est la projection horizontale de la droite de jonction des projections horizontales des points cherchés; ces projections horizontales sont donc à la rencontre m, n de cette perpendiculaire et de la projection de même nom du parallèle contenant le point choisi; leurs projections verticales se trouvent par conséquent aux points de rencontre m', n' de la projection verticale $u'v'$ du même parallèle et des lignes de rappel menées par m, n.

458. Tangente en un point de la courbe de contact. — Cette droite doit évidemment se trouver, et sur le plan tangent à la surface au point considéré, et sur le plan de la courbe; elle est donc la commune intersection de ces plans; la détermination des deux plans et de leur intersection conduit à un tracé un peu long. Donnons le moyen de le simplifier. Nous appuierons la construction de la tangente sur le théorème qui suit : *Lorsqu'on déplace le sommet du cône circonscrit à une surfac*

du second degré sur une droite tangente à cette surface, les courbes de contact se touchent là où la ligne des sommets touche elle-même la surface.

Soient une surface du second degré Σ (fig. j_7) et une droite D qui la touche en M. Prenons sur D un point S quelconque, et considérons la courbe de contact C de Σ et du cône circonscrit dont le sommet est en S. La tangente MT à C est la rencontre du plan tangent en M à Σ et du plan polaire de S par rapport à cette même surface Σ; autrement dit la tangente est la polaire de S par rapport à l'intersection de la surface Σ et de son plan tangent en M. Or l'intersection d'une surface du second degré par l'un de ses plans tangents est un système de deux droites, réelles ou imaginaires, se croisant au point de contact, qui en est, par suite, le centre; on en conclut que la polaire MT et la droite MS qui unit le centre au pôle sont deux diamètres conjugués de cette conique. Si alors nous rendons S mobile sur D, l'un des diamètres SM et la conique ne changeant pas, le conjugué MT de SM se conservera également; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Retournons au tracé de la tangente.

Tirons la droite de jonction du sommet s, s' au point m, m' dont on veut la tangente; prenons sa rencontre λ, λ' avec le plan du méridien principal, et construisons la projection verticale de la courbe

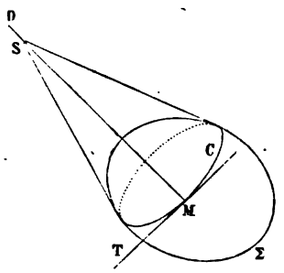


Fig. j_7.

de contact de l'ellipsoïde et du cône circonscrit dont λ, λ' est le sommet. Par suite de la symétrie, cette projection est rectiligne. D'un autre côté, par suite du théorème démontré plus haut, elle doit toucher en m' la projection verticale de la courbe étudiée; ce sera, par conséquent, la tangente cherchée.

Il faut donc prendre la polaire de λ' par rapport à l'ellipse méridienne; ce que l'on peut faire en tirant du point λ' deux tangentes à l'ellipse et en unissant par une droite les contacts. Le tracé ainsi fait manquerait de précision, la position des contacts n'y étant déterminée que d'une manière incertaine. Il est mieux de tirer par λ' deux divergentes quelconques $\lambda'\alpha\beta$, $\lambda'\delta\gamma$, d'unir par des droites les points α, γ et β, δ, et de prendre la rencontre ϵ de celles-ci. Le point ϵ est à la polaire et à la tangente cherchée; cette dernière s'obtient donc en traçant la droite $\epsilon m'$. On opère de même sur le plan horizontal, en construisant la polaire φm de la projection horizontale λ_1 du point de rencontre λ_1, λ'_1 de $sm, s'm'$ avec le plan de l'équateur.

459. Points sur les contours apparents. — Ces points, que l'on a déterminés par la méthode indiquée pour le cas général (§ **427**), sont : pour le contour vertical, (c', c), (d', d) ; pour le contour horizontal, (e, e'), (γ, γ').

460. Points le plus haut et le plus bas. — Ce sont ceux projetés après la rotation en (a_1, a'_1), (b_1, b'_1) et qui, remis en place, se projettent en (a, a'), (b, b') (§ **419**).

461. Projections des sommets. — La courbe est une ellipse qui, par suite de la symétrie déjà signalée, a deux de ses sommets projetés en (a, a'), (b, b'). Pour déterminer les deux autres, il suffit d'opérer sur le milieu o'_1 de la corde $a'_1 b'_1$, comme on l'a fait pour le point quelconque μ' de cette corde; on trouve ainsi les points (σ, σ'), (σ_1, σ'_1).

Les projections des deux axes d'une conique donnent en général deux diamètres conjugués de la projection : car, dans l'espace, chacun des axes divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, et cette propriété est projective lorsque le centre de projection est à l'infini.

Ainsi, en général, les projections des sommets ne sont pas les sommets des projections; pour qu'ils le soient, il faut et il suffit que l'un des axes de la courbe occupe une position parallèle au plan horizontal; car dans ce cas, et rien que dans ce cas, l'angle droit des axes se conserve en projection (§ **42** et **44**). En appliquant ces considérations à la présente question, on reconnaît immédiatement que les points a, b, σ, σ_1 sont les sommets de la projection horizontale, et que les points correspondants a', b', σ', σ'_1 sont les extrémités de deux diamètres conjugués de la projection verticale.

462. Problème XIII. — *Construire la trace horizontale d'un cône circonscrit à une surface de révolution du second degré.* — Tous les tracés établis pour le cas général (§ **428**) sont ici applicables.

Nous allons simplement indiquer la construction des sommets et des foyers de la courbe.

Démontrons ce théorème : *Les foyers d'une conique sont des cercles de rayons nuls bitangents à la conique, et qui la touchent aux points imaginaires de rencontre de la courbe et des directrices correspondantes.*

En désignant par α, β les coordonnés de l'un des foyers de la conique rapportée à un système d'axes rectangulaires, l'équation focale est celle-ci :

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+t)^2.$$

Coupons la courbe par un cercle de rayon quelconque R et dont le centre est au foyer considéré; l'équation du cercle s'écrit :

$$(2) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2,$$

et les coordonnés des points communs vérifient les équations (1) et (2).

Mais on peut remplacer (2) par la combinaison de (1) et de (2) qui suit :

$$(3) \qquad (mx+ny+t)^2=R^2;$$

or cette dernière représente un système de deux droites parallèles à la directrice, et, lorsque R devient nul, ce système se réduit à la droite double :

$$(mx+ny+t)^2=0,$$

qui n'est autre que la directrice elle-même. On en conclut que toute circonférence dont le centre est un des foyers d'une conique coupe celle-ci en quatre points placés sur deux parallèles à la directrice, et que, pour la circonférence de rayon nul, les quatre points se confondent deux à deux sur la directrice; cette circonférence touche donc la conique aux deux points imaginaires de rencontre de celle-ci et de la directrice correspondante.

Retournons au problème. Donnons-nous un ellipsoïde par son axe z, z' (*fig.* 317, pl. XXXI) et par son contour apparent en projection verticale ι'; soient, en outre, données les projections s, s' du sommet du cône circonscrit.

Appliquons la méthode des projections centrales : les divers parallèles projetés coniquement du

point s, s' sur le plan horizontal donneraient tous les cercles bitangents à la trace horizontale du cône; mais, parmi ces cercles, deux seulement ont des rayons nuls : ce sont ceux que l'on obtient en projetant les sommets (a', z), (a'_1, z) en F, F_1; on en conclut que ces points sont les foyers de l'ellipse cherchée.

Construisons les sommets de l'axe focal; ce sont les points de la courbe situés dans le plan conduit par z, z' et par s, s'; on les trouve par la méthode des sections. Pour cela, coupons l'ellipsoïde par le plan méridien conduit par s, s', et menons de ce point des tangentes à la section; en construisant les traces horizontales de ces tangentes nous aurons les sommets cherchés.

Pour déterminer ces tangentes, amenons le plan méridien sécant et le sommet du cône, par une rotation autour de z, z', sur le plan du méridien principal; s, s' vient en s_1, s'_1; tirons les tangentes à ε' du point s'_1, qui seront les projections verticales, après la rotation, de celles que nous cherchons; leurs projections horizontales seront sur s_1z, et leurs traces de même nom en α, α_1.

En revenant à la position primitive, α, α_1 décrivent, sur le plan horizontal, deux arcs de cercle et s'arrêtent en A, A_1, qui sont les sommets de l'axe focal ou du grand axe de l'ellipse.

Quant au petit axe, on l'obtient en plaçant le centre au milieu o de la droite FF_1, en élevant en ce point une perpendiculaire à cette droite, et en décrivant du point F comme centre avec le demi-grand axe Ao pour rayon, un arc de cercle dont les rencontres B, B_1 avec la perpendiculaire déjà menée par o sont les sommets du petit axe. On sait alors tracer la courbe.

463. Problème XIV. — *Construire les projections de la courbe de contact et la trace horizontale d'un cylindre circonscrit dans une direction donnée, à une surface de révolution du second degré.* — Nous prendrons comme exemple l'ellipsoïde repésenté sur la figure 318, pl. XXXI. Soient d, d' les projections de la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le centre de la surface. La solution du présent problème est en tout semblable à celles des deux précédents. Nous allons simplement rappeler les divers tracés.

A l'aide d'une rotation autour de z, z', amenons d, d' en d_1, d'_1, sur le plan méridien principal, et traçons le diamètre $g'_1i'_1$, qui unit les contacts des tangentes menées, dans la direction d'_1, à l'ellipse donnée. Ce diamètre est le conjugué de d'_1 dans l'ellipse méridienne, et représente la projection verticale de la courbe de contact après la rotation. En revenant à la position primitive, on construira les sommets g, f, i, c de la projection horizontale de l'ellipse cherchée, et deux diamètres conjugués $c'f'$, $g'i'$ de l'autre projection de cette courbe.

En ce qui concerne la trace horizontale du cylindre circonscrit, les foyers F, F_1 sont les projections obliques faites dans la direction d, d' des parallèles de rayon nul (m', z), (n', z); la trace ω de d, d' en est le centre. Le petit axe $\gamma\varphi$ est une perpendiculaire menée de ω à FF_1, qu'on doit limiter en portant $\gamma\omega = \varphi\omega = zf$. Enfin, le demi-grand axe a pour longueur γF_1; en portant cette longueur sur FF_1, de part et d'autre du centre ω, on trouve les sommets s, s_1 du grand axe. La courbe se trace alors très aisément.

464. Problème XV. — *Construire les contours apparents sur les deux plans coordonnés d'une surface de révolution quelconque.* — Ce problème n'est autre que celui de construire les projections de la courbe de contact de la surface et des cylindres circonscrits perpendiculaires, soit au plan vertical, soit au plan horizontal; il ne peut donc offrir aucune difficulté après les explications que l'on vient de donner.

L'un des moyens commodes pour trouver ces contours consiste à considérer la surface comme l'enveloppe d'une sphère variable, à construire les contours apparents de cette sphère sur chacun des plans coordonnés, et à prendre leurs enveloppes (§ 395bis) : les enveloppées mobiles que l'on doit tracer sont circulaires et se construisent assez facilement.

Nous allons bientôt appliquer ce procédé à un tore dont l'axe sera quelconque. Mais, antérieurement, il importe d'exposer quelques généralités.

465. Développée. — Développante. — L'enveloppe des normales aux divers points d'une courbe porte le nom de *développée* de cette courbe. Ainsi, en menant des normales aux divers points de A (fig. j_7), et en prenant l'enveloppe de ces lignes, on trouve la courbe B qui est la développée

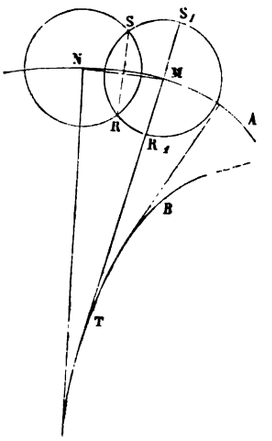


FIG. j_7.

de A. La courbe A porte le nom de *développante* de B. On démontre que la développante peut être engendrée par un point d'une droite qui roule sans glisser en restant tangente à la développée.

466. Une courbe offre plusieurs développantes. — En effet, cherchons l'enveloppe d'un cercle dont le rayon est constant et dont le centre décrit A (fig. j_7). Soient M, N deux positions voisines de ce dernier, RS la corde commune aux deux enveloppées correspondantes, MN la ligne des centres; MN et RS sont perpendiculaires. Déplaçons la circonférence de centre N en la rapprochant indéfiniment de celle dont le centre est M; les limites de R et de S seront des points de l'enveloppe cherchée; et comme MN tend à devenir tangente à la courbe A, la corde RS tendra vers la normale MT, et les points R, S se placeront à la limite aux points de croisement R_1, S_1 du cercle fixe avec la normale MT. Or l'enveloppe est tangente à ses enveloppées; donc la droite MT est normale à l'enveloppe; par suite, la courbe B est la développée de l'enveloppe du cercle mobile; cette enveloppe donne donc deux développantes de B.

En changeant le rayon du cercle, on trouve pour chaque valeur de ce dernier deux développantes; il y a donc une infinité.

On exprime encore la propriété qui vient d'être démontrée, en disant : *L'enveloppe des cercles dont le rayon est constant et dont le centre décrit une courbe, est un système de deux développantes de la développée de cette courbe.*

467. *La développante offre un point de rebroussement là où elle rencontre sa développée.* — Soient α (fig. j_8) une courbe quelconque, β l'une de ses développées et M la rencontre des deux courbes. Les tangentes menées à α par des points voisins de M sont, en admettant que ce point M ne soit ni un point d'inflexion ni un point singulier, entièrement placées d'un même côté de α; il en est donc de même de la courbe β dans le voisinage de M, puisque les points de celle-ci sont sur les tangentes. D'autre part,

la tangente MT menée par M à β est normale à α et traverse cette dernière; d'ailleurs, β, qui a un de ses points en M sur MT, ne saurait en offrir un au delà de α; il faut donc bien qu'elle ait un point de rebroussement en M.

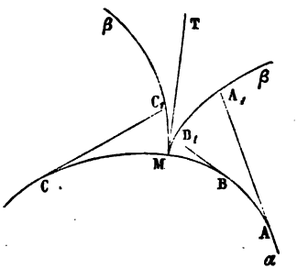


Fig. j_8.

468. Problème XVI. — *Représenter par ses contours apparents un tore dont l'axe est quelconque.* — On tracera les projections de la circonférence décrite, dans la rotation, par le centre du cercle qui engendre le tore : ces projections seront des ellipses, que l'on déterminera par la méthode des paragraphes **136** et suivants. En considérant le tore comme l'enveloppe d'une sphère de rayon constant et égal à celui du cercle générateur, l'enveloppe des projections des contours apparents de ces sphères donnera les deux contours cherchés. Or les projections de ces contours apparents sont des cercles égaux dont les centres se trouvent sur les deux ellipses primitivement tracées; ce

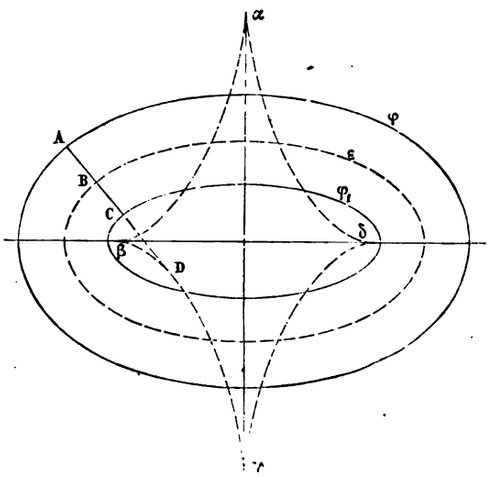


Fig. j_9.

qui conduit à la proposition suivante : *Sur les deux plans de projection, les contours apparents d'un tore placé dans une position quelconque sont des développantes de la développée d'une ellipse.*

Cherchons les diverses formes que peuvent offrir ces contours. La géométrie analytique donne le moyen de trouver l'équation et la forme de la développée d'une ellipse. Représentons, sur les trois figures qui suivent, l'ellipse ε que donne la projection du cercle décrit par le centre du méridien de la surface. Construisons ensuite, en menant des normales à ces ellipses et en prenant

leur enveloppe, les développées α, β, γ, δ de ces courbes; ces développées offrent (le calcul ou le tracé le montre) quatre points de rebroussement placés deux à deux sur les axes des ellipses, et que l'on peut déterminer par la construction du paragraphe 138, vu que ces points ne sont rien autre chose que les centres des cercles osculateurs aux sommets des ellipses. Considérons ensuite une normale quelconque BD à l'ellipse ε. Soit B sa rencontre avec ε et D son point de contact sur la développée; lorsque la normale se déplace, le segment BD a pour valeur minimum le rayon du cercle osculateur aux sommets du grand axe, et pour valeur maximum le rayon du cercle osculateur aux sommets du petit axe. Cela dit, portons de part et d'autre de B des longueurs AB, BC égales au rayon du cercle générateur, et opérons de même pour chaque position de la normale. En unissant par une courbe les points ainsi déterminés, nous trouverons pour le contour apparent cherché l'une des courbes indiquées sur les trois figures ci-jointes.

Dans chacune des figures le contour apparent en projection est formé de deux courbes φ, φ_1; on a dessiné en plein les parties réelles de ce contour, et en points ronds leurs parties virtuelles. C'est dans

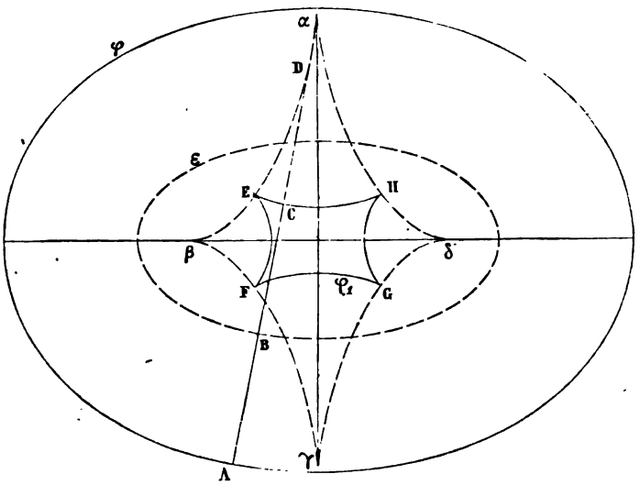


Fig. j_{10}.

l'espace compris entre les parties dessinées en plein de φ est de φ_1 que se projette la surface du tore.

Dans la figure j_9, la longueur des droites AB, BC est supposée moindre que la valeur minimum de BD; par suite, le contour apparent ne rencontre pas normalement sa développée $\alpha\beta\gamma\delta$; il n'offre donc aucun point de rebroussement et se compose de deux courbes φ, φ_1 ayant une forme analogue, à celle de l'ellipse donnée. Sur la figure j_{10} la longueur des droites AB, BC est comprise entre le demi-petit axe de l'ellipse et la valeur maximum de BD; la courbe φ_1 rencontre alors normalement sa développée en quatre points E, F, G, H, qui sont par suite des points de rebroussement du contour apparent. Enfin sur la figure k_1 la longueur des droites AB, BC est comprise entre la valeur minimum de BD et le demi-petit axe de l'ellipse; alors non seulement les quatre points de rebroussement précédemment indiqués se produisent, mais encore la courbe φ_1 offre deux points doubles K, L. Effectivement, d'une part, les longueurs des segments des normales à l'ellipse compris entre la courbe et son grand axe varient depuis celle du rayon du cercle osculateur au sommet du grand axe, jusqu'à celle du demi-petit axe; d'autre part, d'après l'hypothèse même, la distance BC est comprise

entre les mêmes limites. Il y aura donc sur le grand axe deux points en lesquels, par suite de la symétrie de la figure, la courbe φ_1 passera deux fois; c'est là ce qu'il fallait établir. Remarquons encore que les points de rebroussement correspondent aux rayons visuels tangents dans l'espace au contour apparent (§ 430), et que les points doubles L, K correspondent à des rayons visuels bitangents au tore (§ 378). Le tracé de ces derniers sera indiqué parmi les exercices du présent chapitre. Il est presque superflu d'ajouter que, pour des valeurs de AB supérieures au maximum de BD, les courbes φ, φ_1 prennent encore une forme analogue à celle de l'ellipse.

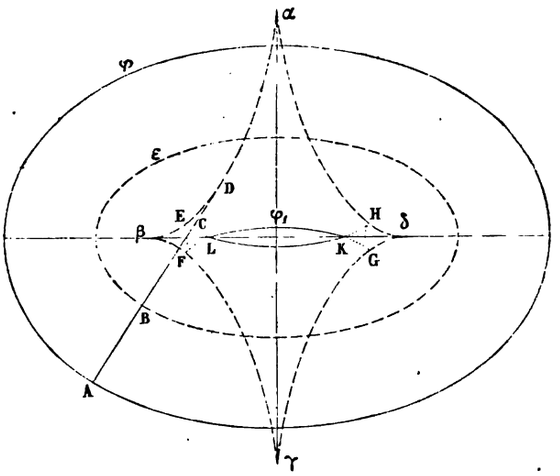


Fig. k.

469. Problème XVII. — *Représenter par ses contours apparents une surface de révolution dont l'axe est une droite de front.* — Soient z, z' l'axe de front (*fig.* 319, pl. XXXI) et μ', μ'_1 la projection verticale du méridien principal.

Le contour apparent en projection verticale n'est autre que l'ensemble des courbes μ', μ'_1 (§ 390).

Cherchons, par la méthode des enveloppées sphériques, le contour apparent en projection horizontale. Adoptons un parallèle quelconque projeté verticalement en $a'b'$, et construisons le point de la courbe cherchée qu'il contient; l'enveloppée sphérique touchant la surface de révolution par le parallèle choisi a l'une des projections de son centre au pied ω' de la normale à μ', menée par b', et l'autre projection de ce centre au point de rencontre ω de z avec la ligne de rappel issue de ω'; d'autre part, le rayon de l'enveloppée dans sa véritable grandeur est $\omega'b'$.

Le contour apparent en projection horizontale de la sphère est la circonférence cd décrite du point ω comme centre avec $\omega'b'$ pour rayon; la projection verticale correspondante se trouve sur la parallèle $c'd'$ à la ligne de terre menée par ω', parallèle que l'on peut limiter aux lignes de rappel des points c, d; la rencontre m' de la projection verticale de la caractéristique et de celle $c'd'$ sur le même plan de projection du contour apparent horizontal est l'une des projections de deux points de la courbe cherchée (§ 394); par suite, la ligne de rappel menée par m' détermine en ses croisements avec le cercle cd deux points m_1, m_2 du contour apparent en projection horizontale de la surface. Ce contour doit toucher celui de la sphère; conséquemment, la tangente au contour en m_1 n'est autre que celle t menée en ce même point au cercle cd.

470. Problème XVIII. — *Connaissant l'axe et le rayon d'un cylindre de révolution, construire, sur les deux plans coordonnés, les contours apparents et les traces de cette surface.*—Soient z, z' les projections de l'axe (*fig.* 320, pl. XXXII). Inscrivons dans le cylindre cherché une sphère ayant son centre en un point quelconque c_1c' de cet axe; son rayon sera égal à celui du cylindre, et, sur les deux plans de projection, le contour apparent du cylindre sera donné par des parallèles à z ou à z' qui devront être tangentes à l'un des contours apparents de la sphère et que l'on construira, par suite, très facilement.

En ce qui concerne les traces, comme le cylindre est circonscrit à l'enveloppée sphérique, on peut appliquer la construction du paragraphe **463**. Projetons dans la direction des génératrices du cylindre, en F_1, F, les points (b', b), (a', a) le plus haut et le plus bas de la sphère, afin d'obtenir les foyers de la trace horizontale; par le milieu o de FF_1, qui est aussi la trace horizontale de z, z', menons une perpendiculaire à l'axe focal et portons-y, de part et d'autre du centre, le rayon du cylindre, ce qui donne les sommets s, s_1 du petit axe de la trace horizontale. Tirons la droite qui va de s_1 à F_1, afin d'obtenir la longueur s_1F_1 du demi-grand axe de cette même trace, et reportons-la en os_2, os_3; nous trouverons ainsi les sommets s_2, s_3 de l'axe focal. Le tracé de l'ellipse se terminera par l'une des méthodes connues.

On opère pareillement pour construire la trace verticale.

471. Problème XIX. — *Connaissant l'axe z, z' d'un cône, son sommet s, s' et son angle générateur α, construire sur les deux plans coordonnés les contours apparents et les traces de la surface* (*fig.* 321, pl. XXXII). — Mettons en évidence l'angle générateur dans sa véritable grandeur, en rendant, par une rotation autour de la verticale du point s, s', l'axe z, z' parallèle au plan vertical; la trace horizontale θ, θ' de cet axe vient en θ_1, θ'_1; s, s' ne bouge pas; les nouvelles projections de l'axe sont donc $s\theta_1$, $s'\theta'_1$.

Dans la présente position de la figure, l'une des génératrices de front du cône déplacé a pour projection verticale la droite $s'g'_1$, qui s'incline de l'angle donné α sur la droite $s'\theta'_1$. D'un point c'_1, pris arbitrairement sur cette dernière, menons une perpendiculaire $c'_1a'_1$ à $s'g'_1$; le point c'_1 est la projection verticale du centre d'une enveloppée sphérique du cône déplacé, et $c'_1a'_1$ en est le rayon dans sa véritable grandeur. Revenons à la position naturelle; c'_1 se projette verticalement à la rencontre c' de la parallèle à la ligne de terre menée par ce point c'_1 et de la droite $s'\theta'$; la projection horizontale correspondante se trouve au croisement c de $s\theta$ et de la ligne de rappel du point c'. En décrivant ensuite deux circonférences des points c, c' respectivement pris pour centre, avec la même ouverture de compas égale à $c'_1a'_1$ pour rayon, on trouve les contours apparents sur les deux plans de projection d'une enveloppée sphérique. La question s'achève en tirant de chacun des points s, s' des couples de tangentes aux circonférences que nous venons de déterminer.

Quant aux traces du cône, on les trouverait par la méthode du paragraphe **462**, en remplaçant l'ellipsoïde de l'épure correspondante (*fig.* 317, pl. XXXI) par la sphère inscrite de centre c, c'.

472. Problème XX. — *Mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à un plan donné.*— La tangence équivaut à une condition, le parallélisme à deux; le problème est donc possible et déterminé.

Soient z, z' les projections de l'axe (*fig.* 322, pl. XXXII), μ' celle sur le plan vertical du méridien de front et $P_\alpha P'$ les traces du plan donné.

Faisons en sorte que les plans tangents cherchés aient leurs contacts sur le contour apparent vertical de la surface; il suffit pour cela de faire tourner la figure autour de z, z', en l'arrêtant lorsque $P_\alpha P'$ sera perpendiculaire au plan vertical. Mais comme ce plan n'influe que par sa direction et nullement par sa position, il est plus simple de le faire tourner autour d'un axe z'_1, z_1 placé sur le

plan vertical et parallèle au premier, en l'arrêtant toujours sur l'une de ses positions perpendiculaires au plan vertical. Dans ce mouvement, la trace horizontale du plan se maintient tangente au cercle de centre z_1 et de rayon égal à $z_1 p$; elle s'arrête donc lorsque $z_1 p$ se place sur xy en $z_1 p_1$; d'autre part, la rencontre v' de l'axe et du plan reste immobile; par conséquent, la nouvelle trace verticale de ce plan est sur $v'p_1$.

Le plan tangent cherché a pour trace verticale la tangente Q'_1, menée dans la direction $v'p_1$, à μ'; sa trace horizontale est Q_1. Revenons sur la position primitive. θ_1 vient en θ; la parallèle Q menée de ce point à P n'est autre que la trace horizontale du plan tangent cherché; elle donne, par sa rencontre β avec xy, un point de la trace verticale; alors, en tirant de ce point β la parallèle Q' à P', on a la seconde trace du plan qu'il fallait construire. Le problème admet une seconde solution, qui se construirait pareillement.

473. Problème XXI. — *Mener, parallèlement à une droite donnée, une normale à une surface de révolution.* — Soient z, z' l'axe de la surface (*fig.* 323, pl. XXXII), μ' la projection verticale du méridien principal, et $s'\theta'$, $z\theta$ la direction de la normale. Rendons, par une rotation autour de z, z', la droite donnée parallèle au plan vertical. s', z ne bouge pas; θ, θ' se place en θ_1, θ'_1; de la connaissance de deux points de passage de la droite cherchée résulte celle de la droite elle-même $z\theta$, $z'\theta'_1$.

En menant la droite t' perpendiculaire à $s'\theta'_1$ et tangente à μ', on a, par son contact m'_1, la projection verticale du pied de la normale après la rotation; on en déduit la projection horizontale m_1 correspondante.

Après avoir ramené la figure dans sa position initiale, on trouve : pour le pied de la normale, le point m, m', et pour la normale elle-même, la parallèle $m'n'$, mn à $s'\theta'$, $z\theta$ menée, par m, m'. Le présent problème pourrait servir à la résolution du précédent.

474. Problème XXII. — *Conduire, par une droite donnée, un plan tangent à une surface de révolution quelconque.* — La tangence équivaut à une condition, la droite de passage à deux; le problème est donc possible et déterminé.

Soient Σ la surface (fig. k_2) et D la droite donnée. Plaçons dans deux positions arbitraires les points S, S_1 sur D et construisons les courbes de contact C, C_1 des cônes circonscrits à Σ, qui ont

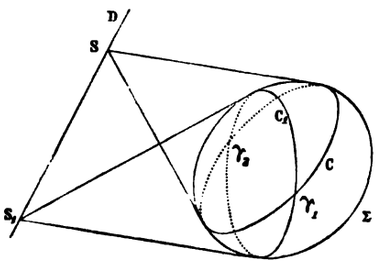


FIG. k_2.

leurs sommets respectifs en ces points; aux croisements γ_1, γ_2 des courbes C, C_1 on trouve les contacts des plans tangents cherchés. Ces plans sont dès lors déterminés par la droite D qu'ils ont en commun, et par leurs points de contact γ_1 ou γ_2. L'un des sommets des cônes peut être rejeté à l'infini; on pourra donc combiner un cône et un cylindre, comme on a combiné deux cônes.

Enfin le problème peut encore être résolu en conduisant par D un plan tangent à un cône circonscrit à la surface et dont le sommet serait sur D, ou à un cylindre, également circonscrit à la

surface, et dont les génératrices seraient parallèles à D. Cette solution exige, comme les premières, que l'on trace deux courbes auxiliaires, vu que le cône circonscrit à Σ touche celle-ci par une courbe non plane c, et qu'il faut alors, pour lui mener un plan tangent par D, construire l'une des projections d'une courbe plane tracée sur la surface de ce cône. Il est vrai que l'on peut se borner à déterminer la rencontre du cône circonscrit et du plan horizontal de projection, par exemple, sans tracer la courbe de contact c; mais cette construction doit toujours être précédée de celle des points de la courbe de contact, ce qui la rend fort pénible. Quelle que soit la solution employée, on peut la simplifier, en ne traçant, dans le voisinage des points de contact, que de faibles parties des courbes qui les déterminent. Mais, de toute façon, les constructions que nous indiquons sont, dans le cas général, longues à exécuter; on doit leur préférer celle qui sera indiquée à la fin du chapitre v.

475. Théorème de Monge. — *Lorsque deux surfaces du second degré se touchent en deux points communs, elles se coupent suivant deux courbes planes, dont les plans passent par la droite de jonction des deux points de contact.* — Soient P, Q (fig. k_3) les plans tangents communs aux deux surfaces et C, C_1

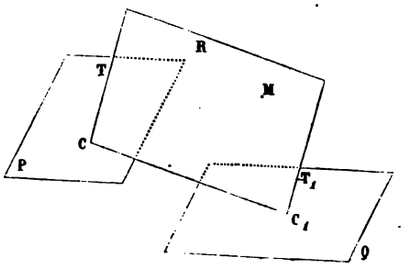


Fig. k_3.

leurs points de contact. Prenons un point quelconque M de la commune intersection des deux surfaces et conduisons un plan R par les points M, C, C_1; ce plan coupe les deux surfaces suivant deux coniques qui passent par ces mêmes points, et les plans tangents communs, suivant des tangentes CT, C_1T_1 communes aux deux coniques; ces coniques sont donc assujetties à passer par cinq points, à savoir : un simple point M, deux points confondus en C et deux autres en C_1, également confondus. Or, par cinq points on peut faire passer une conique, et rien qu'une; les deux coniques se confondent donc.

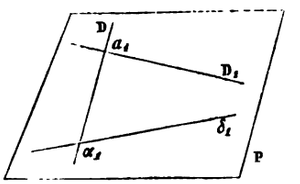


Fig. k_4.

Il en résulte que l'intersection comprend déjà une courbe du second degré dont le plan passe par la corde CC_1; et comme cette intersection complète est du quatrième degré, il faut qu'il y ait une autre courbe de rencontre également du second degré, laquelle passera évidemment, comme la première et pour le même motif, par la corde CC_1.

Le théorème de Monge tombe en défaut lorsque la droite CC_1 est commune aux deux surfaces. En effet, soit D une droite commune à deux surfaces du second degré (fig. k_4); conduisons par D un

plan quelconque P; il coupe la première surface suivant une conique dont D fait partie; il s'ensuit que cette intersection est formée de deux droites D, D_1 se coupant elles-mêmes en un point a_1. Pareillement la seconde surface sera coupée par P suivant deux droites D, d_1 ayant en commun un point α_1. Le plan P touchera donc la première surface en a_1, la seconde en α_1. En coupant par un second plan conduit encore par D, on trouvera sur la première surface deux droites D, D_2 se rencontrant en un point a_2, que je dis être distinct de a_1. Effectivement, pour que D_2 vînt passer par a_1, il faudrait que les droites D, D_1, D_2, qui sont à elles-mêmes leurs propres tangentes, fussent dans un même plan tangent en a_1 à la surface correspondante, plan qui devrait couper celle-ci suivant trois droites, ce qui est impossible, attendu que l'intersection doit être du second degré.

D'après cela, à tout point de contact a_1 sur l'une des surfaces d'un plan P conduit par D, correspond un point de contact α_1 du même plan P avec la seconde surface, et rien qu'un, et réciproquement; il suit de là que les points de contact a_1, a_2, etc.; α_1, α_2, etc., obtenus sur les deux surfaces en faisant tourner le plan P autour de D, forment deux divisions homographiques de même base; et comme ces divisions ont deux points doubles, il faut en conclure que les surfaces se toucheront en deux points de D.

Ainsi *deux surfaces du second ordre qui ont une génératrice commune, et dont l'intersection est par suite formée de la génératrice et d'une courbe du troisième degré, ont deux plans tangents communs en deux points également communs de la génératrice;* le théorème de *Monge* tombe donc en défaut dans le cas qui vient d'être signalé. Quant à la démonstration, elle devient elle-même fautive, attendu que, dans l'hypothèse de deux surfaces du second degré ayant en commun la droite CC_1, le plan R (fig. k_3) déterminerait : 1° sur l'une des surfaces, la droite CC_1 et une seconde droite passant par M; 2° sur l'autre, toujours la droite CC_1, avec une troisième droite passant encore par M; ces deux intersections ne formeraient donc pas, comme dans le cas général, deux coniques confondues. La démonstration cesse donc son effet dans le cas particulier qui nous occupe.

476. Corollaire I. — *Lorsque deux surfaces du second degré sont circonscrites à une troisième, leur commune intersection est un système de deux courbes planes, dont les plans passent par la rencontre de ceux des courbes de contact.* — Dans ce cas les deux courbes de contact seront tracées sur une même surface et se couperont, par suite, en deux points réels ou imaginaires, lesquels seront communs aux surfaces circonscrites, et en ces points les trois surfaces considérées auront le même plan tangent; le théorème de Monge leur sera donc applicable; ce qui justifie l'énoncé.

Le corollaire que nous venons d'établir conduit très simplement à la propriété qui suit :

477. Corollaire II. — *Lorsque deux cônes sont circonscrits à une même surface du second degré, leur commune intersection est un système de deux courbes planes dont les plans passent par la droite commune à ceux des courbes de contact.* — Effectivement, les courbes de contact sont planes (§ **455**) et du second degré; les cônes sont donc aussi du second degré, et, par suite, le corollaire précédent est ici applicable, ce qui démontre la propriété énoncée.

478. Problème XXIII. — *Conduire par une droite donnée un plan tangent à une surface de révolution du second degré.*

1° Ellipsoïde et hyperboloïde à une nappe. — Prenons, comme exemple, l'ellipsoïde représenté sur la figure 324, pl. XXXII, et soient d, d' les projections de la droite donnée. Nous conduirons par un point de d, d', un cône circonscrit à l'ellipsoïde, et nous lui mènerons un plan tangent par cette droite d, d'. Adoptons pour sommet la rencontre s, s' de la droite donnée et du plan de front conduit par l'axe z, z' de la surface, et figurons ce cône auxiliaire par son contour apparent vertical,

que l'on obtient en menant du point s' des tangentes à l'ellipse tracée sur l'épure. Il faut couper le cône par un plan choisi, en vue de rendre plus facile la construction des projections de la section.

Pour ce but, prenons la rencontre du cône circonscrit et du cylindre vertical projetant de l'équateur; ces deux surfaces sont circonscrites à la surface de révolution; elles s'entrecoupent donc suivant deux courbes planes, dont les plans passent par la rencontre des courbes de contact (§477); or ces dernières se projettent verticalement suivant $a'b'$, $c'f'$, et la rencontre de leurs plans est une perpendiculaire au plan vertical mené par le point de croisement β' de ces droites; les plans des courbes d'intersection sont donc également perpendiculaires au plan vertical; ces courbes ont par suite des projections verticales rectilignes. D'autre part, les rencontres t', q', p', r' des lignes des contours apparents verticaux des surfaces circonscrites font partie de la projection verticale de l'intersection cherchée; conséquemment, cette projection verticale se fait suivant les droites $t'q'$, $r'p'$, qui doivent, si l'épure est exactement faite, passer par β'.

Quant aux projections horizontales des lignes de rencontre, elles sont sur la base du cylindre circonscrit, c'est-à-dire sur la projection horizontale de l'équateur.

Nous avons ainsi tracé sur le cône deux courbes ($p'r'$, $ambn$), ($t'q'$, $amon$) *à projections droite et circulaire.*

Rien n'est plus simple que d'achever la question; adoptons pour plan de base du cône celui conduit par $r'p'$ perpendiculairement au plan vertical; sa rencontre avec d, d' est en o, o'; on mène par o des tangentes t_1, t_2 au cercle $amon$ qui sont les projections horizontales de deux droites des plans tangents; les projections verticales correspondantes t'_1, t'_2 se confondent sur $r'p'$.

Les tangentes à la base du cône sont donc projetées suivant (t_1, t'_1), (t_2, t'_2); en adjoignant à chacune d'elles la droite d, d', on trouve deux couples de droites qui déterminent les deux plans tangents qu'il fallait construire.

La solution qui vient d'être donnée s'applique mot pour mot à la sphère, à l'ellipsoïde à trois axes inégaux et à l'hyperboloïde à une nappe quelconque ou de révolution, indifféremment.

479. 2° Hyperboloïde de révolution à deux nappes. — Soient (*fig.* 325, pl. XXXII) : z, z' les projections de l'axe, H', H'$_1$ celles sur le plan vertical de l'hyperbole méridienne, et d, d' celles de la droite donnée.

Déterminons la trace horizontale d'un cylindre parallèle à d, d' et circonscrit à l'hyperboloïde; les projections obliques faites dans la direction d, d' des parallèles de rayon nul (s', z), (s'_1, z) donnent les foyers F, F$_1$ de la trace. On construira ensuite une des génératrices du contour apparent vertical du cylindre circonscrit : sa projection verticale $c't'$ est tangente à H', par exemple, et parallèle à d'; son contact C a pour projection horizontale c, et la parallèle ct à d, menée par c, donne la seconde projection de la tangente. La trace horizontale m de cette tangente est à la trace de même nom du cylindre circonscrit. Cette trace est une hyperbole dont les foyers sont F, F$_1$ et dont un point se trouve en m; pour la déterminer plus commodément, tirons les droites mF, mF$_1$ et construisons leur différence F$_1\varphi$, ce qui donne la longueur de l'axe transverse; en prenant le milieu o de FF$_1$ on a le centre, et en portant de part et d'autre de ce point, sur FF$_1$, la longueur du demi-axe transverse, on a les sommets A, A$_1$ de cet axe.

Pour conduire par d, d' des plans tangents au cylindre circonscrit, on prendra la trace θ de d, d' et on mènera par ce point, sans construire la courbe, des tangentes à l'hyperbole déterminées par les foyers F, F$_1$ et par les sommets de l'axe focal A, A$_1$.

480. 3° Paraboloïde de révolution. — Démontrons ce théorème. *Toute section elliptique du paraboloïde de révolution se projette, sur un plan perpendiculaire à l'axe, suivant un cercle.*

Prenons pour axe des z celui de la surface, pour origine le sommet, et adoptons des axes rectangulaires.

L'équation du paraboloïde de révolution est alors :

$$x^2 + y^2 - 2pz = o \tag{1}$$

les sections elliptiques sont données par des plans non parallèles à z, dont les équations contiennent par suite la coordonnée z et peuvent prendre la forme

$$z = ax + by + c; \tag{2}$$

pour obtenir l'équation de la projection de l'intersection sur le plan xoy, éliminons z entre (1) et (2), nous aurons :

$$x^2 + y^2 - 2p(ax + by + c) = o,$$

qui est bien l'équation d'un cercle.

Exécution de l'épure. — On peut encore employer un cône circonscrit ayant une base à *projections droite et circulaire*.

Effectivement, soient : z, z' les projections de l'axe (fig. 326, pl. XXXII), p, p' celles de la parabole méridienne principale, et d, d' celles de la droite donnée. Prenons la rencontre s, s' de d, d' avec le plan de front conduit par z, z', et circonscrivons au paraboloïde un cône de sommet s, s'; en tirant des tangentes à p' du point s' et en unissant les contacts, que l'on sait déterminer avec précision, on a la projection verticale $u'v'$ de la courbe de contact. Cette droite $u'v'$ est la polaire du point s'; et comme le pôle est à distance finie de la courbe, sa polaire n'est pas parallèle à l'axe z, z'; on en conclut que la courbe de contact est une ellipse, et que, par suite, sa projection horizontale est circulaire.

Pour construire ce cercle on prend les projections horizontales u, v correspondantes à u', v', et, d'après la symétrie de la figure relativement au plan de front conduit par l'axe, on peut dire que uv est un diamètre du cercle, ce qui permet de le tracer.

Nous avons ainsi en uv, $u'v'$ les projections droite et circulaire d'une base du cône circonscrit. En prenant la rencontre m, m' du plan de base avec d, d' et en tirant du point m des tangentes mt_1, mt_2 au cercle du plan horizontal, on a les projections horizontales de deux droites placées dans les plans tangents cherchés; les projections verticales correspondantes $m't'_1$, $m't'_2$ sont confondues sur la polaire $u'v'$.

Le problème offre donc deux solutions, déterminées par la droite commune d, d', à laquelle il faut adjoindre mt_1, $m't'_1$, ou mt_2, $m't'_2$.

481. Problème XXIV. — *Conduire par un point donné un plan tangent commun à deux surfaces de révolution.* — Le problème est possible, car les tangences donnent deux conditions et le point extérieur donne la troisième.

En prenant pour sommet commun le point donné, on circonscrit à chaque surface un cône, puis on construit des plans tangents communs aux deux cônes (§ **361**) : problème qui est possible, puisque les cônes ont un sommet commun.

482. Les surfaces données sont homothétiques. — Les deux surfaces ont un cône circonscrit commun dont le sommet est au centre de similitude; on conduit alors simplement par le point extérieur des plans tangents à ce cône.

483. Les deux surfaces sont deux sphères. — Deux sphères sont toujours homothétiques; on peut par suite appliquer au présent cas la solution du précédent paragraphe. Donnons-nous les sphères par leurs contours apparents (γ, γ'), (γ_1, γ'_1) sur les deux plans coordonnés (*fig.* 327, pl. XXXIII), et le point par ses projections m, m'. Pour construire les centres de similitude, on

les considère comme placés aux sommets de deux cônes circonscrits aux sphères, sommets qui pourraient s'obtenir très aisément en construisant les projections des génératrices de contour apparent des cônes. Ces projections devant être tangentes (§ **395** *bis*) aux contours des sphères; d'autre part, les sommets devant appartenir à la ligne des centres $o'o'_1$, oo_1 on trouvera la projection verticale de l'un d'eux par la rencontre s' de la droite $o'o'_1$ et de l'une des tangentes communes aux contours apparents en projection verticale des sphères. Quant à la projection horizontale du sommet, elle est placée à la rencontre s de la droite oo_1 et de la ligne de rappel menée par s'. Opérons sur le centre de similitude s, s' : le plan tangent correspondant passe par la droite de jonction des points (m, m'), (s, s'); traçons-la, et menons par cette droite un plan tangent à l'une des sphères, par exemple à la sphère de centre o, o' (§ **478**).

La droite ms, $m's'$ rencontre le plan de front conduit par o, o' au point σ, σ'; par ce point circonscrivons un cône à la sphère; les génératrices du contour apparent vertical de ce cône sont les tangentes issues de σ' et menées au cercle dont le centre est o'.

Prenons la rencontre du cône dont le sommet est σ, σ' et du cylindre vertical circonscrit à la sphère : c'est une courbe à projections droite et circulaire dont les projections sont $p'q'$ et le cercle γ. La rencontre du plan de cette courbe avec $m'\sigma'$, $m\sigma$ se fait en u', u; en tirant de ce point des tangentes (t_1, t'_1), (t_2, t'_2) à la courbe et en adjoignant à chacune de ces tangentes la droite $m'\sigma'$, $m\sigma$, on a deux couples de droites qui déterminent deux solutions du problème. Le centre de similitude directe donnerait deux autres solutions.

484. Problème XXV. — *Mener* [redacted] *un plan tangent commun à une surface de révolution et à un cône.* — La tangence au cône équivaut à deux conditions; celle à la surface de révolution à une : ce qui donne bien les trois conditions nécessaires et suffisantes à la détermination du plan cherché.

On conduit un cône auxiliaire de même sommet que le cône donné et circonscrit à la surface de révolution; il reste ensuite, comme dans le problème précédent, à construire le plan tangent commun à deux cônes de même sommet.

485. Comme cas particulier intéressant du présent problème, nous traiterons celui de la recherche du plan *tangent commun à une sphère et à un cône de révolution.*

Première solution. — On inscrit dans le cône une sphère égale à celle donnée, et l'on mène par le sommet du cône des plans tangents communs aux sphères (§ **483**) : les centres de similitude des sphères sont alors le milieu de la droite de jonction des centres de ces surfaces et le point à l'infini sur cette droite.

Deuxième solution — Soient : P le plan tangent cherché (fig. k_5); a, ω le centre et le point de contact de la sphère; Sz l'axe du cône; Sg sa génératrice de contact. Déplaçons le plan P en faisant parcourir à ses divers points, dans la direction perpendiculaire au plan lui-même, des chemins égaux au rayon de la sphère; ce plan prendra ainsi une position Q parallèle à P et sera tangent, par une droite Σg_1 parallèle à sg, à un nouveau cône de révolution de même axe que le premier et dont les génératrices seront celles de ce premier cône déplacées, dans une direction perpendiculaire à P, d'une longeur égale au rayon de la sphère.

Le problème se réduira ensuite à celui de la détermination du plan tangent au cône auxiliaire conduit par le centre de la sphère. En changeant le sens du déplacement, on trouve un second cône auxiliaire, et chaque cône donne deux solutions.

Exécution du tracé. — Donnons-nous (*fig.* 328, pl. XXXIII) : le cône par son sommet ss', et par sa base; C la sphère par ses contours apparents sur les deux plans de projection. Transportons la

génératrice $s'h'$, sh parallèlement à elle-même et à une distance de sa position initiale égale au rayon R de la sphère; soient $s'h'_1$, sh_1 les projections de cette ligne et h_1 sa trace horizontale. Le cône auxiliaire a pour sommet s, s' et pour base le cercle de centre s' et dont h_1 est un point de passage : c'est à ce cône qu'il faut mener, par un point extérieur o, o', un plan tangent. Tirons les projections $s'o'$, so de la droite de jonction du sommet au point extérieur, prenons ensuite la trace horizontale θ de cette droite, et conduisons de ce point des tangentes à la base du cône auxiliaire; l'une d'elles, θt, est la trace horizontale de l'un des plans tangents à ce cône auxiliaire.

Le plan tangent au cône primitif qui correspond à celui que nous venons de construire a pour trace horizontale une tangente P à C, menée parallèlement à θt; α est un point de sa trace verticale,

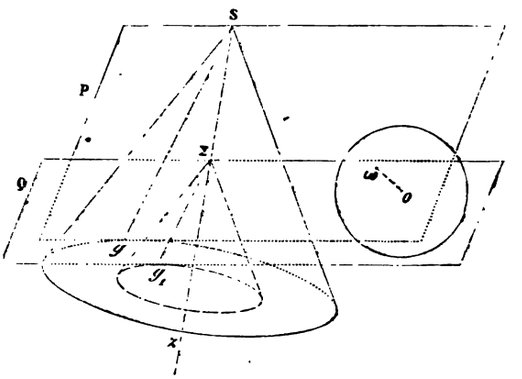


Fig. k_5.

et l'on trouve un second point de passage de cette ligne en construisant la trace verticale v' d'une parallèle à P menée du point s, s'. L'une des solutions est donc $P\alpha P'$, et les trois autres se construiraient pareillement.

486. Problème XXVI. — *Mener un plan tangent à trois surfaces de révolution dont deux sont homothétiques.* — Le centre de similitude des deux surfaces homothétiques est le sommet d'un cône circonscrit à ces deux surfaces; on mènera donc des plans tangents communs à ce cône et à celui de même sommet circonscrit à la troisième surface donnée.

487. Application. — *Mener un plan tangent à trois sphères données.* — Prenons pour plan de la figure celui des centres c_1, c_2, c_3, des sphères données (fig. k_6), et traçons les grands cercles d'intersection de ce plan et des sphères. Les sphères prises deux à deux sont doublement homothétiques; déterminons-en les divers centres de similitude, nous trouvons : ω_1, ω_2 pour les sphères de centre c_1, c_2; ω'_1, ω'_2 pour celles de centre c_1, c_3; enfin ω''_1, ω''_2 pour celles dont les centres sont c_2, c_3.

Tout plan tangent commun aux trois sphères doit contenir l'un des centres de similitude que l'on obtiendra en combinant ces sphères deux à deux de toutes les manières possibles, ce qui donne trois combinaisons.

On en conclut que les six centres de similitude trouvés doivent appartenir trois à trois à une même droite et qu'ils sont les sommets d'un quadrilatère complet $\omega'_1\,\omega''_1\,\omega_2\,\omega''_2\,\omega_1\,\omega_2$; les côtés de ce quadrilatère portent le nom d'axe de similitude des sphères.

Lorsque deux surfaces sont homothétiques, tout plan tangent à l'une d'elles et qui passe par leur centre de similitude touche aussi l'autre surface; on en déduit que tout plan tangent à l'une des

sphères conduit par l'un des axes de similitude touchera les deux autres surfaces et répondra aux conditions du problème. Comme nous avons tout d'abord démontré que tout plan répondant à la question doit contenir l'un des axes, nous voyons que les plans tangents à l'une des sphères passant par chacun des axes de similitude donnent les solutions et toutes les solutions du problème.

La construction du plan passant par une droite donnée et tangent à une sphère a déjà été indiquée (§ 478); il ne nous reste plus qu'à déterminer le nombre de solutions que peut offrir le problème.

Quand les côtés du quadrilatère complet $\omega_1\,\omega_2\,\omega'_1\,\omega''_1\,\omega'_2\,\omega''_2$ sont tous extérieurs aux sphères, chaque côté donne deux solutions et le problème en offre huit. Examinons maintenant les cas particuliers.

Lorsque deux surfaces sont homothétiques, toute divergente issue du centre de similitude et coupant l'une d'elles doit aussi couper l'autre, puisqu'elle offre sur cette dernière des points homologues aux points de section sur la première. Si la divergente est tangente à l'une des surfaces, elle a sur celle-ci deux points confondus, et, par suite, sur l'autre, deux points homologues également

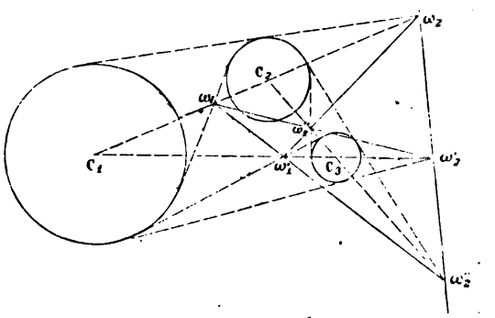


FIG. 80.

confondus; c'est-à-dire que la divergente doit aussi être tangente à la seconde surface. Enfin, lorsqu'une divergente n'a pas de point sur l'une des surfaces, elle n'en a pas non plus sur l'autre, puisque à tout point de l'une doit correspondre, sur une divergente issue du centre d'homothétie, un point de l'autre, et réciproquement.

D'après cela, tout axe de similitude qui sera tangent à l'une des sphères le sera aux deux autres, et ne donnera qu'une solution; si l'axe est sécant à l'une des sphères, il le sera aux trois autres et ne donnera aucune solution.

Le nombre de solutions que l'on peut perdre est donc pair ou impair et peut prendre toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à 8. Il suit de là que le problème peut avoir zero, une, deux, trois, etc., ou huit solutions.

CHAPITRE V

HYPERBOLOIDE DE RÉVOLUTION A UNE NAPPE, OU SURFACE GAUCHE DE RÉVOLUTION

488. — On entend par hyperboloïde de révolution à une nappe, la surface engendrée par une droite tournant autour d'un axe, la génératrice et l'axe n'étant pas dans le même plan.

Nous démontrerons bientôt que cette surface n'est autre que celle désignée sous le même nom au paragraphe **338**.

Considérons l'axe Z (fig. k_7) et la génératrice G; les divers points de celle-ci décrivent, dans leur

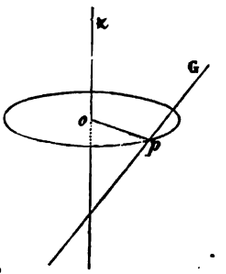


Fig. k_7.

rotation autour de Z, des parallèles dont le plus petit est celui que parcourt le pied p de la plus courte distance des droites Z, G; ce parallèle minimum, on le sait déjà, porte le nom de cercle de gorge ou de collier.

489. Théorème I. — *Les projections des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe sur le plan du collier ou sur un plan parallèle sont tangentes au collier ou à sa projection.* — Soient : Z l'axe

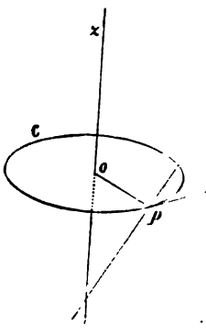


Fig. k_8.

(fig. k_8); G l'une des positions de la génératrice rectiligne; op la commune perpendiculaire à Z et à G; C le collier; M, m un point de G et sa projection sur le plan du collier.

La projection de G sur le plan de C est pm; la droite op est perpendiculaire à G et à Z; l'étant à Z, elle l'est aussi, en direction, à sa parallèle Mm, et par suite au plan pMm, ainsi qu'à la droite pm de ce plan; réciproquement, pm est perpendiculaire au rayon op du collier C; elle est donc tangente au collier.

490. Théorème II. — *Les sections planes de l'hyperboloïde de révolution à une nappe sont des courbes du second degré.* — Le degré d'une courbe étant égal à celui de sa projection sur un plan quelconque (§ 456), nous démontrerons que la projection de la commune intersection sur le plan du collier est une conique.

Soient : Z l'axe (fig. k_9), G l'une des génératrices, op la plus courte distance de ces droites, γ le collier, P le plan sécant, M la rencontre de P avec G, m la projection de M sur le plan de γ, AB

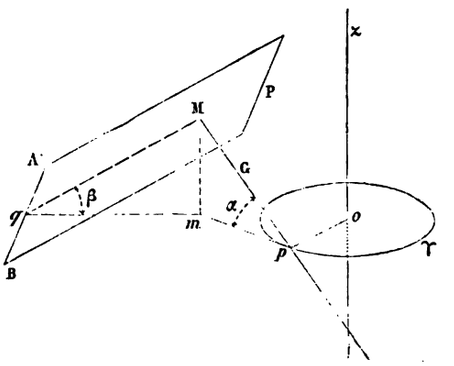


Fig. k_9.

la trace de P sur le plan du collier, α l'angle constant que font les génératrices rectilignes avec ce même plan, et β celui du plan P avec le plan du collier.

Mettons β en évidence en traçant du point m la perpendiculaire mq à AB et en figurant la droite de jonction des points Mq.

Adoptons deux axes rectangulaires quelconques dans le plan du collier, et soient encore

(1) $$(x-p)^2+(y-q)^2-R^2=c=0$$

l'équation du collier, et

(2) $$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=d=0$$

celle de AB.

Nous aurons :

$$Mm=mp\,\text{tang}\,\alpha=mq\,\text{tang}\,\beta;$$

mais, d'une part, $\overline{mp}^2$ est la puissance du point m par rapport au cercle γ; on a donc :

$$\overline{mp}^2=c;$$

de l'autre, d'après la forme de l'équation (2), on a :

$$mq=d.$$

En substituant on trouve :

$$c\,\text{tang}^2\,\alpha=d^2\,\text{tang}^2\,\beta,$$

équation de la forme

$$c - \lambda d^2 = 0, \tag{3}$$

qui est celle d'une conique bitangente au collier; le théorème est donc démontré.

491. Corollaire. — *La projection de toute section plane d'un cône de révolution sur un plan conduit par le sommet et perpendiculaire à l'axe est une conique dont un des foyers est le sommet du cône et dont la directrice correspondante est la trace du plan sécant sur le plan de projection.* — Le cône de révolution est un hyperboloïde de révolution à une nappe dont le rayon du collier est nul; nous aurons par conséquent l'équation de la projection cherchée en faisant dans (1) : $p = 0$, $q = 0$, $R = 0$; puis en remplaçant dans (3) c et d par leurs valeurs correspondantes. On trouve ainsi :

$$x^2 + y^2 = \lambda(x\cos\varphi + y\sin\varphi - p)^2 :$$

c'est l'équation d'une conique dont un foyer est à l'origine et dont la directrice correspondante a pour équation :

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0;$$

cette dernière n'est autre que l'équation de la trace du plan sécant; le corollaire est donc ainsi établi.

492. Théorème III. — *L'hyperboloïde gauche de révolution peut être engendré par la rotation complète d'une hyperbole tournant autour de son axe non transverse.* — Soient : z l'axe (fig. k_{10}), G la génératrice,

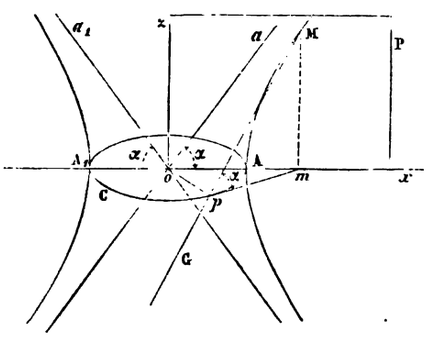


FIG. k_{10}.

op leur commune perpendiculaire, C le collier, ox l'intersection du plan du collier avec un plan quelconque P conduit par z, M la rencontre de P avec G, m la projection de M sur ox, et α l'angle constant que fait G avec le plan du collier. — Tirons la droite mp, qui n'est autre chose que la projection de G sur le plan du collier; c'est donc aussi (§ 489) une tangente au collier menée par p. — Faisons $Mm = z$, $om = x$, et cherchons l'équation du lieu du point M rapporté aux axes ox, oz; le triangle Mmp donne :

$$z = mp \operatorname{tang} \alpha;$$

celui opm donne à son tour, en désignant par R le rayon du collier,

$$mp^2 = x^2 - R^2;$$

en remplaçant dans la première relation mp par sa valeur, nous avons :

$$z = \sqrt{x^2 - R^2}\,\text{tang}\,\alpha,$$

ou

$$(1) \qquad z^2 - x^2\,\text{tang}^2\,\alpha = -R^2\,\text{tang}^2\,\alpha.$$

Cette dernière relation est l'équation du lieu du point M; on voit qu'elle représente une hyperbole rapportée à ses axes; que oz est l'axe non transverse de la courbe, et ox l'axe transverse; cherchons les sommets de ce dernier; faisons pour cela $z = 0$ dans (1); il vient :

$$x = t \pm R;$$

ce qui fait voir que les sommets de l'axe transverse sont aux points de rencontre A, A_1 du collier et du plan méridien considéré. — Cherchons les asymptotes de la section méridienne : le centre étant à l'origine, on trouve l'équation quadratique de ces droites en égalant à zéro l'ensemble des termes du second degré de l'équation (1), ce qui donne :

$$z^2 - x^2\,\text{tang}^2\,\alpha = 0$$

ou

$$z = \pm\, x\,\text{tang}\,\alpha$$

Les asymptotes sont donc deux droites oa, oa_1 menées par le centre et s'inclinant sur ox de l'angle α que font les génératrices rectilignes de la surface avec le plan du collier.

Comme les hyperboles tracées dans les divers plans méridiens sont évidemment égales, on voit que la surface est engendrée par la rotation complète d'une hyperbole autour de son axe non transverse. — Dans le mouvement de rotation, les asymptotes engendrent un cône tangent à l'hyperboloïde suivant le parallèle à l'infini, qui porte le nom de *cône asymptote* de l'hyperboloïde.

493. Théorème IV. — *L'hyperboloïde de révolution à une nappe admet un double mode de génération rectiligne.* — Soient : z l'axe (fig. l_1), G la génératrice rectiligne, op leur plus courte distance, C le

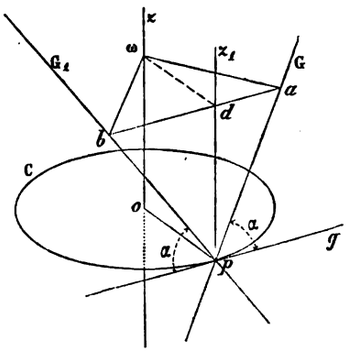


Fig. l_1.

collier et α l'angle de G et du plan du collier, angle qui est mesuré sur la figure par celui de G avec sa projection g sur le collier.

Dans le plan Gpg qui projette G sur le collier, traçons une droite G_1 s'inclinant également de l'angle $-\alpha$ sur g, et démontrons que la surface engendrée par la rotation complète de G_1 autour de z est la

même que celle qu'engendre G par sa rotation autour du même axe z. Il suffit évidemment de faire voir que tous les parallèles de l'une des surfaces se confondent avec ceux de l'autre. — Menons par p une parallèle z_1 à z, qui sera dans le plan Gpg, et coupons les droites z, G, G_1, z_1 par un plan perpendiculaire à z; les rencontres sont : ω, a, b, d. — Joignons par des droites les points (ω, a), (ω, b), (ω, d), et, après avoir remarqué que les points b, d, a sont sur la droite de rencontre du plan perpendiculaire à z et de celui des droites G, g, G_1, tirons aussi cette droite.

La droite ωd et la commune perpendiculaire op sont parallèles, comme intersections de deux plans parallèles par un troisième; il s'ensuit, puisque op est perpendiculaire au plan des droites z_1, G, que sa parallèle l'est, par suite, à ba.

Les triangles bpd, apd sont égaux, car les angles de même nom sont complémentaires de α et par suite égaux; le côté pd leur est commun et ils sont rectangles en d; on en conclut l'égalité des côtés bd, ad. — Les triangles rectangles $bd\omega$, $ad\omega$ sont aussi égaux comme ayant ωd commun et bd égal à da; on en déduit l'égalité des hypoténuses ωb, ωa.

Faisons maintenant tourner G et G_1 autour de z; les points a, b décriront, dans un même plan perpendiculaire à z, des parallèles de même centre ω dont les rayons ωa, ωb sont égaux : on voit par là que ces parallèles se confondront; et comme ils sont quelconques, le théorème est démontré.

La surface n'admet pas de génératrices rectilignes en dehors de celles des deux systèmes que l'on vient de signaler, car si elle en admettait d'autres, il existerait trois droites passant par un point de la surface, et ces droites seraient dans le plan tangent en ce point; dans ces conditions, le plan tangent couperait la surface suivant trois droites, ce qui est impossible, puisque la section par un plan est une conique.

494. Distinction des génératrices de systèmes différents. — Pour distinguer entre elles les génératrices de deux systèmes, on remarque que pour un spectateur debout sur l'axe, ayant les pieds

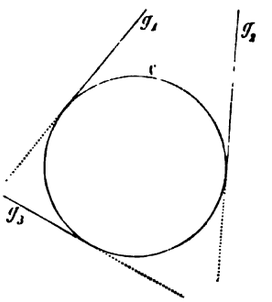


Fig. l_4.

au centre du collier et regardant une génératrice, la partie de celle-ci placée en dessous du collier est toujours soit à droite, soit à gauche, pour l'un des systèmes, et inversement, soit à gauche, soit à droite pour l'autre.

Ainsi, en représentant les projections g_1, g_2, g_3 (fig. l_2) de diverses génératrices sur le plan du collier pris pour plan de la figure, et en indiquant leur visibilité par rapport à ce plan, il est bien simple de distinguer les génératrices de systèmes différents; en effet, pour G_1 la partie visible est à la droite du spectateur, pour G_2 elle est à sa gauche, pour G_3 à sa droite : donc G_1, G_2 sont de systèmes différents, mais G_1, G_3 sont de même système.

495. Théorème. — *Deux génératrices appartenant à deux systèmes différents sont toujours dans un même plan, tandis qu'au contraire, deux génératrices de même système ne se trouvent jamais dans un même plan.* — Adoptons pour plan de la figure celui du collier, et soient C, g_1, g_2 (fig. l_3) le collier et les projections sur son plan de deux génératrices G_1, G_2 de systèmes différents (§ **494**).

Nous supposerons d'abord que g_1, g_2 ne sont pas parallèles; pour que G_1, G_2 appartinssent à un même plan, il faudrait alors que la distance γ_1 au plan du collier, du point de G_1 projeté en m, fût égale

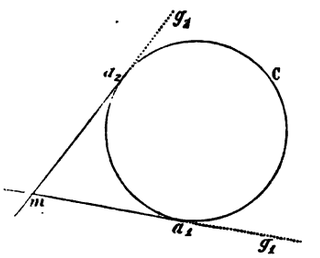


Fig. l_3.

à celle γ_2 au même plan du point de G_2 projeté en ce même point m; or, en désignant par α l'angle constant des génératrices avec le plan du collier et par a_1, a_2 les contacts de g_1, g_2 avec C, on a :

$$\gamma_1 = ma_1 \operatorname{tang} \alpha,$$

$$\gamma_2 = ma_2 \operatorname{tang} \alpha;$$

et comme $ma_1 = ma_2$, on aura enfin :

$$\gamma_1 = \gamma_2.$$

Les génératrices G_1, G_2 se coupent donc. — Supposons maintenant que les projections g_1, g_2 (fig. l_4) soient parallèles; G_1, G_2 auront des projections parallèles sur le plan du collier; elles feront le même

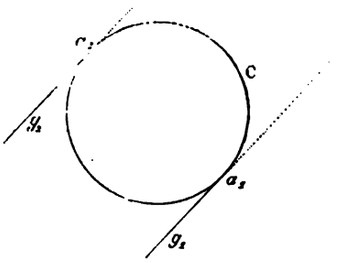


Fig. l_4.

angle α avec le plan du collier et s'inclineront dans le même sens sur ce plan; elles seront donc parallèles, et par conséquent dans un même plan.

Passons à la seconde partie du théorème. Soient : C (fig. l_5) le collier, supposé placé dans le plan de la figure, et g_1, g_2 les projections sur ce plan des génératrices de même système G_1, G_2.

Admettons d'abord que g_1, g_2 se coupent en m; les génératrices de l'espace ne pourraient avoir en commun qu'un point projeté en m, ce qui est impossible, puisque m correspond sur les deux génératrices G_1, G_2 à deux points placés de part et d'autre du collier.

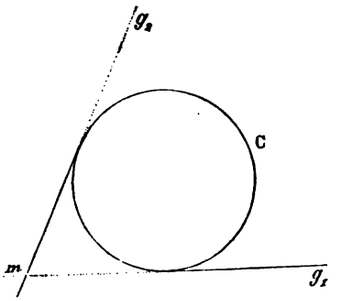


Fig. l_4.

Quand les projections g_1, g_2 sont parallèles (fig. l_5), les droites G_1, G_2 s'inclinent en sens inverse sur le plan du collier; elles ne sont pas parallèles dans l'espace, et, conséquemment, n'appartiennent pas au même plan.

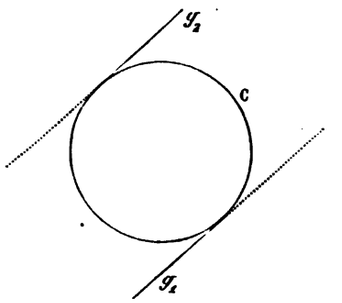


Fig l_5.

496. Remarque I. — On conclut de la démonstration qui précède, que deux génératrices de même système, très voisines, qui se rapprochent indéfiniment, ne sont pas à la limite dans un même plan. On démontrera plus tard que les surfaces réglées jouissant de la propriété qui vient d'être signalée sont gauches; on pourra alors dire que l'hyperboloïde de révolution à une nappe est la seule surface qui soit à la fois gauche et de révolution, et l'appeler *surface gauche de révolution*, comme nous l'avons fait en tête du présent chapitre, dans le but unique de justifier la classification adoptée.

497. Remarque II. — En tout point d'une surface gauche de révolution passent deux génératrices rectilignes de systèmes différents, qui sont à elles-mêmes leurs propres tangentes, et déterminent le plan tangent au point considéré.

498. Remarque III. — *Tout plan conduit par une génératrice rectiligne de l'hyperboloïde de révolution à une nappe est tangent à la surface en un point de cette génératrice.* — En effet, ce plan coupe la surface suivant une conique dont la génératrice rectiligne fait partie; l'intersection se compose donc de deux droites, et, au point de rencontre de ces droites, le plan touche la surface.

499. Définition. — Deux génératrices de systèmes différents déterminent, lorsqu'elles sont parallèles, un plan tangent à l'infini qui porte le nom de plan *asymptotique* de la surface.

500. Théorème V. — *Le cône asymptote de l'hyperboloïde de révolution à une nappe est l'enveloppe des plans asymptotiques de la surface.* — Soient : C le collier (fig. l_7) ; o son centre ; g_1, g_2 les projections sur le plan du collier de deux génératrices G_1, G_2 rectilignes et parallèles entre elles ; g la projection sur le même plan de la génératrice appartenant au cône asymptote et parallèle à G_1, G_2.

Considérons le diamètre de jonction des contacts a_1, a_2 de g_1, g_2 avec C, et observons que dans l'espace G, G_1, G_2 sont parallèles et s'appuient sur la droite a_1a_2, ces trois génératrices sont donc dans

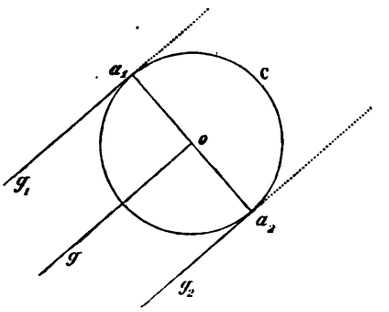


Fig. l_7.

un même plan ; lequel est, d'une part, le plan asymptote qui touche l'hyperboloïde au point à l'infini sur G, G_1 ; ou G_2 d'autre part, le plan tangent au cône asymptote le long de G. — D'après cela, le cône asymptote est l'enveloppe des plans asymptotiques de l'hyperboloïde.

501. Théorème VI. — *Le cône asymptote de l'hyperboloïde de révolution à une nappe est le lieu des droites que l'on obtient en transportant, parallèlement à elles-mêmes, au centre du collier, les asymptotes des sections planes de l'hyperboloïde.* — L'asymptote d'une section plane est la tangente au point à l'infini de cette section ; or les points à l'infini sont donnés par la rencontre du plan sécant et de deux couples de génératrices de systèmes différents parallèles entre elles deux à deux et parallèles à ce plan. — Les droites de ces couples déterminent deux plans asymptotiques, dont les rencontres avec le plan sécant sont respectivement parallèles à chacune d'elles et donnent précisément les asymptotes correspondantes de la section. Ces asymptotes sont donc parallèles aux deux génératrices considérées. — Le lieu des parallèles menées aux asymptotes des sections planes par le centre de la surface est donc celui des génératrices transportées au centre parallèlement à elles-mêmes ; ce qui démontre le théorème.

502. Problème I. — *Représenter par ses contours apparents l'hyperboloïde de révolution à une nappe.* — Quand l'axe est vertical, l'hyperboloïde admet quatre génératrices parallèles au plan vertical, que l'on emploie très fréquemment à la détermination de cette surface ; elles portent, pour ce motif, le nom de *génératrices principales*.

Supposons que la surface soit déterminée par son axe z, z' (*fig.* 329, pl. XXXIII) et par l'une g, g' de ses génératrices principales, et cherchons ses contours apparents.

La commune perpendiculaire des droites données se projette verticalement au croisement p' de z' avec g' ; horizontalement, sur la perpendiculaire zp, menée de z à g.

En décrivant, de z comme centre, avec zp pour rayon, une circonférence, on trouve la projection horizontale du collier, c'est-à-dire le contour apparent en projection horizontale ; la projection verticale

de ce collier est la parallèle à la ligne de terre menée par p et limitée aux lignes de rappel tangentes à la projection horizontale de cette courbe.

Cherchons le contour apparent en projection verticale. — Un premier moyen est de construire l'enveloppe des projections verticales des génératrices rectilignes (§ **395** *ter*) ; projections faciles à obtenir en faisant tourner g, g' autour de z, z' et en construisant, par exemple, celles des génératrices qui divisent le collier en parties égales. — Un second moyen est de déterminer la projection verticale du méridien de front (§ **390**). Prenons un point quelconque c, c' de g, g'; pendant la rotation il décrira un cercle projeté verticalement suivant la parallèle à la ligne de terre menée par c', et, horizontalement, suivant la circonférence décrite de z comme centre avec zc pour rayon; les rencontres du parallèle et du plan méridien de front se projettent horizontalement en c_1, c_2, et se relèvent sur les lignes de rappel menées par c_1, c_2 jusqu'aux points c'_1, c'_2 qui se trouvent sur la projection verticale du parallèle.

Cherchons la tangente en c'_1 au contour apparent dont nous exécutons le tracé; elle n'est autre chose que la projection verticale de l'une des génératrices rectilignes qui se croisent en c_1, c'_1 (§ **342**), et dont la projection horizontale correspondante s'obtient en tirant de c_1 l'une de tangentes c_1, p_1 au collier. En relevant ensuite p_1 en p'_1 et en traçant la droite de jonction des points p'_1, c'_1, on aura la tangente demandée. On pourra construire ainsi un nombre suffisant de points et de tangentes pour tracer la courbe. — En appliquant le tracé général au parallèle qui passe par la trace horizontale θ de g, g', parallèle qui n'est autre chose que la trace horizontale de l'hyperboloïde, nous avons déterminé sur l'épure les points de rencontre du contour cherché avec la ligne de terre.

On peut également déterminer l'hyperbole méridienne par son axe transverse et ses asymptotes; effectivement, d'après les conclusions du paragraphe **492**, on voit que les extrémités de l'axe transverse sont celles a', b' de la projection verticale du collier; que l'une des asymptotes est sur g', tandis que l'autre s'obtient en prenant une droite g'_1 symétrique de g' par rapport à z'. — Les propriétés segmentaires de l'hyperbole donnent lieu, lorsqu'on connaît les asymptotes et un point de la courbe, à un tracé fort commode de celle-ci, bien connu du lecteur.

503. Problème II. — *Connaissant les projections de l'axe z, z' et celles g, g' d'une génératrice principale d'une surface gauche de révolution; construire les projections d'un point de cette surface et lui mener un plan tangent par ce point* (*fig.* 330, pl. XXXIII).

Traçons le contour apparent de la surface en projection horizontale; ce contour est le cercle de centre z et de rayon égal à la longueur zp de la plus courte distance de l'axe à la génératrice principale; prenons ensuite, dans une position arbitraire, mais extérieure à ce contour, la projection horizontale m d'un point de la surface. — La projection verticale correspondante est sur celle du même nom d'un parallèle projeté horizontalement suivant la circonférence de cercle de centre z et dont m est un point de passage; cette circonférence rencontre g en deux points a, b, qui se relèvent en a', b', sur g'; en tirant de chacun d'eux des parallèles à la ligne de terre, on a les projections verticales des parallèles de la surface qui passent par M, et sur lesquelles une ligne de rappel menée par m donne les projections verticales m'_1, m'_2 des points cherchés.

En résumé, il y a sur la surface deux points projetés horizontalement en m qui sont (m, m'_1), (m, m'_2).

Cherchons le plan tangent au point m, m'_1; il est déterminé (§ **497**) par les génératrices de systèmes différents qui passent par ce point, génératrices dont les projections horizontales sont les tangentes md, mc menées par m à la projection horizontale du collier.

On pourrait construire les projections verticales de ces génératrices, mais il est plus simple d'en

chercher les traces horizontales; pour cela prenons la trace horizontale θ de g, g' et décrivons de z comme centre avec $z\theta$ pour rayon une circonférence, qui sera la trace horizontale de l'hyperboloïde. La trace de même nom des génératrices du plan tangent cherché sera, attendu que m, m'_1 est au-dessous du collier, en t, t_1; en conséquence, la droite de jonction des points t, t_1 est la trace horizontale P du plan tangent; une horizontale de ce plan menée par m, m_1 donne, par sa trace verticale v', l'un des points de passage de la trace sur le plan de même nom du plan tangent; la rencontre α de P avec xy est un second point de passage de cette trace; en unissant par une droite les points α, v' on a la trace verticale P′ cherchée.

Le plan tangent est actuellement déterminé par ses traces PαP′.

504. Problème III. — *Un plan conduit par une génératrice rectiligne de l'hyperboloïde de révolution étant donné, trouver son contact avec la surface.* — Le problème à résoudre n'est autre que le *problème inverse du plan tangent.* Soient : z, z' (*fig.* 331, pl. XXXIII) les projections de l'axe et g, g' celles d'une génératrice quelconque.

Prenons la trace horizontale θ de g, g' et tirons par θ, dans une direction arbitraire, une droite P, que nous adopterons pour trace horizontale du plan conduit par g, g' dont on demande le contact avec l'hyperboloïde.

Traçons la projection horizontale du collier en décrivant de z comme centre, avec la distance zp de z à g pour rayon, une circonférence; figurons, en outre, la trace horizontale de la surface, qui est un cercle de centre z et dont θ est un point de passage.

Le plan donné coupe l'hyperboloïde suivant deux droites, dont l'une est g, g', et dont l'autre a pour trace horizontale le second point θ_1 de rencontre de P avec la trace sur le plan de même nom de l'hyperboloïde.

Cette seconde génératrice doit se projeter horizontalement suivant l'une des tangentes au collier menée par θ_1. Pour choisir la tangente qui convient au problème actuel, imaginons un spectateur debout sur l'axe et regardant g, g', θ est à sa gauche; comme nous devons prendre une génératrice d'un système différent de celui de g, g', θ_1 devra se trouver à la droite du spectateur placé sur l'axe et regardant la seconde génératrice située dans le plan donné, cette ligne se projettera donc horizontalement sur la tangente $\theta_1 p_1$. Le point de contact cherché se projettera par suite sur le plan horizontal en m et se relèvera en m', sur la ligne de rappel du point m et sur g'. Il passe donc par le point m, m' deux génératrices situées dans le plan donné; ce point est par suite le contact cherché.

Il importe de retenir le procédé qui vient d'être employé pour distinguer les génératrices de systèmes différents sans recourir, comme on l'a fait au paragraphe **494**, à la visibilité de la génératrice.

Un autre moyen tout aussi simple est de placer le spectateur sur la trace horizontale de la génératrice en lui faisant regarder le collier, qui doit alors, pour des génératrices de même système, se trouver placé d'un même côté du spectateur, soit à sa droite, soit à sa gauche, et au contraire dans le cas de deux génératrices de systèmes différents à sa droite pour l'une, à sa gauche pour l'autre.

Nous eussions pu résoudre le problème inverse du plan tangent en plaçant simplement le point de contact à la rencontre de la génératrice g, g', et d'un plan méridien mené perpendiculairement au plan tangent donné.

505. Problème IV. — *Un hyperboloïde de révolution à une nappe étant donné, construire l'enveloppée sphérique qui le touche par un parallèle assigné.* — Soient : z, z' les projections (*fig.* 332, pl. XXXIII) de l'axe et g, g' celles de l'une des génératrices principales. Donnons-nous la projection horizontale anb d'un parallèle et construisons sa projection sur l'autre plan coordonné en relevant m en m', et en

tirant de ce point une parallèle à la ligne de terre, que nous limiterons en ses points de rencontre a', b' avec les lignes de rappel qui comprennent entre elles la projection horizontale du parallèle.

Le centre de l'enveloppée sphérique est le sommet du faisceau des normales à la surface aux divers points de la caractéristique; comme le plan tangent à la surface en m, m' contient g, g', le rayon du faisceau normal à la surface en m, m' l'est aussi à g, g', et, cette dernière étant de front, l'angle droit se conservera en projection verticale ; d'après cela, en conduisant une perpendiculaire à g' par m' on aura la projection verticale d'un rayon du faisceau, alors la rencontre ω' de cette ligne avec z' sera la projection sur le plan de projection de même nom du centre de l'enveloppée sphérique; l'autre projection du centre sera en z. La droite qui va du point Ω au point A est une normale de front qui se projette dans sa véritable grandeur en $\omega' a'$ et donne le rayon de l'enveloppée.

L'enveloppée sphérique est donc déterminée par son centre ω', z et son rayon $\omega' a'$.

506. Problème V. — *Étant donné, par son axe z, z' et par une génératrice principale g, g', un hyperboloïde de révolution à une nappe, construire le sommet de l'enveloppée conique qui le touche par un parallèle assigné.* — Conservons la figure du problème précédent (*fig.* 332, pl. XXXIII) et cherchons le sommet de l'enveloppée conique dont la caractéristique est ab, $a'b'$.

La normale en a, a' à la surface est projetée suivant $a'\omega'$, az; comme cette droite se trouve dans le méridien de front, elle est aussi normale à ce méridien ; donc la tangente au méridien principal se projette verticalement suivant la perpendiculaire $a'\sigma'$ à $a'\omega'$, et détermine par sa rencontre σ' avec z' la projection verticale du sommet du cône circonscrit à l'hyperboloïde le long du parallèle donné; z est la seconde projection de ce point.

507. Problème VI. — *Mener, ou par un point donné ou parallèlement à une droite donnée, un plan qui touche l'hyperboloïde de révolution à une nappe sur un parallèle assigné.* — Dès lors que l'on sait construire l'enveloppée conique ou sphérique qui touche la surface par le parallèle assigné, la question se résout sans peine par l'un des procédés des paragraphes **409** et **410**.

508. Problème VII. — *Mener, ou par un point donné ou parallèlement à une droite donnée, un plan qui touche l'hyperboloïde de révolution à une nappe sur une génératrice désignée.* — On conduit par le point donné ou parallèlement à la droite donnée un plan contenant la génératrice assignée, et l'on résout sur ce plan le problème inverse du plan tangent (§ **504**).

509. Problème VIII. — *Étant donné un hyperboloïde de révolution à une nappe, conduire, par une génératrice assignée, un plan tangent qui s'incline sur l'horizon d'un angle donné.* — On construit les plans qui passent par la droite et qui sont tangents à un cône de révolution dont le sommet serait sur cette droite et dont les génératrices feraient avec l'horizon l'angle donné, puis l'on résout, sur ce plan et pour l'hyperboloïde, le problème inverse du plan tangent (§ **504**).

510. Problème IX. — *Un hyperboloïde de révolution à une nappe étant donné par son axe z, z' et par l'une g, g' de ses génératrices principales, lui mener un plan tangent parallèle à un plan donné* (*fig.* 333, pl. XXXIII). — Le plan tangent cherché doit contenir deux génératrices de systèmes différents, qui doivent être par suite parallèles au plan donné $P_\alpha P'$; le problème se réduit donc à celui de la détermination des génératrices parallèles à ce plan.

Or, les génératrices de l'hyperboloïde sont parallèles à celles du cône asymptote, construisons donc ce dernier : le sommet de ce cône est au centre s, s' de l'hyperboloïde, la parallèle sh, $s'h'$ à g, g' est une génératrice de front du cône, et, par la trace horizontale h de cette droite, on trouve un point de passage de la base du cône sur le plan horizontal de projection; comme le centre de cette base est en s, on peut facilement la tracer.

Cherchons les génératrices du cône asymptote parallèles à $P\alpha P'$; pour cet effet, conduisons par s, s' un plan parallèle à celui qu'on nous donne : par le secours d'une horizontale sv, $s'v'$ du plan cherché on a un point v' de passage de la trace verticale de celui-ci ; en tirant par v' la parallèle $R'\gamma$ à $P'\alpha$ et par γ celle γR à αP, on obtient les deux traces $R\gamma R'$ du plan parallèle.

La trace horizontale γR de ce plan rencontre celle du cône asymptote en deux points t_1, t_2, qui, lorsqu'on les joint au point s par les droites st_1, st_2, donnent les projections horizontales des génératrices du cône parallèles au plan $P\alpha P'$.

Des tangentes à la projection horizontale du collier menées dans les directions st_1, st_2 déterminent les projections horizontales des génératrices que nous cherchons sur l'hyperboloïde; les traces horizontales de ces droites sont en t_3, t_4, t_5, t_6, et il faut, comme vérification, que les tangentes en t_1, t_2 à la base du cône asymptote passent : la première, par t_3, t_4; l'autre, par t_5, t_6. Cette vérification est justifiée par ce fait que les tangentes à la base du cône en t_1, t_2 sont les traces des plans asymptotiques relatifs aux génératrices projetées horizontalement en st_1, st_2.

Il y a maintenant lieu d'associer les traces t_3, t_4, t_5, t_6, par groupes de deux en faisant en sorte que leurs droites de jonction soient parallèles à αP; ce qui donne les traces horizontales Q_1, Q_2 des deux plans tangents répondant aux conditions assignées par l'énoncé du problème. En prenant les rencontres β_1, β_2 de ces droites avec xy, et en tirant de ces points des parallèles Q'_1, Q_2 à P', on trouve les traces verticales correspondantes.

511. Théorème VII. — *Lorsque deux surfaces du second degré ont en commun deux droites, leur intersection est un système de quatre droites.* — Soient D_1, D_2 (fig. l_8) les droites communes; elle font

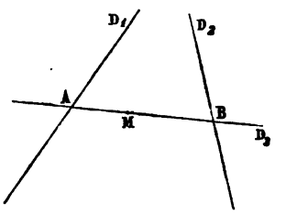


FIG. l_8.

évidemment partie de l'intersection des surfaces considérées; cette intersection, qui est du quatrième degré, aura, par conséquent, des points extérieurs aux droites D_1, D_2; soit M l'un d'eux. On peut conduire par ce point une droite D_3 rencontrant D_1, D_2 en deux points que nous désignons par A, B; les deux surfaces ont en commun avec D_3 trois points A, M, B; or, toute droite qui a trois de ses points sur une surface du second degré s'y trouve contenue toute entière; on en conclut que D_3 fait aussi partie de l'intersection; celle-ci est du quatrième degré et comprend déjà trois droites, elle doit donc en comprendre une quatrième.

512. Théorème VIII. — *Le paraboloïde hyperbolique offre un double mode de génération rectiligne.*— On sait que le paraboloïde hyperbolique est la surface engendrée par une droite qui se meut parallèlement à un plan fixe P (fig. l_9), tout en s'appuyant sur deux droites D_1, D_2 (§ 339) : P est le plan directeur, D_1, D_2 sont des directrices de la surface, et les droites mobiles en sont les génératrices du premier système. Prenons G_1, G_2 pour directrice de l'autre système en adoptant cette fois un plan directeur P_1 parallèle à D_1, D_2; cela posé, démontrons que les deux paraboloïdes qui viennent d'être définis se confondent. Soit une troisième génératrice G_3, du premier système; D_1, D_2 sont deux géné-

ratrices du second mode, traçons en une troisième D_3 de ce même mode; tout sera démontré si nous prouvons que les deux génératrices quelconques G_3, D_3 se coupent.

Plaçons des lettres aux points de rencontre des droites figurées, puis observons que les points (A, E), (a, c), (B, C) peuvent être considérés comme les rencontres des droites D_2, D_1 par trois plans parallèles à P; ce qui conduit à la proportion

$$\frac{aA}{aB} = \frac{cE}{cC};$$

de même on trouve sur G_1, G_2 des segments donnant la proportion

$$\frac{bB}{bC} = \frac{eA}{eE}.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} = \frac{cE}{cC} \cdot \frac{eA}{eE},$$

ou

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cE} \cdot \frac{eE}{eA} = 1.$$

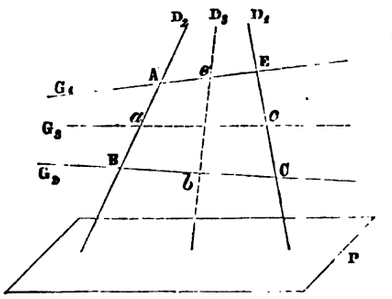


Fig. l_9.

On voit donc que le produit de quatre rapports de simple section déterminés par a, b, c, e sur les côtés du quadrilatère gauche ABCE est égal à 1, ce qui prouve, d'après une propriété fondamentale de la géométrie, que les droites ac, eb se coupent.

513. Conséquence I. — *Deux génératrices de systèmes différents appartiennent toujours à un même plan.* — Cette propriété découle immédiatement de la démonstration du théorème.

514. Conséquence II. — *Deux génératrices d'un même système ne sont jamais dans un même plan.* — En effet, si elles étaient situées dans un seul plan, les génératrices du système opposé, qui doivent les rencontrer, engendreraient un plan, et la surface serait plane, ce qui est évidemment inadmissible.

515. Théorème IX. — *Dans le paraboloïde hyperbolique, les projections des génératrices de l'un des systèmes sur un plan perpendiculaire au plan directeur de l'autre système forment un faisceau.* — Soient P l'un des plans directeurs (fig. l_{10}) et Q le plan de projection que l'on suppose perpendiculaire à P.

Considérons deux des génératrices G_1, G_2 non parallèles à P; soient g_1, g_2 leurs projections sur Q; prenons la rencontre ω de ces projections et, par ce point, conduisons une perpendiculaire G'_1 à Q,

cette droite s'appuie sur G_1, G_2 en deux points A, B; elle est donc parallèle à P et rencontre G_1, G_2, c'est, par conséquent, une génératrice du système parallèle à P ; il s'ensuit que G'_1 rencontre toutes les génératrices G_1, G_2, G_3, G_4.... du système non parallèle à P, et que, par suite, les projections g_1, g_2, g_3, g_4.... de ces génératrices ont en ω un point commun; elles forment donc un faisceau dont le sommet est ω.

La réciproque est vraie et se démontre aisément. Le théorème qui vient d'être démontré est identique à celui déjà établi dans le cours du paragraphe **202**.

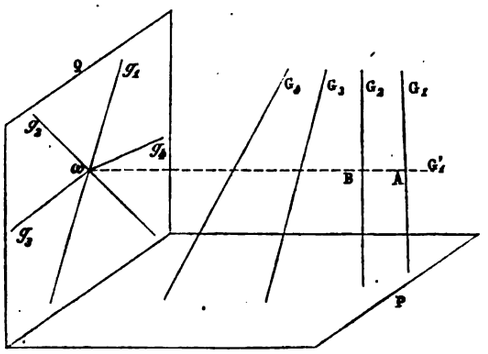


FIG. l_{10}.

516. Théorème X. — *Lorsque trois génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe* (§ 339) *sont parallèles à un même plan, l'hyperboloïde se transforme en paraboloïde hyperbolique.* — Soient : G_1, G_2, G_3 les génératrices rectilignes parallèles au plan P (fig. m_1) et soient encore g_1, g_2 deux droites s'appuyant, en (A_1, B_1, C_1,) (A_2, B_2, C_2), sur G_1, G_2, G_3.

Les droites g_1, g_2 qui ont trois points sur l'hyperboloïde y sont entièrement contenues. Considérons le paraboloïde hyperbolique dont g_1, g_2 sont deux directrices et dont P est le plan directeur;

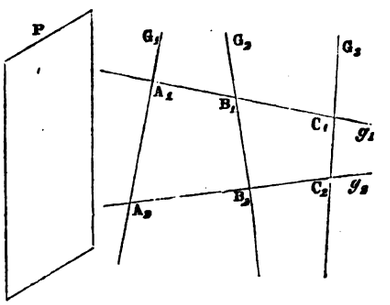


FIG. m_1.

G_1, G_2, G_3 seront sur ce paraboloïde et les génératrices non parallèles à P engendrant le paraboloïde devront s'appuyer sur G_1, G_2, G_3, c'est-à-dire qu'elles seront précisément celles qui engendrent l'hyperboloïde.

Ces deux surfaces sont donc ici confondues; ce qui démontre le théorème.

517. Problème X. — *Construire les points de rencontre d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.* — Nous résoudrons d'abord le problème par le procédé très simple et très général donné

par DULEAU dans la *Correspondance de l'École polytechnique;* ensuite nous indiquerons une élégante solution récemment trouvée par M. ROUCHÉ et qui offre sur celle de DULEAU l'avantage d'être plus conforme aux principes de la géométrie descriptive.

Procédé de Duleau. — Soient donnés : l'hyperboloïde par son axe z, z' (*fig.* 334, pl. XXXIII) et par l'une g, g' de ses génératrices principales; la droite par ses projections d, d'. Nous supposerons qu'on ait rendu d, d' parallèle au plan vertical par une rotation autour de z, z' : les points de rencontre une fois trouvés, il sera toujours facile de revenir sur la position initiale.

Employons la méthode des lieux géométriques ou, ce qui est la même chose, la méthode des courbes d'erreur. Considérons une corde horizontale s'appuyant sur g, g', sur d, d' et passant par l'un des deux points de rencontre cherchés; rendons cette corde mobile en la maintenant horizontale, et en l'appuyant toujours sur les mêmes droites, mais en la limitant : dans un cas, aux deux droites qui dirigent son mouvement; dans l'autre, à l'hyperboloïde. Cherchons pour ces deux cas la projection horizontale du lieu des milieux des cordes.

En plaçant la projection horizontale du point milieu sur l'un des lieux, on commet une erreur, mais en le plaçant à la rencontre des deux lieux l'erreur est nulle.

Les cordes horizontales qui s'appuient sur (d, d'), (g, g') engendrent un paraboloïde hyperbolique ayant pour premier plan directeur le plan horizontal de projection et dont le second plan directeur se dirige parallèlement aux droites (g, g'), (d, d') ; ce plan n'est autre que le plan vertical de projection, conséquemment les projections sur le plan horizontal des génératrices non parallèles au plan vertical forment un faisceau (§ 515). Cherchons-en le sommet; la droite θt de jonction des traces horizontales des droites (g, g'), (d, d') en est un rayon ; d'autre part, il est une génératrice perpendiculaire au plan vertical passant au croisement a' de g', d', en prenant sa projection horizontale, qui n'est autre que la perpendiculaire à la ligne de terre menée par a', on trouve un second rayon du faisceau; par l'intersection des deux rayons tracés, on en obtient enfin le sommet ω.

Cherchons le premier lieu : c'est celui du milieu des projections horizontales des cordes parallèles au plan de même nom et rencontrant (d, d'), (g, g'). Il est manifeste que ce lieu est une parallèle pq aux droites d et g placée à égale distance de ces deux droites.

Construisons le second lieu : c'est celui du milieu des projections horizontales des cordes parallèles au plan de même nom, s'appuyant sur g, g', sur d, d' et comprises dans l'hyperboloïde; ces cordes de l'hyperboloïde étant horizontales sont des cordes de divers parallèles; conséquemment, les projections horizontales de leurs milieux tombent sur un faisceau de droites perpendiculaires aux cordes et dont le sommet se trouve en z. Nous avons donc à chercher le lieu des rencontres de deux faisceaux orthogonaux ayant pour sommet l'un ω, l'autre z; ce lieu n'est autre que la circonférence décrite sur ωz comme diamètre.

La rencontre des deux lieux se fait en μ_1, μ_2 et les projections horizontales des cordes correspondantes passent par le sommet ω de l'un des faisceaux, ce sont les droites $\omega\mu_1$, $\omega\mu_2$; par leurs rencontres avec d on a les projections horizontales m_1, m_2 des points cherchés; on en déduit les projections verticales m'_1, m'_2 correspondantes.

518. Procédé de M. Rouché. — On trouve la rencontre d'une surface et d'une droite en conduisant par celle-ci une surface auxiliaire dont on cherche la commune intersection avec la surface donnée, et en prenant la rencontre de cette intersection avec la droite.

Telle est la méthode que nous allons appliquer au présent problème. Soient z, z' les projections de l'axe (*fig.* 335, pl. XXXIV) (g_1, g'_1), (g_2, g'_2) celles de deux génératrices principales de systèmes

différents, et d, d' celles enfin de la droite donnée, après qu'on l'a rendue parallèle au plan vertical par une rotation autour de z, z'.

La surface auxiliaire adoptée est le paraboloïde hyperbolique (§ 516) dont les directrices sont les trois droites de front (d, d'), (g_1, g'_1), (g_2, g'_2); ce paraboloïde a en commun avec l'hyperboloïde de révolution deux droites; en outre ces surfaces sont du second degré, leur intersection est donc un système de quatre droites (§ 511); il faut trouver les deux droites complétant l'intersection.

Ces droites sont des génératrices du paraboloïde et de l'hyperboloïde, nous allons successivement les considérer comme appartenant à chacune de ces surfaces. En tant que génératrices de l'hyperboloïde, elles doivent se projeter horizontalement sur des tangentes à la projection de même nom du collier. En tant que génératrices du paraboloïde, leurs projections horizontales font partie d'un faisceau; en effet, le plan vertical est un plan directeur; en conséquence, les projections sur le plan horizontal des génératrices non parallèles au plan vertical forment un faisceau (§ 515).

A l'aide de deux rayons, cherchons-en le sommet. Coupons le paraboloïde par le plan projetant verticalement G_1, lequel contient une droite du paraboloïde et le coupe, par suite, suivant une autre droite; la rencontre du plan projetant avec g_2, g'_2 se fait en b, b', celle avec d, d' en a, a'; la seconde droite de rencontre est donc projetée horizontalement suivant ba; c'est là un des rayons du faisceau. Un second rayon cf s'obtient de même par la projection horizontale de la rencontre du paraboloïde et du plan projetant verticalement G_2. Les deux rayons ainsi trouvés ba, cf donnent par leur rencontre le sommet ω du faisceau. Ce sommet ω appartient encore à la projection horizontale a_1f_1 de l'une des droites d'intersection du paraboloïde par le plan projetant D verticalement. Dans chaque cas on pourra donc ou bien obtenir une vérification du tracé, ou choisir celui des deux rayons qui détermine ω avec le plus d'exactitude.

Les projections horizontales des droites qui complètent l'intersection de l'hyperboloïde et du paraboloïde auxiliaire passent par ω et sont tangentes à la projection de même nom du collier, ce qui permet de les tracer et de prendre leurs rencontres m_1, m_2 avec d, lesquelles ne sont autre chose que les projections horizontales des points où d, d' perce l'hyperboloïde; en menant des lignes de rappel par ces deux points jusqu'à la droite d', on trouve les projections verticales m'_1, m'_2 correspondantes. Ainsi (m_1, m'_1) (m_2, m'_2) sont des rencontres de la droite et de l'hyperboloïde.

En terminant, observons que la droite f_1a_1 se maintient fixe lorsque la projection horizontale de D se déplace parallèlement à elle-même.

La solution peut être simplifiée lorsque la droite donnée rencontre l'axe, lui est parallèle ou lui est perpendiculaire en direction. Examinons ces cas particulier.

519. Intersection de l'hyperboloïde de révolution à une nappe et d'une droite rencontrant son axe de rotation. — Bien que la solution générale soit applicable au présent cas particulier, il n'est pas sans intérêt d'en donner une solution spéciale.

Soient: z, z' les projections de l'axe (*fig.* 336, pl. XXXIV), g, g' celles de l'une des génératrices principales et d, d' celles d'une droite rencontrant l'axe en o', z. Adoptons pour surface auxiliaire le cône engendré par une révolution complète de d, d' autour de z, z' cône, dont le sommet se trouve en z, o', et dont la trace horizontale est un cercle de centre z dont la circonférence passe par la trace horizontale θ de d, d'.

Traçons cette circonférence et cherchons la rencontre du cône avec l'hyperboloïde; il s'agit de deux surfaces de révolution du second degré ayant même axe, par conséquent la rencontre se compose de deux parallèles. Or, ces parallèles seront déterminés dès que nous aurons construit un point de chacun

d'eux, et ces points se peuvent construire en prenant la rencontre de g, g' avec le cône auxiliaire.

Pour construire les points d'intersection de g, g' avec le cône, conduisons par cette droite et par le sommet o', z un plan, prenons la rencontre de ce plan et du cône, laquelle se compose de deux génératrices, et cherchons leurs intersections avec g, g'.

La trace horizontale du plan auxiliaire s'obtient en conduisant par o', z une parallèle à g, g', en prenant la trace horizontale h_1 de cette parallèle, que l'on unit par une droite à celle h sur le même plan de projection de g, g'.

Cette trace hh_1 étant trouvée, on prend ses points de rencontre t_1, t_2 avec celle du cône, et l'on tire les droites zt_1, zt_2 qui sont les projections horizontales des génératrices que donne le plan auxiliaire en rencontrant le cône. Ces droites coupent à leur tour g aux points μ_1, μ_2, points dont les projections correspondantes se font sur g', en μ'_1, μ'_2; on connaît alors les projections (μ_1, μ'_1), (μ_2, μ'_2) des points d'intersection de g, g' et du cône, qui sont, on l'a dit, celles de points situés respectivement sur les parallèles cherchés.

En traçant des parallèles à la ligne de terre par μ'_1, μ'_2 on a les projections verticales des parallèles communs aux deux surfaces, les rencontres de ces lignes avec d' sont les projections verticales m'_1, m'_2 des points d'intersection de d, d' avec l'hyperboloïde ; on en déduit, par le secours de lignes de rappel, les projections horizontales m_1, m_2 correspondantes.

Les points demandés sont donc (m_1, m'_1), (m_2, m'_2).

520. Intersection d'un hyperboloïde de révolution à une nappe et d'une droite parallèle à son axe de rotation. — C'est le problème déjà résolu au paragraphe **503**. Il faut simplement trouver les projections verticales de deux points de la surface, connaissant leur commune projection horizontale.

521. Intersection de l'hyperboloïde de révolution à une nappe et d'une droite perpendiculaire, en direction, à son axe. — Donnons-nous toujours l'hyperboloïde par son axe vertical z, z' (*fig.* 337, pl. XXXIV) et par l'une g, g' de ses génératrices principales.

Pour trouver la rencontre de cette surface et de la droite horizontale d, d', conduisons par celle-ci un plan horizontal auxiliaire, qui coupe g, g' en μ, μ', et l'hyperboloïde suivant un parallèle dont la projection horizontale a son centre en z et dont μ est un point de passage. Traçons cette circonférence et prenons ses rencontres m_1, m_2 avec d, relevons enfin ces derniers points en m'_1, m'_2; nous avons ainsi les points (m_1, m'_1), (m_2, m'_2) qu'il fallait construire.

522. Problème XI. — *Mener par une droite donnée un plan tangent à l'hyperboloïde de révolution à une nappe. — Condition de possibilité du problème.* — Le plan tangent doit contenir deux génératrices de

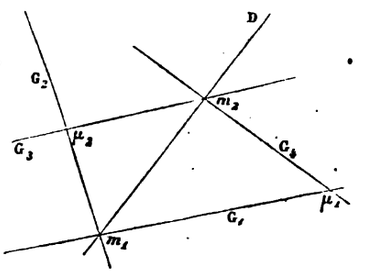


FIG. m_2.

systèmes différents, et comme ces droites sont, avec celle qu'on nous donne, dans un même plan, on peut dire que la droite donnée doit couper la surface, à moins qu'elle ne soit tout à la fois dans un plan

asymptotique et parallèle aux deux génératrices de l'hyperboloïde qui déterminent ce plan. On exprime ce résultat en disant :

Pour qu'on puisse conduire par une droite un plan tangent à l'hyperboloïde de révolution à une nappe, il faut et il suffit que la droite coupe la surface en deux points situés à distance finie ou infinie.

Passons à la détermination des plans tangents.

Soit D la droite donnée (fig. m_2), supposons que ses points de rencontre m_1, m_2 avec la surface aient été construits (§ **519**) ; par chacun d'eux il passera deux génératrices que l'on trouvera sans peine : soient G_1, G_2 celles qui passent par m_1 et G_3, G_4 celles qui passent par m_2. Le plan tangent cherché contient un couple de ces droites ; il y a lieu de vérifier les diverses combinaisons qu'elles peuvent produire lorsqu'on les associe deux à deux. Le plan conduit par G_1, G_2 est bien tangent en m_1, mais il ne saurait contenir D ; car, pour qu'il la contînt il faudrait qu'il contînt également m_2, son intersection avec la surface serait alors au moins formée des droites G_1, G_2 et du point m_2, ce qui est inadmissible. On rejette de même la combinaison G_4, G_3.

Il reste alors les plans conduits par G_1, G_4 et par G_2, G_3 qui sont évidemment les solutions du problème ; les contacts se font au croisement μ_1, μ_2 des droites (G_1, G_4), (G_2, G_3).

523. Problème XII. — *A l'hyperboloïde gauche de révolution mener, par un point, un plan tangent dont le contact soit sur un méridien assigné.* — Le plan tangent doit contenir la perpendiculaire au plan méridien menée par le point donné : on tracera cette ligne et on retombera sur la question précédente.

524. Problème XIII. — *Mener à l'hyperboloïde, parallèlement à une droite donnée, un plan tangent dont le contact soit sur un méridien désigné.* — Par la droite et par une perpendiculaire menée de l'un de ses points au plan du méridien donné on conduit un plan ; le problème se réduit ensuite à celui de construire, parallèlement au plan ainsi trouvé, un plan tangent à l'hyperboloïde (§ **510**).

525. Problème XIV. — *Trouver la courbe de contact et la trace horizontale d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à l'hyperboloïde de révolution à une nappe.* — On peut employer la méthode des enveloppées sphériques, coniques ou cylindriques, en recourant aux constructions que nous avons expliquées au sujet des surfaces de révolution quelconques. Une solution plus simple consiste à conduire par les génératrices rectilignes et par le sommet du cône (placé à distance finie ou infinie) des plans, et à résoudre sur chacun d'eux le problème inverse du plan tangent (§ **504**).

Sachant construire la courbe de contact, on saura construire la trace du cône ou du cylindre. Les points remarquables se déterminent comme il a été dit pour les surfaces quelconques de révolution.

526. Tangente en un point quelconque de la courbe de contact. — Soient S le sommet du

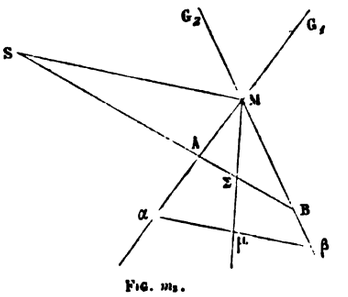


FIG. m_3.

cône (fig. m_3), M le point et G_1, G_2 les génératrices qui s'y croisent. Nous savons que la tangente est la polaire du point S par rapport à l'intersection de la surface et de son plan tangent en M,

intersection qui se trouve formée des droites G_1, G_2; en sorte que si l'on trace dans ce plan angent une divergente SAB et que l'on prenne le conjugué harmonique Σ du point S par rapport à A, B, on aura, par la droite de jonction des points Σ, M, la tangente cherchée. Joignons SM et observons que les quatre droites se croisant en M divisent harmoniquement la divergente SB, il en résulte que les droites MS, MΣ sont conjuguées harmoniques de celles MA, MB; on en déduit que la tangente peut être obtenue en menant la parallèle $\alpha\beta$ à SM comprise entre G_1, G_2, en prenant son milieu μ, que l'on unit par une droite au point M.

527. Application. — *Conduire par une droite donnée un plan tangent à une surface de révolution quelconque.*

Procédé de Monge. — Solution générale. — Concevons un hyperboloïde auxiliaire qui serait engendré par la rotation de la droite donnée autour de l'axe de la surface de révolution; le plan tangent cherché contient une génératrice de l'hyperboloïde, il touche donc cette surface en un point de la droite donnée. Ce point de contact se trouve à la rencontre de cette droite et d'un plan conduit par l'axe commun aux deux surfaces considérées, dans une direction perpendiculaire au plan tangent cherché, et ce plan perpendiculaire n'est autre que celui du méridien de contact pour la surface de révolution donnée. En somme, on peut dire que le plan tangent cherché touche les deux surfaces en deux points placés sur le même plan méridien, et que, par suite, la trace du plan tangent sur ce méridien n'est autre chose qu'une tangente commune aux méridiens correspondants des deux surfaces de révolution.

D'après cela, le tracé s'exécutera en construisant l'hyperbole méridienne principale de l'hyperboloïde, en tirant aux méridiens principaux des deux surfaces une tangente commune, que l'on fera tourner, autour de l'axe de la surface de révolution, jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite donnée; dans cette position elle déterminera avec celle-ci le plan tangent demandé.

Exécution de l'épure. — Soient z, z' l'axe de la surface (*fig.*. 338, pl. XXXIV)), μ' son contour apparent en projection verticale et d, d' la droite donnée.

Cherchons à déterminer l'hyperbole méridienne principale de l'hyperboloïde auxiliaire, il faut pour cela couper cette surface par le plan de front dont la trace horizontale F passe par z. Le cercle de gorge se projette horizontalement suivant un cercle de centre z et de rayon égal à la perpendiculaire zp, menée à d, par z; quant à la projection verticale du collier, après avoir relevé p en p' sur d', on l'obtient en tirant par p' une parallèle à la ligne de terre; laquelle donne 1° par son point de rencontre avec z le centre o' de la projection verticale de l'hyperbole méridienne cherchée, et, 2° par son point de rencontre s' avec la ligne de rappel tangente à la projection horizontale du collier l'un des sommets de l'axe transverse de cette même hyperbole.

Construisons maintenant les asymptotes de l'hyperbole méridienne; en vue de ce but, amenons, par une rotation autour de z, z', la droite d, d' dans un plan de front: sa projection horizontale se place sur la tangente p_1t menée à la projection du collier dans la direction xy; p, p' vient en p_1, o'; la rencontre a, a' de d, d' avec le plan de front dont la trace horizontale est F se place en a_1, a'_1; en unissant les points o', a'_1 on a l'une des asymptotes cherchées; l'autre s'obtient en prenant simplement la droite $o'a'_2$ symétrique de $o'a'_1$ par rapport à l'axe $o's'$. On trace alors, à l'aide des propriétés segmentaires, l'une des branches H' de cette l'hyperbole. Le tracé de cette hyperbole est soumis à cette vérification que d' doit toucher la courbe H' en a'.

Tirons les tangentes communes $b'_1m'_1$, $c'_1n'_1$ aux courbes μ', H' et faisons-les tourner jusqu'à ce qu'elles viennent rencontrer d, d'.

On pourrait construire les cônes engendrés par la rotation de chacune de ces tangentes autour de z, z' et prendre les rencontres de ces cônes avec d, d'; mais il est plus court de remarquer que c'est le point de contact b'_1 ou c'_1 qui doit venir se placer dans la rotation sur d'; ces contacts décrivent des parallèles à xy et viennent sur d' en b', c', ces derniers correspondent en projection horizontale à ceux b, c que l'on obtient par la rencontre de d et des lignes de rappel menées par b', c'; ainsi donc (b', b), (c', c) sont les points en lesquels l'hyperboloïde touche les deux plans qui satisfont aux conditions du problème. Les méridiens communs de contact ont alors pour trace horizontale soit zb, soit zc, et c'est dans ces plans méridiens que nous devons, par une rotation autour de z, z', amener les contacts (m'_1, m_1) (n'_1, n_1) de la surface donnée avec les plans cherchés: m_1, m'_1 décrit un arc de cercle dont la projection verticale est la parallèle à la ligne de terre menée par m'_1, dont la projection horizontale se fait en vraie grandeur suivant un arc de cercle de centre z et de rayon zm_1; cet arc vient se limiter sur le méridien zb au point m, m' qui donne l'un des contacts cherchés. En opérant pareillement pour n_1, n'_1 on trouve le second contact n, n'.

On connaît donc, pour chacune des solutions, une droite d, d' et un point m, m' ou n, n'; les deux plans tangents sont ainsi déterminés.

EXERCICES SUR LES PLANS TANGENTS AU CONE, AU CYLINDRE ET AUX SURFACES DE RÉVOLUTION

528. Problème I. — *Deux droites étant données, déterminer, par l'emploi d'un cylindre de révolution ayant pour axe l'une d'elles et touchant l'autre, leur commune perpendiculaire.* — Soient (d, d'), (d_1, d'_1) les droites données (*fig.* 339, pl. XXXIV).

Solution générale. — Par un point de D on conduit une parallèle Δ à D_1, et l'on observe que le plan des droites D, Δ doit être tangent au cylindre de révolution dont l'axe est D_1 et dont le rayon est égal à la plus courte distance des droites données.

Pour déterminer ce cylindre, nous le couperons, ainsi que le plan tangent et la droite D_1, par un plan auxiliaire perpendiculaire à celle-ci, les rencontres seront : sur le plan une droite facile à construire, sur le cylindre un cercle inconnu tangent à cette droite et sur D_1 le centre de ce cercle. Ce cercle se construira alors aisément et la parallèle à D_1 menée par son contact avec le plan tangent sera la génératrice de contact du cylindre; c'est elle qui donnera, en son croisement avec D, l'un des pieds de la plus courte distance, on construira alors la commune perpendiculaire en conduisant par le pied ainsi trouvé une perpendiculaire au plan des droites D, Δ.

Construction de l'épure. — Plaçons sur d, d' le point a, a' dont la projection verticale est au croisement des droites d', d'_1 et conduisons par ce point la parallèle δ, d'_1 à d_1, d'_1; prenons ensuite les traces (θ, θ'), (θ_1, θ'_1) de (d, d'), (δ, d'_1) et unissons-les par une droite, qui est la trace horizontale du plan tangent au cylindre.

Conduisons le plan sécant auxiliaire par la trace horizontale h de la droite d_1, d'_1 et dirigeons-le perpendiculairement à cette même droite; sa trace horizontale Q est la perpendiculaire menée par h à d_1. — Le point h est le centre du cercle de section du plan sécant et du cylindre.

Construisons la tangente à ce cercle, elle sera la droite de rencontre du plan tangent et du plan sécant, par suite l'intersection h_1 des traces horizontales de ces plans est l'un des points de passage de

cette tangente. Il en faut trouver un autre ; à cet effet, coupons par le plan vertical projetant de d_1, d'_1 les deux plans dont on cherche la rencontre, et rabattons ce plan projetant sur le plan horizontal ; le point b, a', de d_1, d'_1, vient en B_1, sur une perpendiculaire à d_1 menée par b, à une distance bB_1 de ce point égale à sa cote $\alpha a'$; h reste fixe, la droite d_1, d'_1 se rabat donc suivant celle qui unit les points h, B_1, la rencontre du plan projetant et du plan tangent se rabat alors suivant une parallèle $t\,I_1$, à hB_1, menée par t, et celle du plan du cercle avec le même plan projetant se rabattra à son tour sur la perpendiculaire à tI_1 menée par h ; c'est au pied F de cette ligne que se trouve rabattu le second point de la tangente au cercle que nous cherchons à construire.

Relevons ce point dans sa position naturelle et rabattons-le ensuite autour de Q, il vient alors en F_2, sur d_1 et à une distance de h égale à hF_1, que l'on reporte par un arc de cercle.

Le rabattement de la tangente autour de Q est donné par la droite qui unit h_1, F_2 et la perpendiculaire hG_1, menée par h à cette tangente, est à la fois la véritable grandeur du rayon du cercle et celle de la plus courte distance cherchée.

En relevant le point G_1, il viendrait sur une perpendiculaire à Q menée par ce point, dans une position qu'il est inutile de déterminer puisque la génératrice de contact qui y passe se projette horizontalement sur cette même perpendiculaire.

Conduisons donc par G_1 une perpendiculaire à Q, qui est la projection horizontale de la génératrice de contact, prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre p avec d, relevons p en p', et nous aurons en p, p' l'un des pieds de la plus courte distance.

Actuellement, menons par p la perpendiculaire pq à $\theta\theta_1$, relevons sa rencontre q avec d_1, en q', sur d'_1 et sur la ligne de rappel menée par q ; joignons enfin $p'q'$; les droites $p, q, p'q'$ sont les projections de la plus courte distance.

529. Problème II. — *Construire une normale commune à deux cônes donnés.* — Soient Σ, Σ_1, les deux cônes donnés (fig. m_4) et supposons que NN_1 représente une normale commune ; les plans tangents

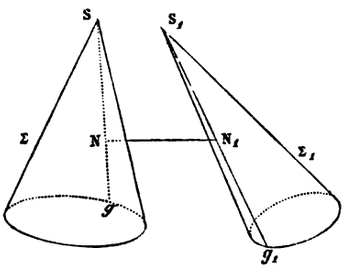


FIG. m_4.

menés par N, N_1 aux cônes respectifs doivent être perpendiculaires à NN_1 et par suite parallèles ; il faut, en outre, que NN_1 soit perpendiculaire aux génératrices de contact Sg, S_1g_1.

Le problème se résoudra donc en conduisant aux cônes des plans tangents parallèles (§ 363) ; après quoi, il ne s'agira plus que de déterminer la plus courte distance des génératrices de contact.

La solution donnée étant indépendante de la position des sommets des cônes, s'appliquera encore lorsque un ou deux des sommets seront à l'infini dans une direction donnée.

530. Problème III. — *Construire une sphère qui touche, par deux points diamétralement opposés, deux cônes, un cône et un cylindre ou deux cylindres donnés.* — Le diamètre de la sphère qui unit les contacts

est la normale commune aux deux surfaces données; on sait donc le construire; il reste alors à décrire sur ce diamètre la sphère cherchée.

531. Problème IV. *Trois cercles étant donnés sur la surface d'une sphère, construire un quatrième cercle tangent aux trois premiers.*

Solution générale. — Nous savons que l'on peut toujours par deux cercles placés sur une même sphère conduire deux cônes (§ 174, 3°). Si donc par l'un des cercles donnés et par chacun des deux autres on fait passer un cône, et si l'on conduit à ses cônes, qui ont une base commune, un plan tangent commun, il sera celui de l'un des cercles cherchés, et les contacts de ce plan avec les courbes données seront également les points de contact de ces mêmes courbes avec la circonférence que l'on veut déterminer; on pourra donc, sans construire le plan tangent déterminer le cercle cherché par trois de ses points.

Exécution de l'épure. — Supposons le centre de la sphère en o, o' (*fig.* 340, pl. XXXV) et représentons cette surface par ses contours apparents sur les deux plans de projection.

Rien n'empêche d'amener l'un des cercles donnés cd, $c'd'$ dans un plan de front. Pour déterminer commodément les deux autres nous donnerons les projections verticales $a'b'$, $u'v'$ de leurs cordes communes avec le grand cercle de front de la sphère, les inclinaisons des plans de ces deux cercles sur celui du même grand cercle de front et le sens de ces inclinaisons.

Il y a lieu de commencer le tracé par celui des projections des cercles donnés.

Projections du cercle relatif a la corde $a'b'$, ab.—Menons par o' la perpendiculaire $o'e'$ à cette corde, le plan perpendiculaire au plan vertical conduit par $o'e'$ est un plan de symétrie du cercle considéré, il en résulte que sur ce plan la projection du cercle se réduit à une droite, laquelle s'incline sur le plan de front conduit par o,o' de l'angle plan du dièdre donné.—Prenons pour nouveau plan vertical de projection le plan de front du point o,o' et pour la ligne de terre $e'o'$: les deux projections de la sphère se confondent alors avec le grand cercle figuré sur l'ancien plan vertical; la projection rectiligne du cercle cherché est une droite $h'_1g'_1$ partant de f' et s'inclinant sur $o'e'$ de l'angle donné, dans le sens correspondant à celui qui est assigné.

Cette droite $g'_1h'_1$ fait connaître, dans sa véritable grandeur, le diamètre du cercle. Lorsqu'on relève la figure, pour l'amener sur sa position première, g'_1, h'_1 se projettent en g', h'; le milieu ω'_1 de $g'_1h'_1$ vient se projeter en ω' qui est le centre de la projection verticale du cercle, et le diamètre de front de ce cercle a pour projection verticale la parallèle à $a'b'$ menée par ω', laquelle projection doit être limitée aux points i',j' que l'on obtient en portant $\omega'i' = \omega'j' = \omega'_1g'_1$.

Pour trouver la projection horizontale du cercle, on projette d'abord (g'_1, g'), (h'_1, h') sur l'ancien plan horizontal, ils viennent sur les lignes de rappel menées par g',h' à des distances gg_1, hh_1 du plan de front F_1 conduit par o, o' égales à $g'g'_1$, $h'h'_1$ et placées : la première, en avant de F_1; l'autre en arrière du même plan. — En joignant les points h,g on obtient un diamètre de la projection considérée, la ligne de rappel issue de ω' vient y déterminer le centre ω de cette projection; en conduisant ensuite par ce point ω une parallèle à la ligne de terre et en prenant ses rencontres i,j, avec les lignes de rappel des points i',j', on trouve la projection du diamètre du cercle perpendiculaire à HG.

Actuellement nous connaissons les deux axes $g'h'$, $i'j'$ de la projection verticale, et les points a',b' de cette courbe placés sur le contour apparent de la sphère en projection verticale; nous pouvons alors tracer l'ellipse $h'j'g'i'$ et indiquer sa visibilité.

Sur le plan horizontal nous connaissons les extrémités (h,g), (i,j) de deux diamètres conjugués; quant aux points sur le contour apparent, rien n'est plus aisé que de les déterminer directement,

mais, pour éviter de charger l'épure de nouvelles lignes, nous avons préféré construire les rencontres k', l' de la projection verticale du cercle et de celle sur le même plan du contour apparent horizontal de la sphère, et prendre ensuite les projections horizontales k, l correspondantes. On peut maintenant tracer la projection horizontale du cercle et indiquer la visibilité.

Pour la circonférence dont $u'v'$ est la projection verticale d'une corde, on a opéré pareillement; les constructions et les notations indiquées sur l'épure suffiront donc pour faire comprendre le tracé des projections de cette ligne.

Construction du cercle tangent. — Déterminons le sommet de l'un des cônes que l'on peut mener par les cercles ($hjgi$, $h'j'g'i'$), (cd, $c'd'$) : en conduisant par les points c, d deux tangentes à l'ellipse $hjgi$ comprenant entre elles cette ellipse on trouve, en leur croisement σ, la projection horizontale de ce sommet; d'autre part, le plan perpendiculaire au plan vertical conduit par $o'e'$ est un plan de symétrie du cône cherché, il contient donc son sommet.

Ce point se trouve par conséquent projeté verticalement à la rencontre σ' de la ligne de rappel menée par σ et de la droite $o'e'$.

Pour le second cône auxiliaire nous adopterons les cercles ($hjgi$, $h'j'g'i'$), ($pnqm$) ($p'n'q'm'$) et nous construirons, par le secours des tangentes communes extérieures, le sommet σ_1, σ_1' de l'un des cônes qui enveloppent ces cercles. Cela fait, cherchons à déterminer les plans tangents communs aux deux cônes, ce qui est possible puisqu'ils ont une base commune ($ihjg$), ($i'h'j'g'$).

Pour la simplicité du tracé nous déterminerons un seul de ces plans tangents et cela à l'aide des trois contacts de ce plan sur les cercles donnés.

Ces trois points de contact se construisent en traçant les projections $\sigma\sigma_1$, $\sigma'\sigma_1'$ de la droite des sommets, dont on détermine ensuite les rencontres (w, w') (w_1, w'_1) (w_2, w'_2) avec les plans des cercles donnés, et en menant enfin, par chacun de ces points, des tangentes aux courbes respectives, tangentes que l'on doit convenablement placer eu égard à la position des sommets des cônes par rapport aux plans des bases. La figure suffit pour vérifier les combinaisons de ces tangentes; on y voit que les contacts pour l'une des solutions du problème se font en (γ, γ'), (γ_1, γ'_1), (γ_2, γ'_2). Au point où nous en sommes le problème peut se réduire à celui de la construction des projections du cercle qui passe par les trois contacts trouvés. — Pour exécuter ce tracé, unissons par des droites γ, γ' aux points (γ_1, γ'_1) (γ_2, γ'_2) et construisons l'horizontale du plan de ces deux droites à la cote du centre de la sphère. — Sa projection verticale est la parallèle à la ligne de terre déjà menée par o', parallèle qui rencontre en α', α'_1 les droites $\gamma'\gamma'_2$, $\gamma'\gamma'_1$, les lignes de rappel menées par α', α'_1 déterminent en α, α_1 les projections horizontales de deux points de l'horizontale cherchée, par suite, la droite de jonction des points α, α_1 est la projection horizontale de l'horizontale cherchée, ses rencontres β, β_1 avec le contour apparent de la sphère en projection de même nom sont à la projection horizontale du cercle tangent, et limitent la partie visible de cette projection.

Changeons de plans coordonnés comme nous l'avons fait pour déterminer les ellipses déjà tracées: soient pris pour plan horizontal celui du centre de la sphère et pour second plan de projection le plan vertical conduit par la perpendiculaire oo_1 menée par o à la corde horizontale $\beta\beta_1$; oo_1 est la nouvelle ligne de terre, α_2 est à lui-même sa propre projection et γ, γ' se projette horizontalement en γ et verticalement en γ_3, sur une perpendiculaire à oo_1, menée par γ, à une distance $\gamma_4\gamma_3$ de oo_1 égale à la différence de niveau des points o', γ'.

La projection verticale du cercle se fait alors sur la droite $\alpha_2\gamma_3$, qu'on limite au grand cercle du contour apparent horizontal de la sphère, en δ, δ_1; pour revenir à la position initiale on opère comme

pour les cercles donnés. — C'est ainsi que l'on a pu indiquer sur l'épure les axes $\delta_2\delta_3$, $\mu_2\mu_3$ de la projection horizontale, et, sur le plan vertical, en $\delta'_2\delta'_3$, $\mu'_2\mu'_3$, deux diamètres conjugués.

Second tracé des projections du cercle tangent. — Pour construire les projections du cercle, après que l'on a déterminé trois tangentes et leurs contacts par le procédé qui vient d'être indiqué, on peut employer le théorème de *Pascal*.

Rappelons l'énoncé du théorème :

Les côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique se coupent en trois points situés sur une même droite.

Le problème géométrique que nous devons résoudre est le suivant :

Construire une conique connaissant deux tangentes t_1, t_2 (fig. m_5), *leurs points respectifs de contact A, B et un point C de la courbe.*

Nous connaissons en somme cinq points de la conique : deux, que nous désignerons par 1 et 2, confondus en A, deux autres, désignés par 3 et 4, confondus en B et un point C, que nous désignerons par 5. — Ces cinq points déterminent la conique; proposons-nous d'en construire d'autres points; tirons par C une divergente quelconque CD, et cherchons le second point de la courbe qu'elle contient : les cinq points donnés et le point inconnu forment un hexagone inscrit à la conique, appliquons-lui le théorème de Pascal; prenons le côté 12, c'est-à-dire la tangente t_1, laissons les deux côtés 23, 34 qui suivent et construisons la rencontre α de t_1 avec 45; prenons le côté 23, laissons ceux 34, 45 qui suivent et cherchons la rencontre β du côté 23 avec CD; traçons la droite $\alpha\beta$,

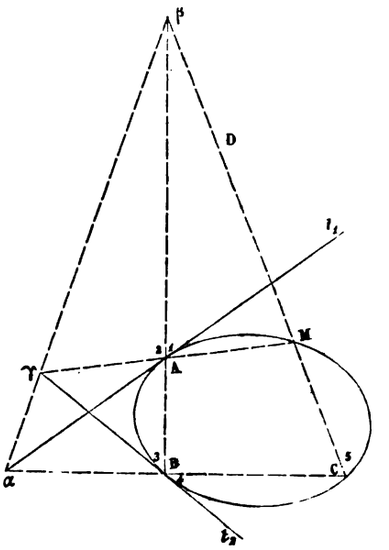


Fig. m_5

c'est sur elle que 34 et le côté inconnu doivent se couper, prolongeons donc 34 jusqu'en γ, sur $\alpha\beta$, menons la droite γA et prenons sa rencontre M avec la divergente CD; le point M ainsi trouvé, appartient à la conique, et, par ce procédé, en variant la position de la divergente choisie, on peut trouver autant de point de la courbe que l'on veut.

Nombre de solutions. — Prenons, pour base commune des cônes, l'une des courbes données; cette base forme avec la seconde courbe donnée deux cônes qu'il faut successivement associer aux deux cônes que l'on obtient par la combinaison de la base commune avec le troisième cercle donné; ce qui produit quatre groupes de deux cônes et comme chaque groupe donne deux solutions, le problème en admet huit en général.

532. Problème V. — *On demande de représenter par ses projections le corps engendré par un triangle équilatéral tournant autour d'un de ses côtés.*

Nous supposerons que l'on donne simplement par ses projections le côté du triangle qui se trouve sur l'axe de rotation; son milieu est le centre d'une sphère tangente aux deux cônes décrits par le triangle équilatéral dans sa rotation; on détermine facilement le rayon de cette sphère et l'on trace ses contours apparents; en menant ensuite par chaque projection des extrémités de la droite donnée des tangentes aux contours apparents correspondants de la sphère, on a les contours apparents sur les deux plans coordonnés du double cône qu'engendre le triangle équilatéral.

Quant aux projections du cercle décrit par le sommet du triangle extérieur à l'axe, on les obtiendra très facilement à l'aide du tracé donné au paragraphe 136.

533. Théorème I. — *Par une courbe du second degré et trois points on peut conduire deux surfaces coniques du second degré et l'on n'en peut conduire que deux.* Soient γ la courbe du second degré (fig. m_6) et A,B,C les points.

Si les cônes existent, l'une de leurs génératrices passe par A, s'appuie sur γ et passe encore par l'un des sommets des cônes cherchés, elle est donc également génératrice d'un cône auxiliaire qui aurait

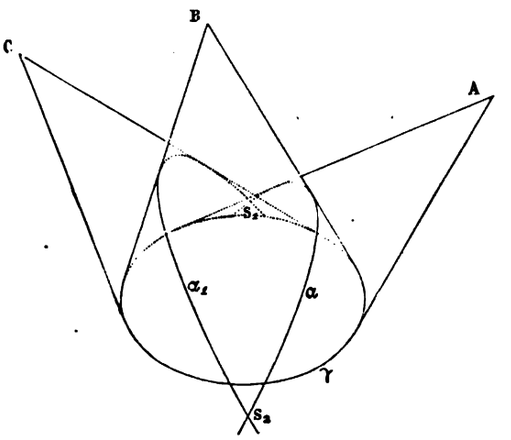


Fig. m_6.

pour sommet A et pour base γ, il en résulte que les sommets cherchés doivent appartenir à ce dernier cône; ils doivent, pour le même motif, appartenir aux deux cônes de sommet B, C et de base γ.

Il faut donc, si les cônes remplissent les conditions imposées par l'énoncé existant, qu'ils aient leurs sommets à la rencontre des cônes auxiliaires. Or, les cônes de sommets A, B ont une première courbe plane commune γ du second degré, ils s'entrecoupent donc suivant une autre courbe α aussi du second degré; pareillement les cônes de sommets C, B ont pour intersection γ et une courbe α_1

encore du second degré; α et α_1, qui se trouvent sur B, se coupent et se coupent seulement en deux points S_1, S_2; en sorte que si le problème est possible il n'offrira que deux solutions et les sommets seront soit en S_1, soit en S_2.

Or, il est manifeste que le cône de sommet S_1 ou S_2 et de base γ a pour génératrices les droites S_1 A, S_1 B, S_1 C ou S_2A, S_2B, S_2C et qu'il répond, en conséquence, aux conditions que l'énoncé impose; le problème est donc possible.

534. Problème VI. — *Mener à un cône conduit par une courbe du second degré γ, γ' et trois points (a, a'), (b, b') (c, c') un plan tangent par l'un c,c' des points donnés* (*fig.* 341, pl. XXXIV).

Pour la simplicité du tracé, nous avons pris le plan vertical de projection perpendiculaire à celui de la courbe donnée, celle-ci se projette alors verticalement suivant une droite γ'.

Coupons le cône par le plan des points donnés, la section est une conique dont ces points font partie et qui passe également par les deux rencontres de son plan avec γ, γ'; construisons ces deux points d'intersection, dans ce but, traçons les projections des droites $(a'b', ab)$, $(a'c', ac)$, la première de ces droites coupe le plan de la conique en i', i, la seconde le coupe en i'_1, i_1; la droite ii_1 est la corde commune aux projections horizontales des deux coniques; elle donne donc, en ses rencontres d, f avec γ, deux points appartenant à la projection horizontale de la conique d'intersection du cône et du plan des points donnés. Cette projection horizontale se trouve alors déterminée par les cinq points a,b,c,d,f, et la courbe correspondante de l'espace l'est à son tour par sa projection horizontale et par son plan, qui n'est autre que celui des points donnés.

Le plan tangent au cône en c, c' contient la tangente en ce point à la conique que nous venons de déterminer; cherchons la projection horizontale de cette tangente; considérons l'hexagone $aced/b$, dont l'un des côtés ce a une longueur nulle et se dirige suivant la tangente que nous cherchons. Cet hexagone est inscrit à la projection horizontale de la conique auxiliaire; en lui appliquant le théorème de Pascal (§ **531**) nous trouvons, par la rencontre des côtés opposés ac, df, le point i_1 déjà employé; par celle des côtés opposés cd, ab, le point α_1, ce qui donne la droite des points de concours $\alpha_1 i_1$; en prolongeant alors bf jusqu'à sa rencontre α_2 avec $\alpha_1 i_1$, on a un point de la tangente cherchée, laquelle s'obtient enfin en unissant α_2 à e.

En ce qui concerne la projection verticale de la tangente, on prend l'intersection t des droites $\alpha_2 e$, df que l'on relève en t' sur la projection verticale γ' de DF, et on unit par une droite les points c', t'.

Nous connaissons ainsi une droite ct, $c't'$ du plan tangent, il faut en trouver une autre; on la détermine par la rencontre du plan tangent inconnu et de celui de la courbe γ, rencontre qui doit être tangente à γ, γ' et dont t, t' est un point de passage; en conduisant par t deux tangentes tm_1, tm_2 à γ, on a les projections horizontales des tangentes cherchées, leurs projections verticales $t'm'_1$, $t'm'_2$ sont confondues sur γ'.

Les deux couples de tangentes $(tc, t'c')$ $(tm_1, t'm'_1)$ et $(tc, t'c')$, $(tm_2, t'm'_2)$ donnent les deux solutions du problème, solutions qui répondent aux deux cônes que l'on peut conduire par la courbe γ, γ' et les trois points donnés (§ **533**).

535. Théorème II. — *Par deux courbes du second degré qui se coupent en deux points, on peut mener deux cônes, et on n'en peut mener que deux.* — Soient deux courbes de second degré γ, γ_1 (fig. m_7) qui se coupent en deux points M,M_1; plaçons arbitrairement trois points A,B,C sur l'une d'elles γ_1 et conduisons deux cônes par γ et par ABC; je dis que ces cônes contiendront γ_1: effectivement, qu'on les coupe par le plan des trois points A,B,C et on aura une conique passant, comme γ_1, par les cinq

points A,B,C,M,M_1, laquelle n'est autre que γ_1; les deux cônes considérés passent donc par γ,γ_1 et ce sont les seuls qui y passent, la proposition est donc démontrée.

536. Problème VII. — *Construire les sommets des deux cônes que l'on peut conduire par une parabole placée sur le plan horizontal, et par un cercle décrit sur une corde de la parabole comme diamètre, dans un plan incliné de 45° sur l'horizon.* — Soient p (*fig.* 342, pl. XXXIV) la parabole donnée et ab la corde qui sert de diamètre au cercle. — Les plans tangents en a, b doivent se couper suivant une droite passant par les sommets cherchés, droite qui a pour trace horizontale la rencontre θ des tangentes à la parabole menées par a, b et qui doit être parallèle à la ligne de plus grande pente du plan du cercle; en effet, les tangentes en a et en b au cercle sont des lignes de plus grande pente de son plan, et, comme elles sont entièrement contenues dans les plans tangents aux cônes en a,b, elles sont parallèles à leur intersection.

Cette intersection est donc une droite inclinée de 45° sur l'horizon et projetée horizontalement suivant la perpendiculaire θd, menée de θ, à ab.

Conduisons par cette droite et par le centre c du cercle un plan sécant, dont la trace horizontale est la droite de jonction des points θ, c. Ce plan détermine : sur la parabole le point t, sur le plan du cercle un diamètre de ce cercle perpendiculaire à ab, et sur le cercle lui-même les extrémités du diamètre perpendiculaire à ab.

Les projections des extrémités de ce diamètre se trouvent en traçant d'abord la projection horizontale du diamètre, qui n'est autre qu'une perpendiculaire ck à ab, et en le rabattant autour de cette projection; il vient alors sur une ligne E_1E_2 que l'on obtient en menant par c une droite inclinée de 45°

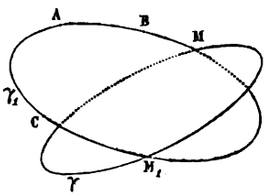


FIG. m_7.

sur ck, et en y portant, de part et d'autre de c, les longueur cE_1, cE_2 égales aux rayons du cercle. — Lorsqu'on remet en place la figure, E_1, E_2 se projettent horizontalement en e_1, e_2, par suite les droites de rencontre des cônes et du plan sécant sont projetées horizontalement suivant e_1t, e_2t et donnent, par leurs rencontres avec θd, les projections horizontales s_1,s_2 des sommets des cônes.

Quant aux projections verticales correspondantes, on les obtient simplement en se basant sur la valeur particulière de l'inclinaison de la droite des sommets sur le plan horizontal ; cette droite, en effet, s'incline de 45° sur l'horizon ; par suite, la cote du point s_2, comptée au-dessus du plan horizontal, si l'on admet par exemple que le point E_2 se trouve placé au-dessous de ce même plan, est précisément égale à θs_2, et celle du second sommet, comptée au-dessous du plan horizontal, est, pour le même motif, égale à $s_1\theta$. On peut donc figurer les projections verticales s_1, s'_2 des sommets.

Nous avons indiqué également sur l'épure les contours apparents en projection du cône de sommet s_2, s'_2 pour l'autre cône les contours apparents se dessineraient pareillement.

537. Problème VIII. — *Deux droites et un point sur chacune d'elles étant donnés, déterminer deux cylindres de révolution touchant les droites aux points donnés et tels :*

1° *Qu'en ces points les plans tangents soient parallèles entre eux.*

2° *Que ces mêmes points appartiennent à une section droite du cylindre.*

1° Soient : D, D_1, c, c_1 (fig. m_8) les droites et les points donnés; les plans tangents en c, c_1 devant être parallèles, et devant, en outre, contenir, l'un D, l'autre D_1, s'obtiendront en conduisant par D et par D_1 des plans P, P_1 respectivement parallèles à D_1 et à D. — Le milieu O de la droite cc_1 est, en conséquence, un point de l'axe du cylindre et les projections $c\omega$, $c_1\omega_1$ de cc_1 sur chacun des plans P, P_1

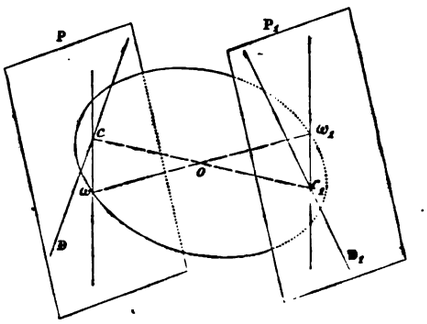


Fig. m_8.

ne sont autre chose que les génératrices de contact; par suite, la circonférence décrite, dans un plan perpendiculaire aux génératrices $c\omega$, $c_1\omega_1$, sur $\omega\omega_1$ comme diamètre, sera la base du cylindre.

2° Reprenons les données (fig. m_9).

La droite qui va de c à c_1 doit être une corde d'une section droite; par suite, le plan Q mené perpendiculairement à cette corde, en son milieu o, doit passer par la droite de rencontre des plans tangents en c, c_1; or, les points d'intersection a, b du plan Q avec les droites D, D_1 appartiennent à l'in-

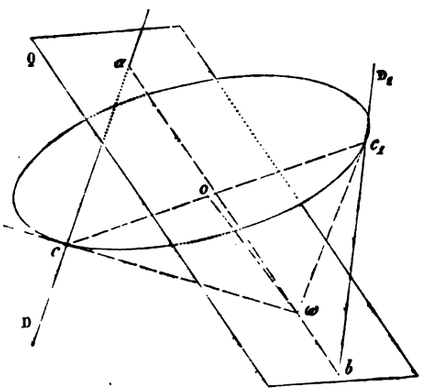


Fig. m_9.

tersection des plans tangents avec Q, par suite en unissant ab on trouve la droite commune à Q et aux plans tangents considérés, laquelle doit être parallèle aux génératrices des deux cylindres.

Du point o menons une perpendiculaire sur ab, soit ω son pied; traçons les droites ωc, ωc_1; cc_1 est perpendiculaire à Q, $o\omega$ est perpendiculaire à la droite ab du plan Q; par suite, d'après le théorème des trois perpendiculaires, les droites $c\omega$, $c_1\omega$ sont également perpendiculaires à ab.

Le plan du triangle $c\omega c_1$ est donc perpendiculaire à ab; d'ailleurs, Q est le lieu des points équidistants de cc_1, on a donc

$$c\omega = c_1\omega.$$

De cette égalité résulte la possibilité de tracer un cercle qui touche en c, c_1 les droites $c\omega$, $c_1\omega$ et alors, en adoptant ce cercle pour base d'un cylindre dont on dirigera les génératrices suivant ab, on aura la solution du problème.

L'exécution des épures ne peut, après ce qui vient d'être dit, offrir aucune difficulté et sera pour le lecteur un exercice utile.

538. Problème IX. — *Conduire, sans recourir aux sphères inscrites, un plan tangent commun à deux cônes de révolution de même sommet.* — Supposons que l'on ait rendu le plan des deux axes parallèle au plan vertical; soient, dans cette position (*fig.* 343, pl. XXXIV), $(sz, s'z')$, $(sz_1, s'z'_1)$ les projections des axes. Pour achever de déterminer les cônes, nous donnerons encore leurs angles générateurs et nous pourrons tracer les contours apparents en projection verticale de ces surfaces, lesquels s'obtiennent, pour le premier cône, par les droites $s'g'_1$, $s'g'_2$ placées de part et d'autre de $s'z'$ et s'inclinant sur cette ligne de l'angle générateur correspondant; pour le second, par $s'g'_3$, $s'g'_4$, qui s'inclinent, de part et d'autre de $s'z'_1$, du deuxième angle générateur donné.

Coupons les deux cônes par une sphère de rayon arbitraire et dont le centre sera au sommet commun s, s'; le contour apparent vertical de la sphère est un cercle de centre s' de rayon égal à celui de la sphère et les rencontres avec les cônes sont deux cercles projetés verticalement suivant les droites $a'b'$, $c'd'$.

Ces deux cercles sont tracés sur la même sphère, on peut donc les placer sur deux cônes (§ **174**, 3°); les contours apparents verticaux de ces cônes sont, pour le premier, les droites $b'd'$, $a'c'$, qui se croisent en σ'_1; pour le second $a'd'$, $b'c'$, qui se croisent en σ'_2. — En sorte que les sommets des deux cônes se projettent en (σ'_1, σ_1), (σ'_2, σ_2).

Or, tout plan tangent commun aux cônes donnés contient des tangentes aux deux cercles projetés en $a'b'$, $c'd'$ et touche, par conséquent, l'un des cônes auxiliaires.

On en conclut que les points (σ_1, σ'_1), (σ_2, σ'_2) appartiennent aux plans que nous cherchons; ces plans s'obtiendront donc en menant simplement par chacun des points (σ_1, σ'_1), (σ_2, σ'_2) des plans tangents à l'un des cônes donnés.

539. Problème X. — *Construire les projections de trois cônes de révolution égaux entre eux, ayant leurs axes dans l'angle 1 et se touchant deux à deux par des génératrices : connaissant leur hauteur commune h, sachant en outre que l'un d'eux touche les deux plans de projection, et qu'un autre touche le plan horizontal suivant une génératrice de profil.*

Le sommet commun doit évidemment se trouver sur la ligne de terre; plaçons-le en s, s', dans une position arbitraire sur cette ligne. — Considérons ensuite les deux cônes qui doivent toucher le plan horizontal, ils ont des projections horizontales égales, l'axe de l'un d'eux est la perpendiculaire sz_2 à la ligne de terre; il s'en suit que, en divisant l'angle droit z_2sx en trois parties égales, on trouve la projection horizontale sg de leur génératrice de contact et la projection sz_1 sur le même plan de l'axe du cône qui doit être tangent aux deux plans coordonnés. La projection verticale de cet axe est la droite $s'z_1$ symétrique de sz_1 par rapport à la ligne de terre.

Construction du cône tangent aux deux plans de projection. — Le contour apparent horizontal de ce cône est formé de la ligne de terre et de la droite sg, celui de ce même cône sur le plan vertical

est symétrique par rapport à xy du premier, il se compose donc de la droite xy et d'une seconde droite $s'g'_1$ symétrique de sg par rapport à xy. Il faut construire les projections de la base du cône tangent aux deux plans coordonnés.

Construisons la projection du centre en portant sur l'axe sz_1, $s'z'_1$, à partir du point s, s', la hauteur donnée h; dans ce but amenons, par une rotation autour de la verticale du point s, s', l'axe sz_1, $s'z'_1$ sur le plan vertical de projection; l'un quelconque de ses points m, m' vient en m_1, m'_1 et l'axe prend la position sm_1, $s'm'_1$. En portant sur cette droite la hauteur h, en $s\Omega'_1$, puis en ramenant Ω', sur sa position naturelle, en $\omega'_1\omega_1$, on a les centres des deux projections de la base.

Le rabattement qui vient d'être exécuté peut aussi donner la grandeur du rayon du cercle de base; il suffit pour cela d'élever en Ω'_1 la perpendiculaire Ω'_1A_1 à $s'\Omega'_1$, cette droite Ω'_1A_1 est, dans sa véritable grandeur, le rayon cherché. On peut considérer sA_1 comme le rabattement sur le plan vertical, autour de la verticale du point s, s', de la génératrice de contact du cône avec le plan horizontal; par suite, en décrivant du point s comme centre, avec sA_1 pour rayon, un arc de cercle, on trouve au croisement a_1 de cet arc avec sz_1 le point le plus bas du cercle de base.

Alors, par raison de symétrie, on voit que a_1 est un sommet du petit axe de la projection horizontale de la base, et qu'en prenant ω_1a_2 égal à ω_1a_1 le point a_2 est le second sommet de cet axe.

En conduisant par ω_1 une perpendiculaire au petit axe, on trouve le grand axe de l'ellipse, qu'on a limité en portant sur cet axe, de part et d'autre du point ω, la longueur du rayon Ω'_1A_1.

Actuellement, les quatre sommets a_1, a_2, b_1, b_2 de l'ellipse cherchée permettent de construire cette courbe.

Rien n'est alors plus simple que de tracer la seconde projection de la base; il suffit, en effet, de construire l'ellipse, dont les sommets α'_1, α'_2, β'_1, β'_2 sont symétriques des premiers par rapport à xy. Le point de contact des deux ellipses avec la ligne de terre est immédiatement donné par la projection sur xy des points a_1, α'_1, en d'autres termes ce point de contact est à la rencontre de xy avec la droite α'_1a_1. Les symétriques de ce contact a'_1, par rapport aux deux centres ω_1, ω'_1, font connaître le point le plus bas c de la projection horizontale et celui c_1 qui est le plus haut sur l'autre projection.

Construction du cône qui touche le plan horizontal par une droite de profil. — La droite sg est un axe de symétrie des projections horizontales des deux premiers cônes, ce qui permet de tracer immédiatement la projection horizontale du second cône.

En ce qui concerne la projection verticale, on voit que le centre du cercle de base se projette verticalement en ω'_2 sur le plan de profil du sommet et à la cote du point ω_1, ω'_1. On obtient facilement les sommets s', σ' du petit axe de l'ellipse cherchée; quant à son grand axe, on en a la position en prolongeant l'horizontale $\omega'_1\omega'_2$ et on le limite en ses rencontres b'_3, b'_4 avec les lignes de rappel des sommets b_3, b_4 du grand axe de la projection horizontale; la seconde ellipse peut alors se tracer, c'est elle qui limite la projection verticale du cône sans qu'il y ait lieu de tracer le contour apparent, qui se réduit ici au point s'.

Projections du troisième cône. — Ce cône doit être égal et tangent aux deux premiers; par suite, son axe doit être projeté horizontalement sur sg. — Pour trouver ses contours apparents, nous déterminerons le centre d'une sphère qui le touchera par sa base.

Le centre de cette sphère inscrite se peut obtenir par la rencontre de l'axe du troisième cône et de la normale commune au premier cône et à celui que nous cherchons, menée par le point commun aux bases de ces cônes.

Cherchons la projection horizontale de cette normale. Le long de la base du premier cône, les normales concourent au même point sur l'axe de ce cône; or, en a_1, a'_1, la normale est verticale; donc, a_1, a'_1 est le sommet du faisceau de ces normales. La normale commune a donc pour projection horizontale une droite issue de a_1, qui doit aboutir sur sg et se trouver divisée en deux parties égales en son second point de section avec l'ellipse $a_1b_1a_2b_2$.

Un premier lieu de la seconde extrémité de cette normale est sg; cherchons-en un second : si l'on mène par a_1 des sécantes aboutissant à l'ellipse $a_1b_1a_2b_2$ et qu'on les prolonge, au-delà de leur second point de section, d'une quantité égale à elle-même, le lieu des points ainsi formés devra contenir le point que nous cherchons; or, ce lieu est une courbe homothétique à celle que nous transformons, le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$, et le centre d'homothétie se trouve en a_1; il en faut conclure que cette courbe est une ellipse.

Par là, on réduit le problème à celui de la rencontre d'une droite et d'une ellipse.

On peut le résoudre sans tracer une nouvelle ellipse. Dans ce but, on imagine que cette ellipse est la projection d'un cercle situé dans le plan de base, lequel a pour trace horizontale la perpendiculaire P menée en a_1, à la droite sa_1. Rabattons sur le plan horizontal ce cercle et la droite de son plan, qui se projetterait horizontalement en sg; le cercle rabattu a son centre en c_2, sur a_1s, à une distance de a_1 égale au diamètre b_1b_2 du cercle de base : en décrivant de c_2 comme centre avec c_2a_1 pour rayon, une circonférence, on a le rabattement du cercle; quant à la droite projetée en sg, sa rencontre u avec la charnière ne bouge pas, celle v avec une parallèle à la charnière menée par a_2, vient au croisement V_1 de la perpendiculaire et de la parallèle à P, qui passent : l'une par v, l'autre par le rabattement c_2 du point projeté en a_2.

Traçons la droite uV_1 et prenons sa rencontre o_1 avec la circonférence rabattue; ce point o_1 relevé se projette horizontalement en o, sur la perpendiculaire à P menée par o_1 et sur sg. En unissant par une droite les points a_1, o on trouve la projection horizontale de la normale commune, qui doit, si l'épure est exactement faite, être divisée en deux parties égales en son second point de section γ_1 avec l'ellipse $a_1b_1a_2b_2$. Le point γ_1 a pour projection verticale correspondante γ'_1, et le point de l'espace γ_1, γ'_1 n'est autre chose que le contact des deux bases.

A cause de la symétrie, on trouve, par la rencontre de l'ellipse $a_3b_3a_4b_4$ et de la perpendiculaire à sg menée par γ_1, le contact γ_2 de cette ellipse et de la projection horizontale de la troisième base; par le secours d'une ligne de rappel, on obtient γ'_2.

L'épure doit offrir ces vérifications : 1° que les points γ'_2, γ'_1 doivent se trouver à la même distance de xy, et 2° que les trois points o, γ_2, a_3 doivent appartenir à une seule droite, divisée par γ_2 en deux parties égales.

Le point o que l'on vient de construire est la projection horizontale du centre de la sphère qui touche le troisième cône par sa circonférence de base, cherchons-en la projection verticale : dans le premier cône, le centre de la sphère qui le toucherait par la circonférence de sa base se projette en a_1, α'_1. Dans le second, la sphère analogue a son centre projeté en a_3, α'_3 : ce dernier point α'_3 se trouve à la rencontre de la ligne de rappel du point a_3 et d'une parallèle à la ligne de terre menée par α'_1. Cela dit, on voit que la projection verticale du centre de la troisième sphère doit appartenir, à la fois, à la ligne de rappel du point o, à la droite $\alpha'_1\gamma'_1$ et à celle $\alpha'_3\gamma'_2$; ces trois droites doivent donc donner un seul point de concours o', qui est celui que nous cherchions.

Quant au rayon de la sphère, il est égal à celui de la sphère de centre a_1, α'_1, c'est-à-dire à $\alpha'_1a'_1$; par suite, si l'on décrit, de o' comme centre avec une ouverture de compas égale à $\alpha'_1a'_1$, une circon-

férence, et si du point s' on lui conduit des tangentes, on aura le contour apparent vertical du troisième cône.

Reste à construire les projections de la base de ce cône; c'est toujours le problème de la construction des projections d'un cercle; on l'a résolu en rabattant le plan projetant vertical de l'axe so, $s'o'$, autour de so, sur le plan horizontal : s est fixe; o,o' vient en o_2, sur une perpendiculaire à la charnière menée du point o et à une distance oo_2 de cette ligne égale à la cote du point o, o'; le rabattement de l'axe s'obtient donc en traçant la droite so_2.

Portons sur l'axe rabattu une longueur $s\Omega_3$ égale à la hauteur $s'\Omega'_2$ des cônes et conduisons par Ω_3 une perpendiculaire Ω_3F_1, à $s\omega_3$, égale au rayon du cercle de base; cette ligne est la projection sur le plan rabattu de la moitié de la circonférence de base.

Lorsqu'on relève la figure, le centre du cercle vient se projeter horizontalement en ω_3 et verticalement en ω'_3, sur la ligne de rappel menée par ω_3 et à la côte $\omega_3\Omega_3$; F_1 se projette horizontalement en f_1 et verticalement en f'_1, à une distance $\varphi'f'_1$ de l'horizontale du point ω'_3 égale à la différence φ_1F_1 des cotes $\omega_3\Omega_3, f_1F_1$; par symétrie on trouve f_2, f'_2. Menons par le centre ω_3, ω'_3 l'horizontale du plan du cercle, prenons sur la projection horizontale de cette droite, de part et d'autre de ω_3, des longueurs ω_3h_1, ω_3h_2 toutes deux égales à ω_1b_1, puis relevons par des lignes de rappel h_1, h_2 en h'_1, h'_2, sur la parallèle à xy menée par ω'_3. Nous trouverons ainsi : sur le plan horizontal deux sommets h_1, h_2 de la projection horizontale de la base du troisième cône, sur le plan vertical les extrémités d'un diamètre h'_1, h'_2 de la projection verticale de la même base.

En somme, nous connaissons les quatre sommets f_1, f_2, h_1, h_2 de la projection horizontale cherchée et les extrémités f'_1, f'_2, h'_1, h'_2 de deux diamètres conjugués de l'autre projection; nous savons donc tracer les deux projections de la base.

Plusieurs vérifications se présentent: il faut que les ellipses se touchent aux points $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2$; il faut encore que l'ellipse $f'_1h'_1f'_2h'_2$ touche le contour apparent du cône dont elle est la projection de la base aux points de contact des projections de ce contour et de celui de la sphère inscrite (§ 395).

540. Problème XI. — *Trois cônes ont leurs sommets en ligne droite, l'un d'eux est quelconque et les deux autres ont pour directrices deux sections planes du premier; on demande de mener à ces deux derniers cônes un plan tangent commun.*

Si l'on conduit par la droite des sommets un plan tangent au premier cône, il coupera les plans de base des deux autres suivant des tangentes à ces bases, et comme ces tangentes et les sommets respectifs sont dans le plan tangent considéré, on voit que ce plan est tangent aux trois cônes.

On peut déduire de là le théorème qui suit :

541. Théorème III. — *Lorsque les sommets de trois surfaces coniques du second degré sont en ligne droite, et que l'une de ces surface est rencontrée par les deux autres suivant des courbes planes, ces deux-ci s'entre-coupent suivant deux courbes également planes.*

Effectivement, les deux dernières surfaces ont deux plans tangents communs en deux points communs, leur intersection est donc, d'après le théorème de Monge, un système de deux coniques.

542. Définition. — Projections stéréographiques. — *On nomme projection stéréographique d'une figure sphérique la perspective de cette figure lorsque le point de vue est un point quelconque de la surface de la sphère et que le tableau est le plan diamétral de la sphère perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de vue choisi.*

543. Théorème IV. — *La projection stéréographique d'un cercle placé sur une sphère est un cercle dont le centre est la projection du sommet du cône qui touche la sphère par le cercle projeté.*

Soient (fig. m_{10}) : ω le centre de la sphère, C le cercle tracé sur cette surface, S le sommet du cône circonscrit à la sphère suivant C, o le centre de projection, P le plan diamétral perpendiculaire au rayon ωo.

Imaginons une sphère auxiliaire qui aurait pour centre S et pour rayon la longueur d'une génératrice Sa du cône circonscrit; cette sphère coupe orthogonalement celle du centre ω. Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôle d'inversion o et pour puissance deux fois le carré du rayon de la sphère : le point diamétralement opposé à o vient en ω, et la sphère donnée se transforme en un plan perpendiculaire au rayon $o\omega$, mené par ω, c'est le plan diamétral P. La sphère auxiliaire a pour transformée une autre sphère dont le centre se trouve sur So ; en outre, comme les angles que formaient les surfaces aux divers points de leur commune intersection doivent se conserver, on voit que la transformée de la sphère auxiliaire devra couper P orthogonalement, elle aura donc son centre sur P ; par suite, il est à la rencontre Σ de P et de oS. Or, la rencontre de P et de la sphère auxiliaire transformée détermine la projection stéréographique de C ; par conséquent, cette projection est bien un cercle dont le centre est la projection Σ de S. La partie du théorème qui a pour objet la détermination du centre de la projection est due à M. Chasles.

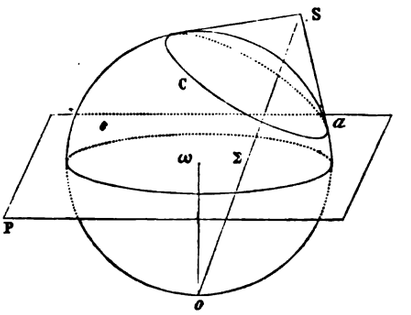


FIG. m_{10}.

544. Problème XII. — *A deux cônes, déterminés par un sommet commun placé à la surface d'une sphère donnée, et par deux bases, qui sont les sections de la même sphère par deux plans donnés, mener un plan tangent commun.*

Pour la simplicité de l'épure nous admettrons que le sommet du cône est le point culminant s,s' de la sphère (*fig.* 345, pl. XXXVI), et nous adopterons (P_1, P'_1), (P_2, P'_2) pour les plans de base.

Les projections stéréographiques des bases sur le plan diamétral horizontal sont circulaires, et, comme ce plan diamétral est parallèle au plan horizontal de projection, les bases des cônes sur ce dernier plan sont des cercles que nous allons construire.

Cherchons les contours apparents des cônes circonscrits à la sphère suivant les deux bases données. Sur le plan vertical les projections de ces bases, le contour apparent de la sphère et celui des cônes circonscrits doivent se toucher en deux points, que nous allons construire en cherchant les points des bases, placés sur le contour apparent vertical de la sphère. Coupons par un plan de front F conduit par le centre o,o' de cette surface, nous trouvons sur la sphère le cercle du contour apparent vertical, sur le plan P, P' une ligne de front h_1h_2, $h'_1k'_1$, et sur l'autre plan P_2, P'_2 la droite de front h_2h_1, $h'_1k'_2$.

Par les rencontres du cercle et des droites de front, on obtient, en a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, les points de contact des contours apparents verticaux de la sphère et de ses deux cônes circonscrits.

Les pôles t'_1, t'_2 des cordes $a'_1b'_1$, $a'_2b'_2$, par rapport au cercle figuré sur le plan vertical, sont les projections verticales des sommets des cônes circonscrits; d'autre part, ces sommets sont dans les plans verticaux respectivement perpendiculaires aux plans de base et conduits par le centre de la sphère; ils ont donc leurs projections horizontales à la fois situées sur les lignes de rappel correspondantes et sur la perpendiculaire menée de o à P_1 ou à P_2. Nous connaissons ainsi les projections orthogonales (t_1, t_1'), (t_2, t_2') des sommets des cônes circonscrits. En plaçant le centre de projection en s, s', projetons ces sommets coniquement sur le plan horizontal; ils donnent les points θ_1, θ_2.

Projetons de même coniquement les points du plan de front F, dont les projections verticales orthogonales sont a'_1, b'_2; ils donnent α_1, β_2.

Nous connaissons alors les centres θ_1, θ_2 des circonférences cherchées et un point de passage de chacune d'elles en α_1, β_1, nous pouvons donc les tracer. L'une de leurs tangentes communes Q est la trace horizontale de l'un des plans tangents cherchés; ce plan est déterminé par la droite Q et le point s, s'.

545. Problème XIII. — *Deux cônes de révolution étant donnés par leurs axes* (z, z') (z_1, z'_1) (*fig.* 346, pl. XXXVI), *par leurs sommets* (s, s') (t, t') *et par leurs angles générateurs; on propose de construire :* 1° *les contours apparents des deux surfaces;* 2° *leurs plans tangents parallèles.*

Les contours apparents se déterminent par le secours de sphères inscrites, comme on l'a déjà expliqué au paragraphe **471**; nous supposerons le tracé de ces contours effectué, et, pour simplifier les constructions ultérieures, nous admettrons que les sphères employées aient des rayons égaux. Donnons-nous donc les contours apparents (γ, γ') (γ_1, γ'_1) de ces sphères, et ceux des cônes correspondants, pour nous occuper uniquement de la seconde partie du problème.

Première solution. — Le long des parallèles de contact des cônes et des sphères inscrites, les normales aux cônes constituent deux autres surfaces coniques de sommets (o, o') (o_1, o'_1); on peut substituer à la recherche qui nous occupe celle des génératrices parallèles de ces cônes normaux. Pour les trouver, déplaçons, par exemple, la sphère (γ_1, γ'_1) et son cône circonscrit, sans changer l'orientation de la figure mobile et de manière que les sphères inscrites se superposent. En construisant des tangentes aux cercles γ, γ', respectivement parallèles aux droites des contours apparents du cône dont le sommet est en t, t', on trouve les contours apparents du cône déplacé et son sommet σ', σ. Les cônes normaux ont alors même sommet o, o' et le problème se réduit à trouver leurs génératrices communes, ou bien les points d'intersection des cercles par lesquels les cônes dont les sommets sont (s, s'), (σ, σ') touchent la sphère γ, γ'. Pour construire la rencontre de ces cercles, prenons leurs projections stéréographiques, en plaçant le centre de projection au point le plus bas o, c' de la sphère γ, γ', ou plutôt construisons les projections centrales des cercles sur le plan horizontal, en plaçant toujours le centre de projection au point o, c'. Ces projections sont évidemment circulaires comme les projections stéréographiques.

Cherchons leurs centres par le procédé de M. Chasles: tirons à cet effet les projetantes coniques $(c's', os)$ $(c'\sigma', o\sigma)$ et déterminons leur traces horizontales ω_1, ω_2, qui sont les centres cherchés. Après quoi, en prenant les projections centrales des points qui, situés dans le plan de front dont F est la trace horizontale, se projettent verticalement en a', b', nous trouvons, en α, β, un point de passage de chacune des circonférences cherchées. Traçons ces circonférences et prenons leurs rencontres (φ, φ') (φ_1, φ'_1); ces points sont les projections centrales de ceux que l'on cherche. — Pour les relever, traçons les projections orthogonales $(\varphi o, \varphi' c')$ $(\varphi_1 o, \varphi'_1 c')$ des projetantes centrales, lesquelles, en leurs rencontres avec la sphère, pourraient donner les points demandés. On les obtient plus simple-

ment en observant 1° qu'ils sont à la rencontre des courbes de contact des cônes circonscrits des sommets (s, s') (σ, σ'), et 2° que toutes les courbes de contact obtenues en faisant glisser les sommets (s, s'), (σ, σ') sur la droite $s\sigma$, $s'\sigma'$ concourent aux points cherchés. Plaçons le sommet aux points de rencontre σ_1, σ'_1 de la droite σs, $\sigma' s'$ et du plan de front dont F est la trace horizontale; la projection verticale de la courbe de contact est alors rectiligne et se place sur la polaire $p'q'$ du point σ'_1 par rapport à γ'; donc à la rencontre f'_1, f_1 de cette polaire et des droites $\varphi' c'$, $\varphi'_1 c'$ on a les projections verticales des pieds des normales; des lignes de rappel font connaître les projections horizontales f, f_1 correspondantes.

Opérons seulement sur le point f, f': la normale correspondante se projette en $o'f'$, of; en menant par o'_1, o_1 des droites $o'_1 f'_2$, $o_1 f_2$, parallèles et égales à $o'f'$, of, on trouve les projections de la normale parallèle. Reste à conduire des plans par (f', f) (f'_2, f_2) respectivement perpendiculaires à ces normales. Quant aux génératrices de contact, l'une d'elles est $(s'f', sf)$, l'autre s'obtient en menant les droites σf, $\sigma' f'$ et en leur conduisant des parallèles par t, t', qui doivent, si l'épure est exactement faite, passer par (f_2, f'_2).

546. Deuxième solution. — On peut conduire, après avoir déplacé l'un des cônes comme il a été dit plus haut, par la droite $s'\sigma'$, $s\sigma$ deux plans tangents à la sphère γ, γ' et leur mener ensuite par t, t' des plans parallèles. Pour exécuter ce tracé, construisons l'une des courbes à projections droite et circulaire du cône circonscrit à γ, γ' dont le sommet est σ_1, σ'_1; cette courbe se projette en γ, $k'g'$, son plan rencontre en i, i' la droite des sommets et les tangentes à cette courbe menées par i, i' déterminent, avec la droite des sommets, les plans tangents communs aux cônes de sommets (σ, σ'), (s, s'); le problème s'achève alors très aisément. Indiquons une vérification : Si l'on trace, par exemple, la tangente ij, $i'j'$ et la droite de contact $j\sigma_1$, $j'\sigma'_1$, celle-ci devra passer par l'extrémité f, f' de la normale of, $o'f'$.

547. Problème XIV. — *Construire un plan équidistant de quatre sphères données.* — On conduit un plan tangent à trois d'entre elles; puis un plan équidistant de celui-ci et de la quatrième sphère. Le problème admet en général 64 solutions.

548. Problème XV. — *A deux cônes, ayant pour sommet commun l'un des foyers des méridiens d'un ellipsoïde de révolution allongé, et pour bases deux sections planes de l'ellipsoïde, mener un plan tangent commun.* — On démontrera que les deux cônes sont de révolution et on leur conduira des plans tangents communs par le procédé du paragraphe **362**.

549. Problème XVI. — *On circonscrit à un ellipsoïde de révolution dont l'axe est vertical un cylindre parallèle à une direction donnée, et on propose de mener à ce cylindre un plan tangent par un point extérieur à sa surface.*

Pour résoudre la question, on conduit par le point donné une parallèle aux génératrices du cylindre et on mène par cette droite un plan tangent à l'ellipsoïde.

550. Problème XVII. — *On circonscrit à une surface de révolution dont l'axe est vertical un cylindre parallèle à une direction donnée, et on propose de mener à ce cylindre un plan tangent qui s'incline d'un angle donné sur l'horizon.*

On circonscrit à la surface de révolution un cône dont les génératrices font avec l'horizon l'angle donné et l'on conduit, parallèlement à la direction des génératrices du cylindre, des plans tangents à ce cône.

551. Problème XVIII. — *Par un point pris sur une surface de révolution, dont l'axe est sur la ligne de terre, lui mener un plan tangent.*

Soient μ, μ' (*fig.* 347, pl. XXXVII) le contour apparent de la surface sur les deux plans de projection et m' la projection verticale du point donné. Il faut d'abord déterminer la seconde projection du point M; à cet effet, coupons la surface par un plan de profil Q, Q' conduit par M, la rencontre est au cercle de centre o et de rayon oa', lequel, rabattu autour de Q' sur le plan vertical, sert à déterminer le rabattement M_1 du point M; en relevant M_1 on trouve la projection horizontale m. Pour conduire un plan tangent à la surface par m, m', déterminons les traces v', h de la tangente au parallèle, et observons que la tangente à μ', menée par a', donne le sommet α du cône des tangentes aux méridiens le long du parallèle considéré, que ce point est au plan tangent cherché et qu'il est le concours des traces de ce plan; il en résulte que les droites unissant α aux points v', h sont les traces P', P du plan tangent cherché.

552. Problème XIX. — *Employer le tracé du paragraphe* 439 *à la détermination du plan tangent en un point d'une surface de révolution.*

Soient (*fig.* 348, pl. XXXVIII) : z, z' l'axe; μ' la projection verticale d'une génératrice de front; $a'b'$, ab les projections d'un parallèle et m',m le point de la surface. Opérons comme pour chercher sur le parallèle donné le point de contact du plan tangent parallèle à la trace verticale inconnue de ce plan, mais en renversant l'ordre des constructions, afin de partir du point m' pour arriver à connaître la direction de cette trace verticale. Par a', tirons une tangente $a't'$ à μ', menons lui du point m' une parallèle $m'\omega'$, unissons le point de rencontre ω' de cette parallèle et de z' au point a'; la droite $\omega'a'$ ainsi obtenue doit être parallèle à la trace verticale du plan tangent cherché.

Alors, pour construire les traces de ce plan, prenons la trace v' de la tangente mt_1, $m't'_1$ au parallèle, menons par v' la parallèle P' à $\omega'a'$ et par l'intersection α de cette droite avec xy conduisons une parallèle P à mt_1; $P\alpha P'$ sont les traces du plan tangent qu'il fallait construire.

553. Problème XX. — *Un ellipsoïde aplati et de révolution étant donné, par son axe de rotation* z, z', *que l'on suppose placé de front, et par son ellipse méridienne principale* E, E'; *circonscrire à cette surface un cylindre de front dont la trace horizontale soit circulaire* (*fig.* 349, pl. XXXVIII).

Les traces horizontales des cylindres circonscrits de front sont des ellipses dont un axe est de longueur constante et égale à $a'a'_1$. Pour que les deux axes soient égaux, menons par o' une parallèle à xy, portons-y $o'b' = o'a'$ et conduisons de b' une tangente à E', laquelle donne la direction des projections verticales des génératrices du cylindre. La trace horizontale du cylindre circonscrit est un cercle C dont le rayon égale $o'a'$ et qu'on met en place facilement.

554. Problème XXI. — *Une sphère opaque de rayon* R *est posée sur le plan horizontal et touche en même temps le plan vertical de projection. Elle est éclairée par un point lumineux situé à une distance* 2R *au-dessus du plan horizontal, et tellement placé, que l'ombre portée sur le plan horizontal rencontre la ligne de terre en un point donné* A *et sous un angle donné* α.

On demande :

1° *De tracer l'ombre portée par la sphère sur le plan horizontal de projection.*

2° *De trouver la position du point lumineux;*

3° *De tracer l'ombre portée par la sphère sur le plan vertical de projection;*

4° *De construire les projections de l'ombre propre de la sphère* (*fig.* 350, *pl.* XXXVII).

Contours apparents de la sphère. — La sphère est tangente aux deux plans de projection, par suite, la cote et l'éloignement du centre o, o' égalent R, et les cercles tangents à la ligne de terre décrits de o et de o' comme centre sont les contours apparents de cette surface.

Ombre portée sur le plan horizontal de projection. — Le point A appartient à la courbe d'ombre de

la sphère sur le plan horizontal et en menant par ce point une droite t inclinée de α sur xy, on obtient la tangente à cette courbe au point A. D'autre part, les projections coniques des points le plus bas et le plus haut de la sphère, faites sur le plan horizontal, en plaçant le centre de projection sur le point lumineux, sont : l'une au point le plus bas lui-même; l'autre à l'infini, attendu que le centre de projection a même cote 2R que le point le plus haut.

La courbe d'ombre de la sphère sur le plan horizontal est donc une parabole déterminée par son foyer F, une de ses tangentes t et le point de contact A de cette tangente. Construisons les éléments de cette parabole, et d'abord l'axe. Pour ce but, menons le rayon vecteur FA et tirons par A une droite Au qui forme avec FA un angle bissecté par At, cette droite est la direction de l'axe de la parabole; la parallèle Fz menée par F à la droite Au donne l'axe de cette courbe. Un point de passage de la tangente au sommet s'obtient en projetant F en p sur At, et la tangente au sommet elle-même n'est autre que la perpendiculaire menée par p sur Fz; en son pied σ on a le sommet; la directrice dd_1 s'en déduit immédiatement. Nous pouvons actuellement tracer la parabole.

Détermination du point lumineux. — Une section faite par le plan vertical contenant σF donne : sur la sphère un grand cercle, sur le cône lumineux deux rayons, dont l'un est tangent à ce grand cercle et passe par σ; ce rayon lumineux est donc facile à déterminer, en y plaçant un point au-dessus du plan horizontal à la cote 2R, on aura le flambeau.

Pour exécuter la construction qui vient d'être indiquée, rabattons le plan sécant vertical conduit par σF sur le plan horizontal mené par le centre de la sphère et autour du diamètre de cette surface parallèle à σF : le point F vient en F_1, sur une perpendiculaire menée par F à la droite σF et à une distance de celle-ci égale au rayon de la sphère; l'axe oz se place sur une parallèle F_1Z_1 à Fσ menée par F_1; la rencontre de F_1Z_1 et d'une perpendiculaire à oz menée par σ donne le rabattement Σ_1 de ce dernier point.

Le rabattement du rayon lumineux cherché est alors la seconde tangente menée par Σ_1, au grand cercle figuré sur le plan horizontal, et, en y plaçant un point S_1 à la distance 2R de F_1Z_1, on obtient le rabattement S_1 du point lumineux. Pour le relever on conduit par S_1 une perpendiculaire à la projection de la charnière, laquelle donne par son pied s la projection horizontale du point lumineux; la projection verticale s' se place alors à la distance 2R de xy sur une ligne de rappel menée par s.

Ombre portée par la sphère sur le plan vertical de projection. — En plaçant le centre de projection en s, s', projetons sur le plan vertical les points de la sphère : le plus voisin et le plus éloigné de ce plan; le premier φ' est à lui-même sa propre projection; l'autre, projeté orthogonalement en b, o', se projetterait coniquement au point de rencontre φ'_1 de la droite $s'\varphi'$ et de la verticale $\varphi_2\varphi'_1$, mais il se trouve en dehors de notre épure. La courbe cherchée est donc une ellipse dont un foyer est en φ et dont le second foyers φ'_1 est extérieur à l'épure.

Cherchons les sommets de l'axe focal de cette ellipse; pour ce but, coupons la sphère et le cône lumineux par le plan perpendiculaire au plan vertical de projection conduit par $s'\varphi'$; nous aurons sur la sphère un grand cercle; sur le cône deux génératrices tangentes à ce grand cercle et dont les traces verticales seront les sommets cherchés.

Le tracé se peut exécuter par un rabattement du plan sécant, sur un plan de front conduit par le centre de la sphère. Le grand cercle se confond avec celui déjà figuré sur le plan vertical; s, s' vient en S_2, sur une perpendiculaire élevée du point s' à $s'\varphi'$ et égale à la différence des éloignements des points (o, o') (s, s'); l'intersection du plan sécant et du plan vertical de projection se rabat sur la tangente $\theta\theta_1$ mené au grand cercle de centre o' parallèlement à $s'\varphi'$.

Conduisons par S'_2 des tangentes au grand cercle rabattu et prenons leurs rencontres avec $\theta\theta_1$, lesquelles sont les rabattements des sommets cherchés, l'une de ces rencontres est W_1 et se relève en W. S'il arrive, comme ici, que l'autre tangente aille couper $\theta\theta_1$ en un point trop éloigné et que le point φ'_2 soit aussi à l'extérieur de la feuille de dessin, on se bornera à construire par le rabattement le sommet W, et, pour achever de déterminer l'ellipse, on en construira le centre ω' en cherchant la rencontre de $\varphi'\varphi'_1$ avec une verticale équidistante des droites $\varphi'_1\varphi_2$, $\varphi' o$. On conduira perpendiculairement à $\varphi'\varphi'_1$, le petit axe de l'ellipse. Alors il s'agira de limiter ce petit axe, ce que l'on fera très simplement, en décrivant de φ comme centre avec un rayon égal au demi-grand axe $W\omega'$, un arc de cercle, lequel en ses points de section B, B_1 avec le petit axe donne les sommets de cet axe. La connaissance des sommets B, B_1, W de l'ellipse permet de la tracer; si l'épure est exactement faite cette courbe et la parabole précédemment tracée devront se couper sur la ligne de terre.

Projection de l'ombre propre. — Commençons par la projection horizontale. Sur le rabattement du plan vertical conduit par $o\sigma$ on peut facilement tracer la polaire p_1q_1 du point S_1 par rapport au grand cercle rabattu avec S, laquelle polaire n'est autre que la projection sur le plan rabattu du cercle de contact du cône et de la sphère : en remettant la figure en place, les points p_1, q_1 se projettent en o, q et ces derniers sont les sommets du petit axe de l'ellipse cherché. Le grand axe s'obtient, comme nous l'avons déjà expliqué, en portant, sur une perpendiculaire au petit axe menée par le centre μ, de part et d'autre de ce centre, deux longueurs μe, μe_1 égales à la moitié de $p_1 q_1$. Nous connaissons les quatre sommets F, q, e, e_1 de l'ellipse; pour pouvoir la tracer en indiquant les parties cachées, il suffit de construire les points de cette courbe placés sur le contour apparent de la sphère en projection horizontale. Le plan du cercle d'ombre coupe celui de ce contour apparent dans l'espace suivant une corde dont la projection horizontale est la perpendiculaire à os, menée par la rencontre de cette ligne avec p_1q_1. Je dis que cette corde est déjà tracée et qu'elle n'est autre que $\Sigma_1\sigma$; effectivement p_1q_1 étant la polaire de S_1, en désignant par x la distance du point o au point de rencontre des droites os, p_1q_1, on a

$$x = \frac{R^2}{os}; \tag{1}$$

d'autre part, l'angle $\Sigma_1 o S_1$ est droit et le triangle de même nom nous donne

$$\Sigma_1 q_1 = \frac{\overline{oq_1}^2}{S_1 q_1} = \frac{R^2}{S_1 p_1} = \frac{R^2}{os}; \tag{2}$$

en comparant (1) et (2) on a

$$x = \Sigma_1 q_1;$$

or,

$$\Sigma_1 q_1 = \Sigma_1 F_1 = o\sigma;$$

par suite la propriété se trouve démontrée.

Après cette explication on peut dire que les rencontres de la corde $\Sigma_1\sigma$ avec le contour apparent en projection horizontale de la sphère déterminent les points cherchés. La projection verticale de la courbe d'ombre a été obtenue pareillement.

Des hachures recouvrent sur notre épure les parties qui, sur la sphère et sur les plans de projection, sont comprises dans l'ombre.

555. Problème XXII. — *Faire en sorte qu'une conique donnée engendre, en tournant autour d'un axe, une surface du second degré, et construire le méridien de la surface.*

Pour que la surface soit du second degré, il faut que sa section par le plan de la conique génératrice soit également du second degré; on en conclut que cette section doit être la conique génératrice elle-même. Le plan méridien perpendiculaire à ce plan sécant doit donc diviser symétriquement la courbe de section, ou, ce qui revient au même, *la projection de l'axe de rotation sur le plan de la génératrice doit tomber sur l'un des axes de celle-ci.*

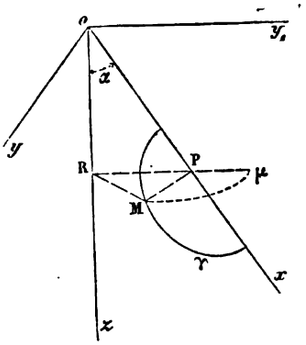


FIG. n_1.

Démontrons que cette condition est suffisante. Soient : z l'axe de rotation (fig. n_1), ox l'intersection du plan de la génératrice avec celui du méridien perpendiculaire à ce plan; γ la conique génératrice, oy une perpendiculaire au plan zox menée par l'intersection des axes oz, ox. La droite ox est un axe de γ, en conséquence l'équation de cette courbe peut s'écrire :

$$y^2 = ax^2 + bx + c. \tag{1}$$

Coupons la surface qu'engendre γ par le plan méridien zox. Un point de la section se peut obtenir en menant une ordonnée MP de γ, puis de P une perpendiculaire PR sur oz, en joignant le point M au point R et en rabattant RM en $R\mu$; le point μ sera à la courbe cherchée.

D'après ce tracé, en conduisant par o, dans le plan zox, la perpendiculaire oy_1 à oz et en rapportant le méridien aux axes xoy_1, on aura

$$RM = R\mu = y_1 + x \sin \alpha.$$

D'autre part, en désignant par α l'angle de l'axe de rotation avec le plan de la courbe, on trouve

$$y^2 = \overline{MP}^2 = \overline{RM}^2 - \overline{RP}^2 = (y_1 + x \sin\alpha)^2 - x^2 \sin^2\alpha;$$

en remplaçant y^2 par sa valeur dans (1) on obtient enfin

$$y_1^2 + 2xy_1 \sin\alpha = ax^2 + bx + c,$$

qui est l'équation de la courbe méridienne; cette courbe est donc bien du second degré.

Des considérations qui précèdent découle le théorème qui suit :

Pour qu'une conique engendre par sa rotation autour d'un axe une surface du second ordre, il faut et il suffit que la projection de l'axe de rotation sur le plan de la conique soit un axe de celle-ci.

Cela dit, adoptons un axe de rotation vertical z,z' (*fig.* 351, pl. XXXVII) et amenons la conique, qui sera, par exemple, une ellipse, dans une position telle que son plan soit perpendiculaire au plan

vertical; l'un des axes aa_1, $a'a'_1$ de cette ellipse sera par suite dans le plan méridien principal, et la génératrice se projettera suivant aba_1b_1, $a'a'_1$.

556. Construction d'un point quelconque du méridien. — Soit pris un point m, m' sur la génératrice, les projections du parallèle qu'il décrit sont un cercle de centre z dont m est un point de passage et une parallèle à la ligne de terre menée par m'. Prenons la trace horizontale F du plan du méridien de front et les rencontres (m_1, m'_1) (m_2, m'_2) de ce méridien et du parallèle, ces deux points sont sur le méridien principal cherché.

Après avoir déterminé ainsi un nombre suffisant de points, on a pu tracer les arcs $a'_1m'_1a'$, $a'_1m'_2a'$ qui constituent la projection verticale du méridien cherché; il faut conclure de là que l'ellipse n'engendre qu'une portion de surface du second degré, laquelle est ici comprise entre les parallèles dont les projections verticales sont en $a'a'$, $a'_1a'_1$.

557. Points parasites du méridien. — Le rayon zm du parallèle servant à la détermination d'un point quelconque de l'arc utile du méridien est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont l'abscisse zp du point m de la courbe donnée, et son ordonnée mp correspondante, on a donc la relation

$$\overline{zm}^2 = \overline{zp}^2 + \overline{mp}^2;$$

relation qui donne des points utiles de la courbe pour toute valeur de l'abscisse comprise entre za, za_1. En dehors de ces limites, l'ordonnée mp devient imaginaire, et ses valeurs peuvent être représentées par celles des ordonnées d'une hyperbole H dont les sommets de l'axe transverse se trouvent en a, a_1 et ceux de l'autre axe en b, b_1. Cette courbe H servira comme l'ellipse, à la condition toutefois que ses ordonnées soient multipliées par $\sqrt{-1}$; en d'autres termes, à un point μ de l'hyperbole correspond un point du méridien placé sur le cercle dont le rayon R est donné par la relation

$$R^2 = \overline{z\omega}^2 - \overline{\mu\omega}^2.$$

Il en résulte le tracé suivant : sur $z\omega$ comme diamètre, décrivons une demi-circonférence; de ω comme centre avec $\omega\mu$ pour rayon traçons un arc de cercle que nous arrêterons en son point de rencontre μ_1 avec la demi-circonférence; après quoi, en décrivant le cercle de centre z et passant par μ_1, on a la projection horizontale d'un parallèle, dont la projection verticale correspondante se trace en relevant μ en μ', sur $a'a'_1$, et en tirant de μ' une parallèle à la ligne de terre.

Dès lors que l'on a construit les projections du parallèle, on prend simplement ses rencontres (μ_2, μ'_2), (μ_3, μ'_3) avec le plan de front, et l'on a les points cherchés.

558. Nature de la surface. — Les parallèles dont le rayon est nul sont ceux qui proviennent des points de l'hyperbole dont les deux coordonnés sont égales entre elles; deux de ces points ont été obtenus en conduisant par z deux lignes inclinées à 45° sur F et en prenant leurs rencontres c, d avec la partie supérieure de l'hyperbole H; le point c se projette verticalement en c' et donne le parallèle s', z de rayon nul; pareillement d se relève en d' et fait connaître le second parallèle s'_1, z dont le rayon est nul. Le tracé qui vient d'être exécuté détermine les sommets s', s'_1 de la courbe méridienne; il montre en outre qu'à tout point compris entre c et d sur H, correspond un parallèle imaginaire compris entre les sommets du méridien; ce qui fait voir que la surface est un hyperboloïde de révolution à deux nappes.

Le principe sur lequel peut se baser la discussion complète du problème vient d'être établi; par

son secours le lecteur déterminera facilement la nature des surfaces qu'engendrent une ellipse, une hyperbole ou une parabole, lorsqu'on fait varier la position de ces courbes par rapport à l'axe de rotation.

559. Problème XXIII. — *On donne (fig. 352, pl. XXXVIII) : une ellipse $a'b'$, amb, à projections droite et circulaire; un point s, s' et deux droites de front, dont l'une cd, $c'd'$ a pour projection horizontale un diamètre prolongé du cercle amb et pour projection verticale une parallèle à $a'b'$, dont l'autre, gf, $g'f'$, a sa projection verticale perpendiculaire à $c'd'$.*

On demande :

1° *De mener un plan par $fg, f'g'$ qui touche la surface de révolution qu'engendre l'ellipse donnée pendant sa rotation complète autour de l'axe cd, $c'd'$.*

2° *De construire un plan tangent commun à cette surface de révolution et au cône ayant pour base l'ellipse donnée et s, s' pour sommet.*

3° *De représenter par ses projections la surface de révolution engendrée par l'ellipse donnée.*

1° Plan tangent mené par fg, $f'g'$. — La surface de révolution est du second degré (§ 555); pour lui mener un plan tangent par $fg, f'g'$ remplaçons-la par le cylindre circonscrit parallèlement à cette droite. Nous prendrons pour base de ce cylindre sa courbe de contact avec la surface de révolution, laquelle se détermine très aisément; en effet, son plan se confond avec le plan diamétral conjugué à la direction fg, $f'g'$, plan qui n'est autre que celui du méridien perpendiculaire à cette direction; d'après cela, le plan de base est parallèle à celui de l'ellipse donnée. On sait, d'autre part, que les sections d'une surface du second ordre par des plans parallèles sont homothétiques et ont des projections homothétiques; on voit par là que la base du cylindre circonscrit est aussi une courbe à projections droite et circulaire.

Nous déterminerons des points de cette courbe en prenant les rencontres des parallèles décrits par (a, a') (b, b') avec le plan conduit par $c'd'$, perpendiculairement au plan vertical; ces parallèles ont pour centres (ω, ω'), (ω_1, ω'_1), et les points de rencontre se projettent verticalement en ω', ω'_1, horizontalement en α_1, α_2, β_1, β_2 sur les perpendiculaires à cd menées par ω, ω_1, de part et d'autre de ces points, et à des distances de chacun d'eux égales à $\omega'a'$. En conduisant un cercle par les points α_1, α_2, β_2, β_1 on a la projection horizontale de la base du cylindre; sa projection verticale se fait sur $c'd'$. On termine maintenant facilement le tracé en prenant la rencontre k', k du plan de base et de la droite $f'g'$, fg et en conduisant de ce point des tangentes à la base, lesquelles ont pour projections horizontales les tangentes t_1, t_2, menées du point k au cercle qui vient d'être tracé, et pour projections verticales les droites t'_1, t'_2 confondues avec $c'd'$. Les deux plans tangents sont déterminés par les couples de droites $(fg, f'g')$, (t_1, t'_1) et $(fg, f'g')$, (t_2, t'_2).

2° Plan tangent commun au cône et a la surface de révolution. — Le plan tangent commun devra toucher la surface par un point de l'ellipse génératrice; nous allons remplacer cette surface de révolution par un cône circonscrit qui la raccordera le long de cette ellipse donnée. Une section méridienne $i\alpha_1, j\alpha_2, i'j'$ est connue, menons lui par le point α_1, ω' une tangente et prenons sa rencontre o, o' avec l'axe cd, $c'd'$. Les tangentes aux méridiens menées par les divers points du parallèle $a'd'_1$, $a\alpha_1 a_1 \alpha_2$ rencontrent toutes $cd, c'd'$ au même point; en conséquence, la droite $o'a'$ n'est autre que la tangente à la projection verticale du méridien de front, et, par suite de la symétrie, la tangente en b' au même méridien s'obtient en menant la droite qui va de b' au point de croisement σ' des droites $o'a'$, $\omega'_2\omega'_6$; le point σ' correspond à σ en projection horizontale.

Imaginons un cône de sommet σ, σ' et circonscrit à l'ellipsoïde; la courbe de contact de ces sur-

faces a pour projection verticale la droite $a'b'$; la courbe elle-même se confond donc avec la génératrice donnée $a'b'$, *ambn*.

Le problème se réduit alors à conduire par s, s' des plans tangents au cône circonscrit. On tire la droite $\sigma's'$, σs, on en prend sa rencontre u', u avec le plan de base, et on conduit par ce point deux tangentes (θ_1, θ'_1), (θ_2, θ'_2) à cette base; en adjoignant à chacune d'elles la droite σs, $\sigma's'$ on a deux couples de droites qui déterminent les deux plans tangents communs.

560. 3° Projection de la surface. — Nous connaissons les projections droite et circulaire $i'j'$, $i\alpha_1 i\alpha_2$ comprenant deux arcs utiles et deux arcs parasites d'un méridien complet; la surface de révolution est donc un ellipsoïde que l'on peut engendrer par la rotation de ce méridien autour de cd, $c'd'$, il est facile d'en construire les contours apparents en projection.

Sur le plan vertical, le contour s'obtient en imprimant une rotation de 90° au méridien générateur; les points i, i' et j, j' ne bougent pas, et ceux projetés primitivement en (ω'_2, ω_3) (ω'_2, ω_4) viennent se projeter verticalement en ω'_5, ω'_6, sur une perpendiculaire à $c'd'$, de part et d'autre du point ω'_2, et à des distances de celui-ci égales toutes deux à $\omega_2\,\omega_3$. Les sommets i', j', ω'_5, ω'_6 de la projection verticale du méridien principal permettent de tracer le contour apparent vertical de la surface, et ce sont les parallèles projetés verticalement sur $a'a'_1$, $b'b'_1$ qui limitent les arcs utiles $a'\omega'_6 b'$, $a'_1\omega'_5 b'_1$ de ce méridien.

En ce qui concerne le contour apparent horizontal, étant pris le diamètre $q'p'$ conjugué aux cordes verticales de l'ellipse $i'a'\,j'a'_1$, on a la projection verticale de ce contour; par suite, la projection horizontale correspondante est une ellipse dont l'un des axes est $\omega_3\omega_4$, dont l'autre axe s'obtient par la projection horizontale pq du diamètre $p'q'$ et qui se peut alors facilement tracer. Il faut séparer sur cette ellipse les arcs utiles de ceux qui ne sont que le prolongement du contour cherché : nous obtiendrons les projections verticales des points de partage par les rencontres v', w' des droites $a'a'_1$, $b'b'_1$, avec $p'q'$, puis les projections horizontales correspondantes v_1, v_2, w_1, w_2.

La projection horizontale de la surface engendrée par $a'b'$, *ambn* se complète au moyen de celles sur le même plan de projection des cercles décrits par (a, a') (b, b'), lesquelles ont été obtenues à l'aide de leurs axes.

561. Problème XXIV. — *Un tore, dont l'axe z, z' est vertical, étant donné, on prend un point s, s' sur une perpendiculaire au plan vertical menée par le centre de cette surface, et on demande de construire les projections de la courbe de contact du tore et du cône circonscrit dont le sommet est en ce point* (fig. 353, pl. XXXVIII).

Construction d'un point quelconque de la courbe de contact. — Nous emploierons la méthode des enveloppées cylindriques. Soit pris un cercle méridien projeté horizontalement en cd; substituons à la surface de révolution le cylindre droit qui la touche par ce cercle, et menons à ce cylindre des plans tangents par s, s'; leurs traces sur le plan de base doivent passer par le pied de la perpendiculaire menée à ce plan du point s, s'. Il importe, afin de réduire les tracés ultérieurs analogues, de construire le lieu des projections horizontales des pieds de ces perpendiculaires, qui n'est rien autre chose que le cercle décrit sur sz comme diamètre. Le pied de la perpendiculaire relative au plan de base qui a sa trace horizontale en cd est à la rencontre e de ce lieu et de la droite cd; c'est de ce point qu'il faut mener des tangentes à la base, tangentes que l'on obtient en rabattant le cercle méridien projeté sur cd autour du diamètre cd, sur le plan horizontal conduit par le centre du tore; le rabattement du méridien est la circonférence décrite sur cd comme diamètre, le point projeté en e reste fixe et les tangentes se rabattent sur celles eM_1, eM_2 menées par e, au cercle rabattu.

En remettant la figure en place, les points M_1, M_2 se projettent horizontalement en m, et verticalement en m'_1, m'_2, sur la ligne de rappel du point m, de part et d'autre de l'horizontale menée par s', et à une distance de cette ligne égale à mM_1. On peut tracer ainsi autant de points de la courbe qu'on le veut.

Points parasites de la projection horizontale. — Sur les rencontres du lieu qui vient d'être tracé avec le collier et l'équateur, on trouve les points p_1, q_1, q_2, p_2 qui se relèvent en p'_1, q'_1, q'_2, p'_2, et forment, en projection horizontale, par suite de la symétrie de la figure, des points de rebroussement. La partie utile de la projection horizontale de la courbe de contact s'arrête donc à ces points de rebroussement, mais la courbe géométrique ainsi formée peut être continuée; c'est ce prolongement qui reçoit, on le sait, le nom d'*arc parasite*. Les traces horizontales des méridiens sur lesquels on trouve des points utiles sont comprises dans l'intérieur des espaces angulaires p_1zp_2, q_1zq_2. Ayant pris la projection horizontale fg d'un méridien en dehors des limites qui viennent d'être indiquées, cherchons le point parasite que ce même méridien contient. Par le tracé du point utile m, on voit que ce point est le pôle relatif au cercle cM_2dM_1, de la perpendiculaire se à la droite cd; on en conclut que si l'on prend la rencontre k de fg avec le lieu des projections horizontales des pieds des perpendiculaires, et que l'on construise le pôle n de la droite sk, par rapport à la circonférence de diamètre fg, le point n, ainsi trouvé, sera à la partie parasite de la projection horizontale de la courbe de contact.

Asymptote de l'arc parasite. — En plaçant le point k de façon à rejeter à l'infini le pôle correspondant, on trouve les directions asymptotiques de l'arc parasite. Il suffit pour cela de faire en sorte que k tombe au centre du méridien mobile. Le lieu des projections horizontales des centres étant tracé, on a trouvé, par ses rencontres u, v, avec celui des projections des pieds des perpendiculaires, deux points de passage des méridiens qui contiennent les points parasites à l'infini : ces méridiens sont donc zu, zv.

Reste à déterminer les asymptotes. On peut le faire en cherchant la limite de la distance nt du point parasite n à la direction asymptotique zu. Soient : o le centre du cercle décrit sur fg comme diamètre; R le rayon zo; r celui du cercle générateur du tore; d la distance zs, α l'angle uzs, et ω celui uzk. Nous avons évidemment

$$nt = zn \sin\omega = (R + on) \sin\omega;$$

or, d'autre part, puisque n en est le pôle de sk, on a encore

$$ok.on = r^2,$$

ou

$$on = \frac{r^2}{ok};$$

en remplaçant on par sa valeur dans celle de nt, nous trouvons

$$nt = \left(R + \frac{r^2}{ok}\right)\sin\omega.$$

A son tour, le triangle rectangle skz donne

$$zk = d\cos(\alpha - \omega),$$

on en déduit

$$ok = d\cos(\alpha - \omega) - R.$$

En remplaçant ok par sa valeur dans celle de nt, il vient

$$nt = \left(R + \frac{r^2}{d\cos(\alpha - \omega) - R}\right)\sin\omega.$$

Quand ω tend vers zéro, $R\sin\omega$ tend vers la même limite; nous avons donc à chercher la valeur limite de l'expression

$$\left(\frac{r^2\sin\omega}{d\cos(\alpha - \omega) - R}\right), \text{ pour } \omega = o;$$

afin de lever l'indétermination qui résulte de l'introduction de l'hypothèse $\omega = o$ dans la fraction considérée, remplaçons-la par le rapport des dérivés de ses termes; nous aurons à chercher la valeur de la limite de

$$r^2\frac{\cos\omega}{d\sin(\alpha - \omega)};$$

en introduisant l'hypothèse $\omega = o$, la fraction se réduit à $\frac{r^2}{d\sin\alpha}$.

Or l'épure donne

$$d\sin\alpha = su;$$

par conséquent la distance de l'asymptote à la direction asymptotique est $\frac{p^2}{su}$.

Il en faut conclure que si l'on décrit le rabattement du méridien limite de centre u, et que l'on prenne la polaire vw du point s par rapport à ce méridien, cette polaire sera l'une des asymptotes cherchées. La seconde asymptote peut se tracer par symétrie.

Tangente en z a l'arc parasite. — Étant pris la polaire $\mu\mu_1$ de z par rapport à l'un des cercles méridiens rabattus, si l'on amène successivement, par une rotation autour de z, μ_1 en μ_2 et en μ_3, sur le lieu zp_2sp_1 des pieds des perpendiculaires, et que l'on tire $z\mu_2$, $z\mu_3$, ces droites seront les projections des méridiens pour lesquels l'arc parasite passe au point z, elles seront aussi des sécantes, issues de z, dont deux points de section se confondent avec z, c'est-à-dire les tangentes cherchées.

Point du méridien de profil. — Ces points (a, a'), (a, a'_1), (b, b'), (b, b'_1) ont été construits par la méthode générale, comme on le voit sur la figure.

562. Problème XXV. — *Par un point donné, mener une droite doublement tangente à un tore.* — Les constructions que nous allons indiquer, pour résoudre le présent problème et celui du paragraphe suivant, sont dues à MM. Janin et Mannheim [1].

Nous supposerons le tore donné par ses projections sur deux plans respectivement parallèles et perpendiculaires à son axe; puis, à l'aide d'une rotation autour de cet axe, nous placerons le point donné dans le plan de front conduit par ce même axe.

Prenons pour plan de la figure celui du méridien de front et soient : y l'axe de la surface (fig. n_2); S le point donné; M_1, M_2, le méridien principal du tore, et r le rayon des cercles de ce méridien.

Le problème étant supposé résolu, si l'on imprime à la bitangente cherchée une rotation autour

---

[1] *Bulletin de la Société philomatique*, t. II, p. 54.

de l'axe de la surface, elle engendrera un hyperboloïde de révolution à une nappe qui touchera le tore par les parallèles que décrivent les contacts de cette droite. Il suit de là que la section de l'hyperboloïde par le plan de la figure sera une hyperbole dont S est un point de passage, dont oy est l'axe non transverse, et qui doit être doublement tangent à M_1 et à M_2.

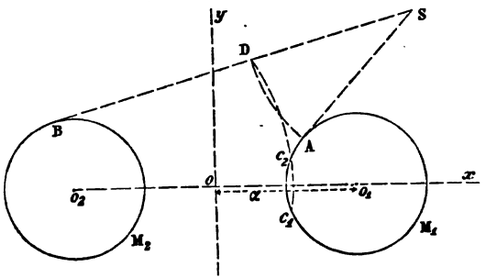


Fig. n°.

Nous allons construire les contacts de l'hyperbole et du cercle M_1. Étant pris la droite o_1o_2 des centres des méridiens M_1, M_2 pour axe des x, et l'axe de rotation pour axe des y, en désignant par α l'abscisse de o_1, l'équation du cercle M s'écrit

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + y^2 - r^2 = c = o.$$

D'autre part : 1° la corde commune à l'hyperbole et au cercle M_1 est perpendiculaire à l'axe ox, 2° l'hyperbole est rapportée à ses axes ; ceci résulte immédiatement du théorème de géométrie qui suit :

Les bissectrices de tout système de deux cordes communes à un cercle et à une conique, sont parallèles aux axes de la conique.

Puisque la corde commune est parallèle à l'axe des y son équation est

$$(2) \qquad x - l = o;$$

par conséquent, celle de l'hyperbole sera

$$c - \lambda(x-l)^2 = o,$$

ou

$$(x-\alpha)^2 + y^2 - r^2 - \lambda(x-l)^2 = o.$$

Cette dernière, attendu que le centre de l'hyperbole est à l'origine, doit être privée des termes du premier degré, on devra donc avoir

$$-2\alpha + 2\lambda l = o,$$

d'où l'on déduit

$$\lambda = \frac{\alpha}{l}.$$

En remplaçant λ par sa valeur dans l'équation de la conique bitangente, on trouve

$$(3) \qquad lc - \alpha(x-l)^2 = o.$$

Soient p et q les coordonnées du point S et c_1, la puissance de ce point par rapport à M_1, en exprimant que le point S est à l'hyperbole, on a

$$lc_1 - \alpha(p-l)^2 = o;$$

Nous allons en déduire la valeur de l; à cet effet, ordonnons par rapport à cette lettre, ce qui donne

$$\alpha l^2 - (2\alpha p + c_1)\, l + \alpha p^2 = o;$$

on a par suite

$$l = \frac{2\alpha p + c_1 \pm \sqrt{(2\alpha p + c_1)^2 - 4\alpha^2 p^2}}{2\alpha};$$

ou encore

$$l = \frac{2\alpha p + c_1 \pm \sqrt{c_1(c_1 + 4\alpha p)}}{2\alpha}.$$

Or, $c_1 + 4\alpha p$ est la puissance du point S par rapport à M_2; en désignant par c'_1 cette puissance, on aura

$$l = \frac{2\alpha p + c_1 \pm \sqrt{c_1 c'_1}}{2\alpha}.$$

D'autre part, les coordonnés des points de contact doivent vérifier (1), elles doivent donc aussi vérifier l'équation

$$(x + \alpha)^2 + y^2 - r^2 - 4\alpha x = o,$$

qui résulte de (1), et comme il faut qu'elles vérifient (2), les contacts devront appartenir à la courbe représentée par l'équation

$$(x + \alpha)^2 + y^2 - r^2 - 4\alpha l = o;$$

En remplaçant dans cette dernière, l par sa valeur, on trouve

$$(x + \alpha)^2 + y^2 - r^2 - 4\alpha p - 2c_1 \mp 2\sqrt{c_1 c'_1} = o,$$

ou

$$(x + \alpha)^2 + y^2 - r^2 - c'_1 - c_1 \mp 2\sqrt{c_1 c_1'} = o$$

ou encore

$$(x + \alpha)^2 + y^2 - r^2 - (\sqrt{c_1'} \pm \sqrt{c_1})^2 = o \tag{4}$$

Ce qui prouve que les points de contact cherchés sont à la rencontre de deux cercles dont l'un est M_1, et dont le second, représenté par l'équation (4), a pour centre o_2 et pour rayon l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont r et $\sqrt{c_1'} \pm \sqrt{c_1}$; or $\sqrt{c_1}$, $\sqrt{c_1'}$ sont les longueurs des tangentes menées du point S aux circonférences $M_1 M_4$, on en déduit le tracé suivant :

Par S on conduit les tangentes SA, SB, qui touchent M_1 en A, M_2 en B; du point S comme centre avec SA pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe SB en deux points D, D_1 : le point D_1 correspond à un cercle rencontrant M_1 en des points imaginaires; pour ce motif, ce point et le cercle qui en résulteraient n'ont pas été indiqués sur la figure. On trace alors un cercle concentrique à M_1 et dont D est un point de passage, par les rencontres C_1, C_2 de cette circonférence avec le cercle M_1 on a les contacts de M_1 et de l'hyperbole; les parallèles des points cherchés en résultent, et le problème se réduit alors à prendre les rencontres des cônes dont S est un sommet commun et qui ont pour bases respectives les deux parallèles trouvés. On peut arriver plus simplement à la construction précédente en considérant l'hyperbole comme lieu des points dont la différence des distances aux circonférences M_1, M_2 est constante et égale à SB — SA; ces distances étant mesurées suivant les tangentes aux deux circonférences considérées.

563. Problème XXVI. — *Mener à un tore, dans une direction donnée, des droites doublement tan-*

gentes. — En ce qui concerne le tore, conservons (fig. n_3) les notations et la figure du précédent problème; quant à la droite, supposons qu'on l'ait transportée parallèlement à elle-même, afin de la faire passer par le centre o de la surface et qu'on l'ait amenée, par une rotation autour de y dans le plan de front de la figure, en d. L'hyperboloïde auxiliaire précédemment décrit a pour, méridien principal une hyperbole bitangente au cercle M_1, qui a d pour l'une de ces asymptotes et y pour axe non transverse. Cherchons ses contacts avec M_1.

Reprenons, à cet effet, l'équation (3) du précédent paragraphe .

$$lc - \alpha(x - l)^2 = o,$$

exprimons que l'hyperbole qu'elle représente a pour asymptote la droite d; en désignant par β l'angle de cette droite avec ox, nous aurons :

$$l(1 + tg^2\beta) - \alpha = o$$

ou

$$l = \frac{\alpha}{1 + tg^2\beta} = \alpha\cos^2\beta.$$

La construction de la droite des contacts se fait alors bien simplement. Effectivement, si l'on projette o_1 en p, sur d, on a

$$op = \alpha\cos\beta,$$

et en projetant encore p en p_1, sur ox, on trouve :

$$op_1 = op\cos\beta = \alpha\cos^2\beta.$$

Ce qui prouve que la perpendiculaire pp_1 n'est autre chose que la corde qui détermine les contacts c_1, c_2. Les projections verticales des parallèles de contact sont alors $c_1\gamma_1$, $c_2\gamma_2$. Pour trouver la paral-

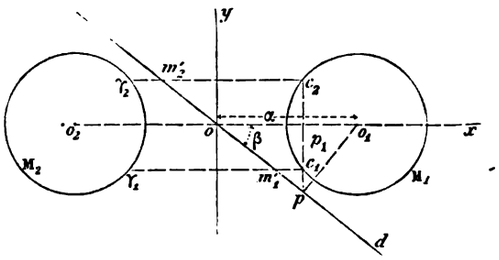


FIG. n_3.

lèle à la droite donnée rencontrant ces parallèles de la surface, concevons qu'on ait effectué les projections cylindriques de ces cercles dans la direction donnée et sur le plan du collier; ces deux projections auraient évidemment pour corde commune la perpendiculaire au plan vertical mené par o; on en conclut que d est la projection verticale de la droite cherchée.

Alors rien n'est plus simple que de construire les projections horizontales correspondantes; car il suffit de déterminer les projections horizontales des points de la surface du tore projetés verticalement en m'_1, m'_2 et de joindre ces projections horizontales par des droites parallèles à la ligne de terre.

564. Problème XXVII. — *Construire les points doubles de la trace horizontale d'un cône ou d'un cylindre circonscrit au tore.*

Il suffit de mener par le sommet du cône, ou dans la direction des génératrices du cylindre, des droites doublement tangentes au tore, et de prendre leurs traces horizontales.

565. Problème XXVIII. — *Connaissant le rayon de l'une des enveloppées sphériques d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, construire les projections de cette enveloppée.*

Afin de simplifier l'épure, nous prendrons pour axe de l'hyperboloïde une verticale z, z', et nous donnerons l'une g, g' des génératrices principales de cette surface (*fig.* 354, pl. XXXIX).

La projection horizontale de l'enveloppée sphérique est immédiatement obtenue en décrivant de z comme centre un cercle de rayon égal à celui de la sphère donnée.

Quant à sa projection verticale, nous l'obtiendrons à l'aide de la projection sur le plan de même nom d'une section faite sur l'enveloppée par un plan de front conduit par g, g', laquelle est un cercle dont le diamètre égale la corde $a\,b$ et qui doit être tangente à g'. Le centre de ce cercle, qui n'est autre que celui du contour apparent cherché, est donc placé sur z', à une distance de g' égale à la moitié de ab; on trouve facilement les deux points o'_1, o'_2 qui répondent à ces conditions géométriques. En décrivant deux circonférences ayant pour centre o'_1, o'_2, et de rayon égal à celui de l'enveloppée, on obtient enfin les contours apparents sur le plan vertical de deux sphères répondant aux conditions du problème.

566. Problème XXIX. — *Trois directrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe étant données, construire le centre de cette surface.*

On peut construire sur les trois droites données un parallélipipède; les plans des arêtes opposées de ce polyèdre contenant deux génératrices parallèles sont des plans asymptotiques de l'hyperboloïde et se croisent au centre de la surface. Le centre du parallélipipède se confond donc avec celui de l'hyperboloïde.

Pour simplifier les constructions supposons que l'on a rendu l'une des directrices d_1, d'_1 (*fig.* 355, pl. XXXIX) perpendiculaire au plan horizontal; soient (d_2, d'_2), (d_3, d'_3) les deux autres directrices.

La perpendiculaire au plan horizontal qui passe par le croisement b des droites d_2, d_3, rencontre les trois droites données, c'est donc une génératrice de la surface. Le plan qu'elle détermine avec d_1, d'_1 touche la surface à l'infini, c'est un plan asymptotique, il passe donc par le centre cherché; en outre ce centre doit se trouver à égale distance des deux génératrices parallèles qne l'on vient d'employer, il sera donc sur la perpendiculaire o, $a'c'$ au plan horizontal mené par le milieu o de d_1b.

Pour construire un second lieu du centre, cherchons une parallèle à d_2, d'_2 et qui s'appuie sur (d_1, d'_1), (d_3, d'_3). La projection horizontale δ_2 de cette droite est la parallèle à d_2 menée par d_1; la rencontre e des droites δ_2, d_3 se relève en e' et la parallèle δ'_2 à d'_2, menée par e', donne la projection vrticale de la droite cherchée. Une parallèle aux droites d'_2, δ'_2, équidistante de ces deux droites, détermine le second lieu de la projection verticale du point cherché, lequel, par sa rencontre o' avec $a'c'$, donne enfin la projection verticale du centre; les deux projections de ce point sont donc o, o'.

567. Problème XXX. — *Conduire par une droite parallèle à l'une des génératrices rectilignes d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, un plan tangent à cette surface.*

Soient : z, z' l'axe de la surface (*fig.* 356, pl. XXXIX) g, g' l'une de ses génératrices rectilignes, et d, d' la parallèle à g, g' par laquelle on veut conduire un plan tangent à la surface.

Il faut chercher la rencontre de d, d' avec l'hyperboloïde; coupons, à cet effet, la surface donnée

par le plan des droites (d, d') (g, g'), lequel a pour trace horizontale la droite de jonction P des traces θ, h des droites qui le déterminent. Après avoir tracé la projection horizontale du collier et la trace, sur ce même plan de projection, de l'hyperboloïde, on prend le second point de rencontre h_1 de cette dernière avec P, et on conduit de ce point la tangente g_1 au collier, laquelle représente la projection horizontale d'une génératrice d'un mode de génération différent de celui de g, g'; alors on connaît les projections horizontales g_1, g des génératrices qui constituent la rencontre du plan auxiliaire et de l'hyperboloïde. Il en résulte que d, d' perce la surface donnée en un premier point placé à l'infini sur cette droite et en un second dont la projection horizontale a se trouve sur d et sur g_1. Conduisons par a les projections horizontales des génératrices qui se croisent en A : l'une d'elles, déjà tracée, est g_1; l'autre s'obtient en menant la seconde tangente au collier issue de a, la trace horizontale de la génératrice qui se projette sur cette dernière droite est en t_1.

Les deux génératrices menées par le point à l'infini sur d, d' sont projetées horizontalement : l'une en g, l'autre sur la tangente au collier g_2, menée dans la direction g.

Il faut combiner avec l'une des génératrices issues de A, celle du système différent issue du point à l'infini sur d, d'. On trouve ainsi les plans qui ont pour traces horizontales : l'un, la droite P, l'autre, la droite P_1 qui unit t, t_1. Les deux solutions sont donc données par les plans que déterminent ces traces P, P_1 et la droite d, d'.

Si l'épure est exactement faite, la droite P_1 doit passer par θ ; et cette vérification, en employant la méthode de transmutation des figures, peut conduire à un théorème de géométrie plane.

568. Problème XXXI. — *On donne un ellipsoïde à trois axes inégaux ayant l'un de ses plans principaux parallèle au plan vertical, et on demande de construire :*

1° *Les projections d'un point de la surface et le plan tangent qui y passe.*

2° *Les projections de la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à l'ellipsoïde.*

3° *Les plans tangents parallèles à un plan donné.*

Soient : $(a'a'_1, aa_1)$, $(b'b'_1, bb_1)$ (c', cc_1) les projections des axes de l'ellipsoïde (*fig.* 357, pl. XXXIX).

1° Adoptons pour base d'un cylindre vertical le cercle décrit sur cc_1 comme diamètre, ce cylindre et l'ellipsoïde se toucheront en deux points communs (c, c') (c_1, c'), il s'ensuit, d'après le théorème de Monge, que l'intersection de ces surfaces est un système de deux coniques passant par les points de contact des surfaces considérées, et comme la droite de jonction de ces contacts est la perpendiculaire au plan vertical mené par c', les deux coniques devront se projeter verticalement suivant deux droites se coupant en c'. D'autre part, les rencontres d', f', g', h' des contours apparents en projection verticale de l'ellipsoïde et du cylindre font partie de la projection verticale de l'intersection, on en conclut que celle-ci est formée de deux courbes $(dcgc_1, d'g')$, $(dcgc_1, h'f')$ à projections droite et circulaire.

Cela fait, en plaçant, dans une position arbitraire, la projection verticale m' d'un point de la surface, cherchons-en la seconde projection. Les sections de l'ellipsoïde par des plans parallèles sont homothétiques; conduisons donc par m' deux droites $q'p'$, $s'u'$ respectivement parallèles à $h'f'$, $d'g'$ et coupons la surface par deux plans perpendiculaires au plan vertical conduits par ces droites; les projections horizontales des sections seront des cercles ayant pour diamètres les droites pq, us, obtenues par les rencontres de ab avec les lignes de rappel des points p', q', u', s'. En traçant ces cercles, on trouve, par leurs croisements m_1, m_2, les projections horizontales des deux points de l'ellipsoïde qui correspondent à m'.

Pour conduire par m_1, m' un plan tangent à l'ellipsoïde, on mène les tangentes (t_1, t'_1) (t_2, t'_2) en ce point aux cercles qui s'y croisent, lesquelles déterminent le plan cherché.

2° La courbe de contact du cône ou du cylindre circonscrit s'obtiendra en construisant des sections à projections droite et circulaire, et en circonscrivant des cônes le long de ces lignes; puis, en menant des plans tangents aux cônes par le point donné, ou parallèles à la droite donnée.

3° On peut, en augmentant dans le rapport de $b'b'_1$ à cc_1 (*fig.* 357, pl. XXXIX) les ordonnées comptées à partir du plan de front principal et perpendiculairement à ce plan, transformer l'ellipsoïde donné en ellipsoïde de révolution; après avoir fait subir la même transformation au plan donné, on retombera sur un problème connu.

569. Problème XXXII. — *Construire les projections de deux hyperboloïdes de révolution à une nappe, égaux entre eux, dont les axes sont donnés et tels, que, par des points placés sur des parallèles égaux, ces hyperboloïdes se touchent.*

Soient z, z_1 les axes donnés (*fig.* n_4). En un point commun aux deux colliers les surfaces hyperboloïdes doivent se toucher, il faut donc qu'elles aient en ce point une normale commune; or, la

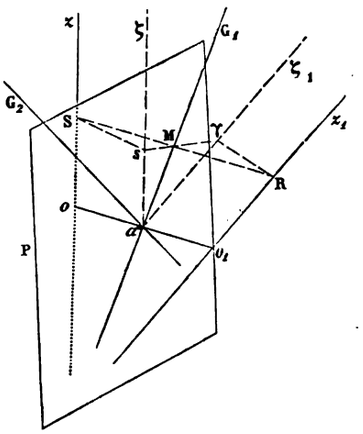


FIG. n_4.

normale en un point du collier est perpendiculaire à l'axe de rotation de la surface, il en résulte que la normale commune n'est autre chose que la plus courte distance oo_1 des axes donnés. Les colliers doivent avoir des rayons égaux, c'est donc au milieu a de la plus courte distance que tombe le point de croisement des colliers. Les génératrices des surfaces qui passent en ce point doivent être dans le plan tangent commun, c'est-à-dire dans le plan P mené, parallèlement à z et à z_1, par a. En outre ces génératrices doivent former avec les axes z, z_1 des angles égaux. Cherchons donc les droites du plan P, qui, partant de a, s'inclinent également sur les axes; elles devront s'incliner également sur les parallèles ζ, ζ_1 à z_1, z_1 ou, ce qui est la même chose, ces génératrices seront confondues avec l'une des deux bissectrices G_1, G_2 de l'angle $\zeta a \zeta_1$.

Reste à faire voir :

1° *Qu'un point quelconque M de G_1, par exemple, engendre des parallèles égaux;*

2° *Que les deux surfaces sont tangentes en M et par suite que les hyperboloïdes engendrés par la rotation de G_1 autour des deux axes z, z_1 se raccordent le long de G_1.*

1° Le point M engendre des parallèles égaux : en effet, sa distance au plan du collier dont o est le

centre n'est autre que la projection de aM sur ζ; pareillement la projection de aM sur ζ_1 donne la distance du point M au plan du second collier, et comme ces projections sont évidemment égales, le point M appartient bien à deux parallèles égaux des deux surfaces hyperboloïdes.

2° Les surfaces se touchent en M; en effet, les normales en ce point aux hyperboloïdes sont perpendiculaires à G_1; conséquemment leurs projections sur P se confondent et tombent sur la perpendiculaire $s\gamma$, menée par M, à G_1; d'autre part ζ, ζ_1 sont les projections des axes z, z_1 sur P, par suite, en menant par s, γ des parallèles à oo_1 on trouve les points S, R qui sont les rencontres des normales avec les axes; tout se réduit actuellement à établir que les trois points S, M, R sont en ligne droite. Ceci résulte de l'égalité des triangles rectangles SMs, RMγ qui entraîne celle des angles de même nom.

Exécution de l'épure. — Pour la simplicité du tracé, nous avons placé (*fig.* 358, pl. XXXIX) l'un des axes dans une position z, z' perpendiculaire au plan horizontal et l'autre z_1, z'_1 de front. La plus courte distance des axes a pour projection verticale le point de croisement o' des droites z', z'_1; sa projection horizontale est la portion oo_1 de la perpendiculaire à xy menée par o' et comprise entre z et z_1.

Le milieu a, o' de la commune perpendiculaire est un point de la génératrice de contact, laquelle se projette horizontalement sur la parallèle g à la ligne de terre menée par a, et verticalement sur l'une g' des bissectrices de l'angle des droites z', z'_1. Le contour apparent de l'hyperboloïde dont l'axe est vertical se trace alors sans aucune difficulté; ajoutons que cette surface a été limitée sur notre épure par deux plans équidistants du collier, dont l'un est le plan horizontal de projection. Le contour apparent en projection verticale du second hyperboloïde est la projection sur ce même plan du méridien de front de cette surface, laquelle a pour centre o', pour asymptotes g' et la droite g'_1 symétrique de g' par rapport à z'_1 et pour sommet de l'axe transverse les points s', s'_1 que l'on obtient en portant sur une perpendiculaire à z'_1 menée par o', de part et d'autre de ce point, deux longueurs égales au rayon o_1a du collier.

En ce qui concerne le contour apparent en projection horizontale du second hyperboloïde, nous observerons : 1° qu'il n'est rien autre chose que la projection sur le plan de même nom de la courbe de contact du cylindre vertical circonscrit à la surface hyperboloïde considérée, ou, ce qui revient au même, la projection de la section faite dans l'hyperboloïde par le plan diamétral conjugué aux cordes verticales; 2° que, pour une même direction de corde, les plans diamétraux de l'hyperboloïde et de son cône asymptote se confondent. Le plan diamétral conjugué aux cordes verticales du cône asymptote est ici perpendiculaire au plan vertical, o' est un point de passage de sa trace verticale; un second point de passage de cette trace se trouve au milieu m' d'une corde verticale μ', μ'_1 comprise entre les droites g', g'_1 qui forment le contour apparent en projection verticale de ce cône.

Le contour apparent cherché est donc la rencontre du plan perpendiculaire au plan vertical mené par $o'm'$ et de l'hyperboloïde. Ce plan coupe le collier en deux points dont les projections horizontales a, a_1 sont les sommets de l'axe transverse de l'hyperbole cherchée; les asymptotes de cette courbe sont les projections horizontales des droites de section du plan diamétral et du cône. Pour les construire, traçons de o', o_1 comme centre, avec un rayon arbitraire, une sphère auxiliaire, dont la rencontre avec le cône comprend un cercle projeté verticalement en $u'v'$; ce cercle coupe le plan diamétral en deux points dont les projections verticales se font en p', et dont on trouve les projections horizontales correspondantes p, p_1 par le secours d'un parallèle horizontal de la sphère.

Les droites o_1p, o'_1p_1 sont donc les asymptotes de l'hyperbole du contour apparent en projection horizontale, hyperbole que l'on peut actuellement tracer.

Pour limiter les projections de ce dernier hyperboloïde, on a projeté, par le procédé connu du lecteur, les cercles qui rencontrent ceux qui limitent la première surface. Les contacts des projections horizontales de ces cercles avec l'hyperbole du contour apparent horizontal ont été obtenus en prenant les rencontres (q', q) (q', q_1), (γ', γ), (γ'_1, γ_1) du plan diamétral et des circonférences de ces cercles, ces rencontres ont leurs projections verticales aux croisements q', γ' des projections sur le plan de même nom des cercles et du contour; quant à leur distance commune au plan de front conduit par l'axe z_1, z'_1, on l'a obtenue en construisant le rabattement de l'un des cercles limites, et la véritable grandeur q' Q_1 de sa demi-corde menée par q, q' dans une direction perpendiculaire au plan vertical.

CHAPITRE V

SECTIONS PLANES DU CONE, DU CYLINDRE ET DES SURFACES DE RÉVOLUTION

570. Le problème de la détermination de l'intersection d'un plan et d'une surface est un cas particulier de celui de la recherche de la ligne commune à deux surfaces quelconques; bien que nous n'ayons pas pour le moment à résoudre ce problème général, il importe néanmoins, pour éviter les redites et afin d'exposer dans sa complète généralité la présente question, de donner à cette place certaines théories relatives à la recherche de l'intersection de deux surfaces.

La courbe commune à deux surfaces s'obtient en construisant divers points de cette ligne et en les joignant, d'après leur ordre, par un trait continu.

571. Construction d'un point quelconque de l'intersection de deux surfaces. — Pour construire l'un quelconque des points de l'intersection de deux surfaces, on a recours, comme nous l'avons déjà fait dans le cas de deux plans, à une surface auxiliaire telle que les projections de ses rencontres avec les surfaces données se construisent aisément, et on prend les points de croisement des deux lignes de rencontre.

Les surfaces auxiliaires que l'on emploie sont : le plan, la sphère et quelquefois le cône et le cylindre.

Dans le cas de la section plane d'une surface, on peut encore construire les points de la section en ayant recours à une projection auxiliaire rectiligne de cette intersection.

Effectivement, que l'on change le plan vertical, par exemple, en dirigeant le nouveau plan perpendiculairement à la trace horizontale de celui de la section cherchée, cette dernière aura alors une projection verticale rectiligne, et le problème sera réduit à la recherche des projections horizontales d'un certain nombre de points dont on connaîtra les projections verticales.

572. Construction de la tangente. — La tangente en un point de l'intersection de deux surfaces doit appartenir à leurs plans tangents conduits par le point considéré, elle se peut donc obtenir par la rencontre de ces plans.

Dans le cas d'une section plane, l'un des plans tangents est simplement remplacé par le plan de section.

573. Méthode de Binet. — Cette méthode est basée sur la remarque suivante : si, par un point de la commune intersection des deux surfaces, on conduit des normales à chacune d'elles, ces lignes se-

ront perpendiculaires à l'intersection des plans tangents, c'est-à-dire à la tangente, leur plan sera donc aussi perpendiculaire à cette tangente. On en conclut que la tangente peut s'obtenir en conduisant par le point considéré une perpendiculaire au plan des normales menées aux deux surfaces par ce même point.

Lorsqu'on veut tracer une courbe, il ne suffit pas, pour en bien saisir la forme, de construire un nombre suffisant de points de cette ligne; il faut encore avoir le soin de déterminer ses points remarquables ainsi que les lignes qui s'y rattachent. Donnons à ce sujet quelques indications générales.

574. Construction des asymptotes. — Les asymptotes sont les tangentes dont le point de contact est à l'infini; on les obtient en construisant les rencontres des plans tangents aux deux surfaces menés par les points à l'infini de leur commune intersection.

575. Courbes hyperboliques. — Courbes paraboliques. — On appelle courbes hyperboliques celles qui offrent, comme l'hyperbole, des branches infinies et des asymptotes. Les courbes qui ont des branches infinies, mais dont les asymptotes sont, comme celles de la parabole, rejetées à l'infini, portent le nom de courbes paraboliques; une courbe hyperbolique ou parabolique du second degré est une hyperbole ou une parabole.

576. Points sur les contours apparents. — Ces points sont particulièrement utiles puisqu'ils limitent sur la surface considérée les parties visibles de la courbe d'intersection; une autre propriété, importante à noter, est que les projections de ces points sur le plan relatif au contour apparent considéré sont des contacts de ce contour en projection et de la courbe d'intersection projetée sur le même plan (§ **342**). Il n'y a pas de méthode générale pour déterminer les points sur les contours apparents; néanmoins une remarque importante à faire est que ces contours, pour les surfaces usuelles, sont plans, et, par suite, que les points qui nous occupent pourront le plus souvent se construire en adoptant pour surface auxiliaire le plan des lignes du contour apparent considéré, puis en opérant comme au paragraphe **571**.

577. Points le plus haut et le plus bas. — Ces points, difficiles à construire et que l'on doit renoncer à déterminer dans un grand nombre d'épures, s'obtiennent, dans certains cas particuliers, soit à l'aide du théorème donné au paragraphe **417**, soit par le secours de celui qui suit :

Théorème. — *Lorsque les plans tangents en un point de l'intersection de deux surfaces ont leurs traces horizontales parallèles, ce point est le plus haut ou le plus bas sur la ligne de rencontre des deux surfaces, et réciproquement.* — En effet, si les traces horizontales des deux plans tangents sont parallèles, la rencontre de ces plans, c'est-à-dire la tangente au point considéré, est parallèle à la direction commune de leurs traces horizontales, elle l'est donc aussi au plan horizontal, ce qui démontre la propriété. Réciproquement, en un point le plus haut ou le plus bas la tangente à la courbe est horizontale; par conséquent les traces horizontales des plans tangents qui la déterminent sont parallèles à cette tangente et, par suite, parallèles entre elles.

578. Cas des sections planes. — D'après le théorème que nous venons d'établir, on peut trouver les points le plus haut ou le plus bas des sections planes d'une surface quelconque, en construisant les points de la courbe de rencontre en lesquels la trace horizontale du plan tangent à la surface donnée est parallèle à celle sur le même plan de projection du plan de la section. Contrairement à ce qui a lieu pour le cas général, on trouve le plus souvent avec facilité les points le plus haut ou le plus bas des sections planes.

579. Surfaces limites. — En considérant une suite de surfaces auxiliaires coupant celles dont on

construit l'intersection, lorsqu'on arrive à une surface qui, tout en rencontrant l'une de celles données, devient tangente à l'autre le long d'une ligne commune, on obtient encore des points de l'intersection, mais on va cesser d'en trouver; pour ce motif cette surface auxiliaire porte le nom de *surface limite* et les points qu'elle détermine sont les *points limites* de la section. Les surfaces limites offrent une propriété très importante à connaître, que l'on peut énoncer ainsi qu'il suit :

Celle des deux surfaces données qui est coupée par la surface limite, l'est suivant une courbe tangente au point limite à la ligne de rencontre des surfaces données. — En effet, en un point limite, le plan tangent à l'une des surfaces données l'est aussi à la surface limite; par conséquent sa rencontre avec le plan tangent à la seconde surface donnée détermine : 1° la tangente à la ligne de rencontre des surfaces données, et 2° la tangente à la ligne de rencontre de la surface limite et de la surface donnée qui est coupée par cette surface limite.

580. Remarque. — Fréquemment les surfaces auxiliaires sont des plans horizontaux, les plans limites sont alors ceux qui passent par les points le plus haut ou le plus bas de l'intersection des surfaces dont on cherche la rencontre.

SECTIONS PLANES DU CONE ET DU CYLINDRE

581. Problème I. — *Construire les projections et la véritable grandeur de la section d'un cône quelconque par un plan.* — Soient : s, s' les projections du sommet (*fig.* 359, pl. XL), *abcd* la trace horizontale du cône et $P\alpha P'$ les traces du plan sécant.

582. Choix des surfaces auxiliaires. — Pour obtenir des sections auxiliaires de construction facile, nous adopterons des plans conduits par le sommet du cône, lesquels seront ainsi assujettis à une condition. On peut encore, en vue de simplifier la construction de leurs intersections avec le plan $P\alpha P'$, les assujettir à une nouvelle condition; nous les ferons passer par la parallèle $s'\omega', s\omega$ à $\alpha P'$, menée par s, s', de telle sorte que les intersections des plans auxiliaires avec celui qui nous est donné soient des lignes de front de ce dernier. Les traces horizontales des surfaces auxiliaires formeront un faisceau dont le sommet sera la trace ω, sur le même plan de projection, de la droite $s\omega, s'\omega'$.

583. Construction d'un point quelconque. — Adoptons pour trace horizontale du plan auxiliaire une droite quelconque Q divergeant du point ω et prenons ses rencontres avec la trace horizontale du cône, soit t l'une d'elles, ce point a pour projection verticale le point t' placé sur xy et sur la ligne de rappel menée par t; en unissant par des droites (t, s), (t', s'), nous obtenons les projections de l'une des génératrices d'intersection du plan auxiliaire et du cône.

Quant à la rencontre du plan auxiliaire et de $P\alpha P'$, on voit que le croisement h des droites αP, ωQ en est la trace horizontale et que, par suite, la parallèle à xy menée par h en est la projection horizontale.

Le point où cette parallèle rencontre st donne la projection horizontale d'un point quelconque m de la courbe d'intersection. Une ligne de rappel menée par m, jusqu'à la droite $s't'$, détermine la projection verticale m' qui correspond à m.

584. Tangente en un point quelconque de la ligne d'intersection. — La tangente, comme on l'a déjà établi (§ **572**), est la rencontre du plan tangent et du plan sécant. Adoptons le point de contact m, m', le plan tangent en ce point a pour trace horizontale la tangente R menée, à la base du cône, par t; la rencontre de R avec P donne la trace horizontale θ de la tangente, ce point se projette verticalement en θ', par suite la droite $\theta m, \theta' m'$ est la tangente cherchée. Mais s'il arrive, comme pour le point projeté horizontalement en m_1, que les traces horizontales R_1, P aillent se couper en un point

extérieur à l'épure, on pourra recourir au plan auxiliaire dont la trace horizontale est Q, et prendre : en premier lieu, la projection horizontale de sa rencontre avec $P\alpha P'$, laquelle n'est autre que la droite mh, déjà employée; en second lieu, la projection sh_1, sur le même plan de sa rencontre avec le plan tangent. On déterminera enfin le croisement μ des lignes hm, h_1s qui sera un point de la projection horizontale de la tangente. Cette tangente sera donc la droite μm_1. On trouverait facilement la projection verticale correspondante; nous ne l'avons pas fait pour éviter de trop charger l'épure de lignes.

585. Plan limite. — Ce plan est tangent au cône, on en obtient la trace horizontale en conduisant par ω la tangente Q_2 à la base acd. En opérant ensuite sur le plan limite comme on l'a fait sur le plan auxiliaire quelconque, on trouve le point m_2, m'_2; d'après la propriété des surfaces limites démontrée plus haut (§ 579), la rencontre h_2m_2, $h'_2m'_2$ du plan limite et de celui de la courbe cherchée est une tangente à cette dernière.

586. Branches infinies. — Asymptotes. — Tout d'abord, observons que les asymptotes des projections d'une courbe se confondent avec les projections des asymptotes de la courbe; en effet, les asymptotes ne sont que des tangentes et les tangentes aux projections d'une courbe se confondent avec les projections des tangentes à la courbe. Cela dit, abordons la question en cherchant les génératrices qui donnent les points à l'infini de la section, elles sont parallèles à $P\alpha P'$, nous les trouverons donc en conduisant par le sommet du cône un plan parallèle à $P\alpha P'$. La trace horizontale de ce plan est la parallèle Q_3 à P, menée par ω; en construisant les rencontres (t_3s, t'_3s'), (θ_3s, θ'_3s') du plan parallèle à $P\alpha P'$ avec le cône on obtiendra les génératrices de ce cône passant par les points à l'infini de la ligne d'intersection. Alors la tangente à la section par le point à l'infini de la droite $s\theta_3$, $s'\theta'_3$ sera une asymptote de la courbe d'intersection. Or cette tangente est la rencontre du plan $P\alpha P'$ et du plan tangent au cône suivant $s\theta_3$, $s'\theta'_3$, lequel a pour trace horizontale la tangente UU_1 menée à la base par θ_3; la rencontre de P avec UU_1 donne la trace horizontale h_3 de l'asymptote cherchée, cette trace se projette verticalement en h'_3, sur la ligne de terre.

D'ailleurs le plan tangent contient la génératrice $s\theta_3$, $s'\theta'_3$, qui est parallèle au plan $P\alpha P'$, par conséquent la rencontre de ces plans est parallèle à cette génératrice; en somme l'asymptote cherchée est la parallèle $h_3\beta$, $h'_3\beta'$, menée par h_3, h'_3, à $s\theta_3$, $s'\theta'_3$.

La seconde asymptote s'obtient pareillement en conduisant par h_4, h'_4 la parallèle $h_4\beta_1$, $h'_4\beta'_1$ à st_3, $s't'_3$.

De ce qui vient d'être dit on conclut que la courbe d'intersection d'un cône et d'un plan est hyperbolique lorsqu'un plan auxiliaire conduit par le sommet du cône, dans la direction de celui de la courbe, coupe le cône. On voit, en outre, que lorsque ce plan parallèle est tangent au cône, sa rencontre avec le plan de la courbe donne une asymptote à l'infini, et que, par suite, la courbe est parabolique.

Si, enfin, le plan parallèle n'atteint la surface qu'au sommet, la section n'a pas de branches infinies, c'est une courbe le plus souvent fermée, et dans tous les cas limitée.

587. Disposition des branches de la courbe par rapport aux asymptotes. — Soient : $C\alpha C_1$ la trace horizontale du cône (fig. n_5); P celle du plan sécant; s la projection, sur le plan de même nom, du sommet de la surface conique, et sa celle sur le même plan de la génératrice parallèle au plan sécant.

Adoptons des plans auxiliaires contenant la génératrice projetée en sa, lesquels détermineront sur le plan sécant des parallèles à cette génératrice. Les traces horizontales de ces plans auxiliaires passeront toutes par a.

Considérons d'abord la trace at tangente à $C\alpha C'$, sa section avec le plan de la courbe donne l'asymp-

tote de celle-ci, laquelle se projette horizontalement suivant la parallèle $t\alpha$, menée par t, à sa. Considérons ensuite deux plans auxiliaires dont les traces passent par deux points d, b de la base voisins de a et situés de part et d'autre de celui-ci; les projections horizontales des intersections correspondantes avec le plan de la courbe sont deux parallèles menées par t_1, t_2, à la projection $t\alpha$ de l'asymptote; les points m, m_1 que déterminent ces plans sont donc voisins de $t\alpha$ et situés de part et d'autre de cette asymptote; en outre, d'après la disposition des droites sd, sb, ils sont encore de part et d'autre de la droite at, et très éloignés de cette droite. Il en faut conclure, que la courbe est formée de deux branches β, β_1, placées de part et d'autre de l'asymptote et se réunissant au point à l'infini de celle-ci.

Cette règle peut être en défaut pour les points particuliers ou singuliers de la courbe de base;

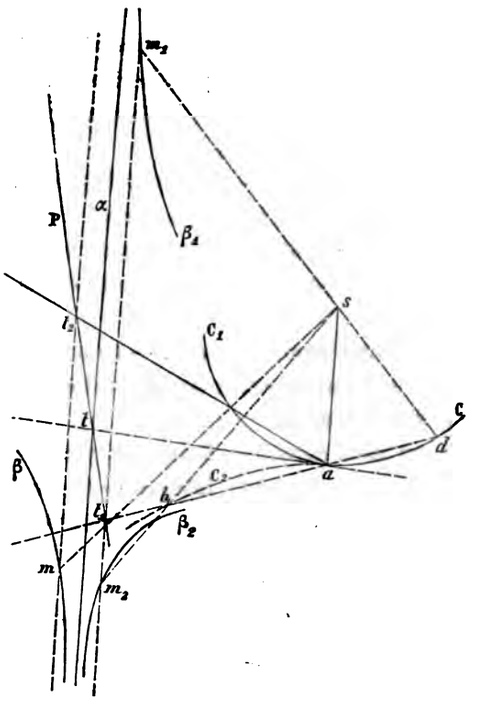


FIG. n_1.

ainsi, dans le cas où cette dernière offrirait un point d'inflexion en a (comme la courbe CaC_2), b se transporterait en b_1, m en m_2 et β en β_2; la courbe serait alors formée de deux branches β_1, β_2 placée d'un même côté de l'asymptote.

Dans le cas particulier qui vient d'être examiné, le plan tangent suivant la génératrice projetée en sa, traverse la surface, et toutes les sections planes ont une inflexion en leurs rencontres avec la génératrice de contact, on peut dire que la section offre encore à l'infini un point d'inflexion, ce qui motive le changement des dispositions de ses branches par rapport à la tangente au point à l'infini de la courbe.

583. Points le plus haut et le plus bas (*fig.* 359, pl. XL). — Ces points sont ceux en lesquels les traces horizontales du plan tangent et du plan donné sont parallèles; on les construit en opérant,

par la méthode générale, sur la divergente ωQ_4 menée par le point de contact t_4 d'une droite parallèle à P et tangente à la base; ce qui conduit au point m_4, m'_4, pour lequel la projection horizontale de la tangente est parallèle à P et la projection verticale parallèle à xy.

589. Points sur les contours apparents. — Pour les trouver, il suffit de faire en sorte, lorsqu'on construit les points quelconques, que certains plans sécants auxiliaires passent par les traces horizontales des génératrices des contours apparents. Ainsi, en adoptant le plan dont la trace horizontale ωQ_5 passe par la trace c de la génératrice du contour apparent vertical, on trouve, en opérant comme on l'a fait pour le plan dont ωQ est la trace horizontale, les projections m_5, m'_5, d'un point du contour apparent vertical; au point m'_5, la projection verticale de la courbe devra être tangente à $s'c'$, et ce point séparera sur la projection verticale de la courbe d'intersection la portion vue de celle qui est invisible.

590. Points sur une droite donnée. — On devra placer la droite dans le plan donné, alors, après avoir construit sa projection conique sur le plan horizontal, à l'aide de projetantes issues du sommet du cône, on prendra les rencontres de cette projection, et de la base que l'on relèvera, par le secours de projetantes coniques, sur la droite donnée.

591. Tangentes par un point extérieur. — Après avoir placé le point dans le plan donné, on mènera par ce point un plan tangent au cône, que l'on adoptera comme plan auxiliaire, ce plan déterminera : sur le cône la génératrice de contact, sur le plan de la courbe une droite passant par le point donné et qui touchera cette courbe en son croisement avec la génératrice de contact; cette droite sera donc la tangente cherchée.

592. Tangentes parallèles à une droite donnée. — La construction du paragraphe précédent est applicable au présent problème, en supposant simplement que le point extérieur est rejeté à l'infini dans la direction de la droite donnée.

593. Points limites dans un sens donné. — Points le plus haut et le plus bas des deux projections. — Points extrêmes dans le sens latéral. — On entend par points limites dans le sens de la flèche f (fig. n_6) les points de contact γ_1, γ_2 des tangentes perpendiculaires à f.

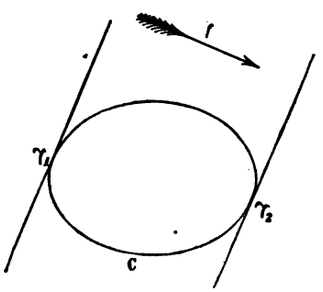


FIG. n_4

La détermination de ces points n'est donc rien autre chose que la construction des tangentes parallèles à une direction donnée (§ 592).

Sur les épures il est bon de tracer, par la méthode que nous venons d'indiquer et sur chacune des projections, les points limites suivant les directions de la ligne de terre et d'une perpendiculaire cette ligne; ce qui donnera le point le plus à droite, le point le plus à gauche et les points le plus haut et le plus bas de chaque projection.

Remarquons en passant que les points extrêmes dans le sens latéral doivent offrir la même tangente sur les deux projections (§ 28).

594. Points de rebroussement de première espèce. — Lorsque la directrice du cône est une courbe gauche, et que, en un point de cette ligne, la génératrice lui est tangente, toute section plane, au point de rencontre de cette génératrice et du plan sécant, offre un rebroussement de première espèce (**386, 2°**).

595. Visibilité (*fig.* 356, pl. XL). — En projection horizontale les génératrices de la nappe inférieure du cône qui ont leurs traces horizontales sur l'arc *abfk* sont visibles; et comme, d'autre part, l'arc $bmm_1m_4m_2f$ appartient à la portion correspondante du cône, il est visible sur le plan horizontal.

Les prolongements de cet arc, qui sont les projections horizontales des parties de la courbe placée au-dessous du plan horizontal de projection, doivent être dessinés en points ronds, il en est de même des projections verticales correspondantes. Par rapport au plan vertical, l'arc *abc* de base est seul visible, on devra, par suite, tracer en trait plein l'arc $b'm'm'_4m'_5$ et en points ronds les autres parties de la projection verticale de l'intersection.

596. Vraie grandeur de la courbe d'intersection. — On l'obtiendra, après avoir construit ses projections, en la rabattant sur l'un des plans de projection; le lecteur exécutera ce tracé sans aucune difficulté.

597. Construction simultanée des points de la courbe et de leurs tangentes. — Il suffit d'adopter des plans auxiliaires tangents à la surface, parce qu'alors le plan donné et le plan auxiliaire se couperont suivant des lignes qui, tout en servant à la détermination des points de la courbe, seront en même temps tangentes à cette courbe.

598. Exécution de l'épure. — premier tracé. — Soient données (*fig.* 361, pl. XL): les projections s, s' du sommet du cône, la trace horizontale C de cette surface et les deux traces $P\alpha P'$ du plan sécant. Exécutons d'abord, comme au paragraphe **586**, le tracé qui sert à vérifier si la courbe est hyperbolique, parabolique ou limitée; pour cela nous construirons la trace horizontale $\omega\omega_1$ du plan conduit par s, s' parallèlement à $P\alpha P'$. Cette trace servira non seulement à la vérification dont nous venons de parler, mais encore, comme nous allons le voir, à la construction des points de l'intersection cherchée.

Prenons pour trace horizontale du plan auxiliaire tangent au cône, l'une, R, des tangentes à sa base, la rencontre de ce plan avec le cône est la génératrice de contact projetée horizontalement en st.

La rencontre du même plan avec celui qu'on nous donne a pour trace horizontale θ; il faut en outre qu'elle soit parallèle à l'intersection du plan auxiliaire et de celui que nous venons de conduire par s, s', dans la direction $P\alpha P'$, laquelle intersection a pour trace horizontale h et passe par le sommet du cône; sa projection horizontale est donc sh. En menant alors par θ une parallèle à sh on a la projection horizontale $\theta\theta_1$ de la rencontre de $P\alpha P'$ avec le plan auxiliaire.

Par le croisement m de st avec $\theta\theta_1$ on obtient enfin un point de la projection horizontale de la courbe d'intersection, et la tangente en ce point est précisément la droite $\theta\theta_1$.

599. Second tracé. — Reprenons les données (*fig.* 362, pl. XL) et traçons les projections $v'h'$, vh de l'horizontale du plan $P\alpha P'$ de même cote que le point s, s'.

Cela fait, déterminons les plans auxiliaires par leurs traces sur le plan horizontal de projection et sur le plan horizontal conduit par s, s'; l'un d'eux sera alors déterminé par une tangente R à C et sa parallèle sv_1, $s'v'$, menée par s, s'.

Le plan auxiliaire a en commun avec le cône la droite projetée horizontalement en st et avec le

plan donné la droite dont la projection horizontale passe par les croisements θ, a, des deux couples de droites (P, R), (sv_1, vh).

On trouve alors, par la rencontre des droites $a\theta$, st, un point m de la projection horizontale de la section; quant à la tangente en ce point elle n'est autre que θa.

La projection verticale se construirait, après ce qui vient d'être dit, sans aucune difficulté.

600. Points de rencontre de la base et de la projection de la section sur le plan de cette base. — Lorsque la trace αP (*fig.* 359, pl. XL) rencontre la base du cône, ces points de rencontre (b, b'), (f, f') font évidemment partie de la courbe d'intersection, et les points b, f sont communs à la projection horizontale de cette courbe et à la base du cône; mais, indépendamment de ces points de rencontre, il peut s'en produire d'autres, qui correspondent à l'intersection des courbes en projection, sans que pour cela celle-ci se coupent dans l'espace.

On ne construit commodément ces points d'intersection que pour les cônes du second degré. Prenons donc (*fig.* 360, pl. XL) pour trace horizontale du cône une ellipse C par exemple, et plaçons le sommet s, s' ainsi que le plan sécant PαP$'$ dans des positions arbitraires.

Le cône est du second degré; en adjoignant le plan horizontal de projection à celui PαP$'$ nous avons une nouvelle surface du second ordre, dont la rencontre avec le cône se compose de la courbe C et de celle que nous étudions; les points d'intersection des projections horizontales de ces deux lignes sont les points doubles de la projection horizontale (§ 378) de la rencontre des deux surfaces du second degré considérées; or, on connaît ici l'une des lignes C de cette intersection, par suite, la connaissance d'une droite passant par les points doubles entraînerait immédiatement celle de ces points.

Pour trouver cette droite, remarquons que les points de l'espace qui se confondent en projection horizontale pour former l'un des points doubles, sont sur une corde verticale, dont le milieu se projette horizontalement au même point double.

D'après cela les points cherchés sont sur la projection horizontale de la droite de rencontre des plans diamétraux conjugués aux cordes verticales dans les deux surfaces du second degré considérées.

Déterminons ces deux plans. — L'un, relatif au système des deux plans, doit contenir αP, puisque tout le long de cette ligne les cordes verticales ont une longueur nulle; prenons ensuite dans le plan vertical de projection une corde verticale quelconque $a'b'$, son milieu m' appartient aussi au plan diamétral; les traces de ce dernier sont donc αP et la droite de jonction des points α, m'.

Le plan diamétral relatif au cône doit contenir les génératrices de cette surface qui forment le contour apparent en projection horizontale, car aux divers points de ces génératrices les cordes verticales ont des longueurs nulles. Ce plan diamétral a donc pour trace horizontale la droite Q de jonction des points t, t_1 et passe par le sommet s, s' du cône; la rencontre de Q avec la ligne de terre détermine un point β de la trace verticale Q$'$ du plan diamétral, un autre point de passage v' de cette trace a été construit par le secours d'une horizontale sv, $s'v'$ du plan cherché.

Les plans diamétraux étant ainsi déterminés par leurs traces, on construit aisément la projection horizontale wh de leur intersection, laquelle, en ses rencontres δ_1, δ_2 avec C, donne les points qu'il fallait déterminer.

Dans le paragraphe qui va suivre on supposera, comme dans celui-ci, que le cône est du second degré.

601. Sommets des projections et projections des sommets. — 1° *La section est une hyperbole.* — Tout d'abord on construit les asymptotes; puis, en prenant les bissectrices de l'angle des pro-

jections de ces asymptotes et celles encore des angles des mêmes asymptotes dans l'espace, on a les axes des projections et les projections des axes de la courbe étudiée; la question se réduit alors à construire les points de la section qui se projetait sur ces axes, ce que l'on sait faire (§ **590**).

2° *La section est une parabole.* — Pour constater que la courbe est une parabole, on a dû mener par le sommet du cône un plan parallèle au plan sécant donné et reconnaître que ce plan touche le cône par une génératrice; cette génératrice donne la direction asymptotique de la section.

En prenant alors des perpendiculaires aux projections de la génératrice ainsi trouvée et les projections d'une perpendiculaire à la génératrice elle-même, on trouve les directions des tangentes aux sommets des projections, et la direction des tangentes aux projections du sommet; tout alors se réduit à déterminer les points de contact des tangentes parallèles à ces diverses directions, ce que l'on sait encore faire (§ **592**).

Les sommets étant trouvés, les parallèles menées de ces points aux projections de la direction asymptotique donneront les axes des projections et les projections des axes.

3° *La section est une ellipse.* — La droite de jonction des points le plus haut et le plus bas détermine un diamètre de la courbe et de chacune de ses projections; le milieu de cette ligne et les projections de ce point donnent ensuite le centre de la courbe et ceux de ses deux projections.

En menant par le centre de la courbe une horizontale de son plan, on a le diamètre conjugué du diamètre déjà trouvé et on sait construire les extrémités de ce diamètre horizontal.

Cela fait, on construira, si l'on veut, les axes de l'ellipse connaissant deux diamètres conjugués : en opérant sur chaque projection on aura les sommets des deux projections; en opérant sur un rabattement des diamètres, on aura, en revenant ensuite aux projections, les projections des sommets. Habituellement on n'effectue pas la construction des sommets, les diamètres conjugués d'une ellipse sont, en effet, suffisants pour la déterminer et même pour la construire.

602. Problème II. — *Construire les projections et la véritable grandeur de l'intersection d'un cylindre avec un plan.* — Soient : C (*fig.* 363, pl. XL) la trace horizontale du cylindre, g la direction des projections horizontales de ses génératrices, d la projection horizontale d'une droite quelconque du plan donné et P la trace de même nom de ce plan.

Prenons un point A sur D et menons de ce point une parallèle aux génératrices du cylindre, soient g_1 sa projection horizontale et θ_1 sa trace de même nom; nous adopterons les plans auxiliaires parallèles à celui des droites G_1, D; leurs traces horizontales seront parallèles à $\theta\theta_1$; soit Q l'une d'elles, le plan correspondant coupe le plan donné suivant une droite dont la trace horizontale est à la rencontre θ_2 de Q et de P et qui se projette horizontalement sur la parallèle $\theta_2 d_1$, à θd.

La rencontre du plan sécant et du cylindre est un système de deux génératrices, dont les traces horizontales sont aux points de rencontre h_1, h_2 de Q avec C et dont les projections horizontales $h_1 g_2$, $h_2 g_3$ sont parallèles à g; par les rencontres de ces droites avec $\theta_2 d_1$ on a les projections horizontales m_2, m_3 de deux points de la section.

603. Tangente en un point de la courbe d'intersection. — La tangente au point projeté en m_2 est la rencontre du plan donné et du plan tangent au cylindre en ce même point. Ce plan tangent a pour trace horizontale la tangente R, à C, menée par la trace h_1; au croisement θ_3 des droites R, P on a la trace horizontale de la tangente demandée; il s'ensuit qu'en tirant la droite $\theta_3 m_2$ on obtient la projection horizontale de cette tangente.

604. Branches infinies des sections planes du cylindre. — Les branches infinies peuvent se

produire dans deux cas, savoir : 1° le plan est parallèle à l'une des génératrices du cylindre; 2° une génératrice est entièrement rejetée à l'infini.

Dans le premier cas, le plan étant parallèle à une génératrice l'est également à toutes, la section qu'il détermine est donc formée d'un certain nombre de génératrices, et n'offre rien de remarquable.

Par ce qui vient d'être dit, nous voyons que, si l'on écarte le cas d'une section rectiligne, les branches infinies ne peuvent se produire dans la section plane du cylindre qu'autant qu'elles existent sur la base; deux cas se présentent donc encore : 1° la base est hyperbolique; 2° elle est parabolique.

1° *La base est hyperbolique.* — Soient β, β_1 (*fig.* 364, pl. XLI) les deux branches de la base qui se réunissent à l'infini sur l'asymptote A (on suppose encore que la base est placée sur le plan horizontal); g, g' la direction des génératrices du cylindre et $P\alpha P'$ le plan sécant.

Nous admettons que g, g' n'est pas parallèle à $P\alpha P'$, il en résulte que les plans auxiliaires devant être parallèles à g, g' ne le seront jamais au plan $P\alpha P'$, ou, ce qui revient au même, que tout plan auxiliaire détermine des points de la section; en conséquence celui de ces plans qui passe par la génératrice placée à l'infini sur le cylindre donne des points de la section; cette dernière a donc toujours des branches infinies.

Cherchons son asymptote : elle est à la rencontre du plan $P\alpha P'$, et du plan tangent le long de la génératrice à l'infini, lequel doit être parallèle aux génératrices du cylindre et contenir la tangente au point à l'infini de sa base, c'est-à-dire l'asymptote A. Ce plan reçoit le nom de plan asymptotique du cylindre; on le construit en conduisant par un point θ, θ', pris arbitrairement sur A, la parallèle g_1, g'_1 à g, g'; puis en déterminant les traces du plan qui contient cette parallèle et la droite A : ce plan a pour trace horizontale A; sa trace verticale passe par celle v' de g_1, g'_1 et croise A en γ, sur xy.

L'asymptote cherchée est la rencontre wh, $w'h'$ du plan asymptotique $A\gamma v'$ avec celui $P\alpha P'$ qui nous est donné.

Pour terminer, ajoutons, en écartant toujours le cas des sections rectilignes, que le plan $P\alpha P'$ ne sera jamais parallèle aux génératrices du cylindre et qu'il rencontrera, par suite, le plan asymptotique suivant une droite non entièrement rejetée à l'infini. Cette droite sera une asymptote de la section; delà résulte cette conclusion importante à connaître :

Les sections planes d'un cylindre dont la base est hyperbolique sont également hyperboliques.

605. 2° *La base est parabolique.* — Un raisonnement, en tout semblable à celui du cas précédent montre : 1° qu'il y aura toujours des points de la section sur les génératrices à l'infini; 2° que le plan asymptotique, qui doit passer par la génératrice à l'infini et par l'asymptote de la base également rejetée à l'infini, ne sera rien autre chose que le plan à l'infini de l'espace (§ 4) et qu'il rencontrera, par suite, le plan de la courbe à l'infini.

En somme, on voit que la section, comme la base, sera parabolique.

Pour résumer la question nous dirons: Lorsque la base d'un cylindre est limitée, hyperbolique ou parabolique, la section est également limitée, hyperbolique ou parabolique.

En un mot, la section plane d'un cylindre est, par rapport aux points à l'infini, de même nature que la base.

APPLICATION DE L'HOMOLOGIE A LA RECHERCHE DES SECTIONS PLANES DU CONE ET DU CYLINDRE

606. Section plane du cône. — Au paragraphe **246** nous avons démontré que deux sections planes faites sur les faces latérales d'une même pyramide sont homologiques; comme, d'autre part, le cône est la limite de la pyramide, le théorème précité lui est applicable; ce qui se peut énoncer ainsi :

Les projections sur un plan quelconque de deux sections planes d'un même cône sont homologiques; l'axe d'homologie étant la projection de l'intersection des plans sécants et le centre celle du sommet.

Pour la pyramide, et, par suite, pour le cône la réciproque de ce théorème est vraie (§ **249**).

Afin de compléter ces généralités, démontrons ce théorème.

Lorsque deux courbes sont homologiques, leurs tangentes en deux points homologues le sont aussi. — Considérons deux sécantes homologues. En faisant rapprocher indéfiniment deux des points de section de la première sécante, les deux points homologues de la seconde tendront aussi à se confondre; les sécantes, en restant toujours homologues, deviendront donc simultanément tangentes; c'est là ce qu'il fallait établir.

607. Problème. — *Déterminer, à l'aide de l'homologie, une section hyperbolique d'un cône par un plan.* — Nous construirons, comme exemple, la projection horizontale de la courbe de rencontre d'un cône dont le sommet se projette horizontalement en s (*fig.* 365, pl. XLI) dont la base sur le même plan de projection est l'ellipse C, avec un plan déterminé par sa trace horizontale P et par la trace L sur le même plan de projection d'un plan conduit, parallèlement au premier, par le sommet du cône. Cette droite L sera, par conséquent, la droite limite de la figure cherchée (§ **250**).

Nous eussions pu déterminer le plan sécant par sa trace P et un quelconque de ses points; il eût alors été facile de construire un couple de points homologues des deux figures, et, en appliquant le tracé du paragraphe **251**, de déterminer la droite limite de la figure cherchée.

En plaçant les données de l'épure, nous avons, afin que la section soit hyperbolique, adopté pour droite limite L une sécante de la base C; dans ces conditions, comme le cône est du second degré, la courbe d'intersection sera une hyperbole.

608. Constructions simultanées d'un point quelconque de la section et de sa tangente. — Plaçons, dans une position arbitraire, sur la courbe C, un point quelconque m et cherchons tout à la fois l'homologue de ce point et celui de la tangente à C menée par m. Un premier lieu de l'homologue du point s'obtient en tirant la droite sm, qui unit le point choisi au centre d'homologie; afin d'en trouver un second, nous construirons ensuite l'homologue de la tangente mt menée à la courbe C par le point m. Cette tangente rencontre P en a, L en b; le premier de ces points est à lui-même son homologue, l'autre b a son homologue à l'infini sur la droite qui unit s, b; on aura donc, en tirant par a la parallèle at_1, à sb l'homologue de la tangente.

Au point de croisement m_1, des droites sm, at_1, se trouve le point cherché, en outre la tangente en ce point ne sera rien autre chose que la droite at_1 ayant servi à la construction du point.

609. Construction des asymptotes. — Les homologues des rencontres d, e de la base C avec la droite limite L sont à l'infini sur les droites qui unissent s aux deux points d, e et les homologues des tangentes en ces deux points sont les asymptotes cherchées.

Pour construire l'une d'elles menons donc la tangente $d\delta$, en d, à la courbe C, et cherchons son

homologue : le point de rencontre δ de cette tangente avec l'axe d'homologie est à lui-même son homologue, le point d a, on l'a déjà dit, son homologue à l'infini sur sd; donc la parallèle $\delta\alpha$, à sd, menée par δ, est l'asymptote cherchée. L'autre asymptote $\epsilon\beta$ se construit pareillement.

Dès lors que l'on connaît les deux asymptotes et un point de l'hyperbole cherchée, on peut, en ayant simplement recours aux propriétés segmentaires de l'hyperbole, achever sa construction.

610. Points sur une droite donnée. — Après avoir construit l'homologue de la droite donnée, on prend ses rencontres avec C; puis on cherche simplement les homologues de ces points de rencontre.

611. Tangentes par un point extérieur. — On construit l'homologue du point extérieur, on mène ensuite à la base C, par le point ainsi trouvé, des tangentes, dont on cherche les homologues.

612. Tangentes parallèles à une droite donnée. — Points limites dans un sens déterminé. — Sommets. — Ces trois questions, on l'a déjà dit (§ **592** et **593**), se résolvent à l'aide de celles que nous venons de traiter. Passons donc, sans plus insister, aux tracés qui en résultent, et, comme tous ces tracés sont identiques, bornons-nous à indiquer ceux de la recherche des sommets de la projection horizontale.

613. Sommets de la projection. — Le point de croisement o des asymptotes est le centre de l'hyperbole et la bissectrice $o\gamma$ de l'angle $\alpha o\beta$ en est l'axe transverse.

Il faut simplement construire les points placés sur $o\gamma$. Pour cet effet, cherchons l'homologue de cette ligne : le point f où cette droite croise l'axe d'homologie P est à lui-même son homologue; la rencontre h avec L d'une divergente menée parallèlement à $o\gamma$ par s, est l'homologue du point à l'infini sur $o\gamma$; l'homologue de l'axe transverse est donc la droite de jonction des points f, h.

La droite fh ainsi trouvée rencontre C aux points u, v qui sont les homologues des sommets cherchés; quant aux sommets eux-mêmes on les obtient par les croisements u_1, v_1 de l'axe $o\gamma$ et des divergentes qui unissent les points u et v au centre s d'homologie.

614. Problème. — *Déterminer, à l'aide de l'homologie, une section parabolique d'un cône par un plan.* — Nous conserverons les données du précédent problème, en ayant soin toutefois, afin que la section soit une parabole, de placer la droite L dans une position tangente à C (*fig.* 366, pl. XLI).

Sans reprendre la construction des points quelconques donnée plus haut, nous construirons seulement l'axe et le sommet de la parabole projetée sur le plan horizontal.

615. Axe et sommet de la projection. — Soit t le point de contact de la droite L avec C; le point t a pour homologue le point à l'infini sur la droite de jonction des points s, t et ce point à l'infini appartient à la projection horizontale de la parabole; il en faut conclure que la droite st est une direction asymptotique de cette projection, ou, ce qui revient au même, que st est la direction de l'axe de la projection cherchée. Une perpendiculaire sn à st donne la direction de la tangente au sommet de la projection. La détermination de ce sommet se réduit donc à la recherche du point de contact de la tangente à la projection de la parabole parallèle à sn.

Pour construire ce point de contact cherchons l'homologue du point à l'infini sur sn, il est à la rencontre k de sn et de la droite limite L.

Actuellement nous devons mener par k des tangentes à la base C du cône et chercher les homologues de leurs points de contact. L'une de ces tangentes est précisément la droite limite L, elle a pour homologue la droite à l'infini du plan et donne le sommet à l'infini de la parabole.

Il faut donc, après avoir mené la seconde tangente $k\Sigma$, nous occuper uniquement de la construction

de l'homologue du point de contact Σ de cette tangente : la droite Σk rencontre l'axe d'homologie P au point a qui est à lui-même son homologue; le point k de cette droite a son homologue à l'infini sur sk, donc la parallèle menée par a à la droite sk est homologue de la tangente; enfin, au croisement Σ_1 de cette dernière ligne et de $s\Sigma$ on a le point de contact cherché.

Après que l'on aura conduit par Σ_1 la parallèle $\Sigma_1 x$ à st on connaîtra : le sommet Σ_1 de la projection, son axe $\Sigma_1 x$ et sa tangente au sommet $\Sigma_1 a$.

616. Section plane du cylindre. — Dans le cas du cylindre, la projection de la base sur un plan quelconque et celle sur le même plan d'une section plane sont en affinité (§ **252**); effectivement, le centre d'homologie se trouve à l'infini sur la projection des génératrices du cylindre.

Soient : C la trace horizontale du cylindre (*fig.* 367, pl. XLI), P celle du plan te mg la projection horizontale d'une génératrice du cylindre.

Nous supposerons préalablement construite la projection horizontale m_1 du point de rencontre de la génératrice projetée en mg avec le plan sécant donné.

Cela posé, proposons-nous de déterminer l'homologue d'un point quelconque μ de C et la tangente correspondante. Pour exécuter simultanément les deux tracés, conduisons par m une parallèle $m\alpha$ à P, l'homologue de cette droite, dont la rencontre avec l'axe d'homologie est à l'infini, sera sa parallèle $m_1\alpha_1$.

Cherchons ensuite l'homologue de la tangente en μ à la courbe C; cette tangente rencontre P et $m\alpha$ aux points a, b, dont le premier, a, est à lui-même son homologue, tandis que le second, b, a son homologue au point de croisement b_1 de $m_1\alpha_1$ avec la droite de jonction du point b au centre d'homologie, qui est ici à l'infini sur mg.

La tangente cherchée est donc ab_1; quant à son point de contact, on le trouve par le croisement μ_1 de la tangente elle-même et de la droite qui unit μ au centre d'homologie.

DÉVELOPPEMENT DU CONE ET DU CYLINDRE. TRANSFORMÉES DES SECTIONS PLANES DE CES SURFACES

617. Notions préliminaires. — Les surfaces coniques ou cylindriques peuvent être considérées comme la limite des surfaces latérales d'une pyramide ou d'un prisme; elles sont donc, comme ces dernières, développables sur un plan (§ **339**).

Une ligne quelconque tracée sur une surface développable se change, lorsqu'on développe la surface, en une nouvelle ligne qui porte le nom de *transformée par développement* de la première, ou, tout simplement, de *transformée* de la ligne donnée.

Nous allons établir quelques propriétés de la transformée des lignes tracées sur les surfaces coniques; il est presque inutile d'ajouter que ces propriétés seront également applicables aux surfaces cylindriques, qui ne sont rien autre chose que des surfaces coniques dont le sommet est à l'infini sur une direction donnée.

618. Théorème fondamental. — *Lorsqu'on développe une surface conique* : 1° *une partie quelconque d'une ligne tracée sur cette surface est de même longueur que la partie correspondante de sa transformée;* 2° *l'angle des transformées de deux lignes quelconques tracées sur la surface est égal à celui de ces lignes.* — Considérons la surface latérale SABCD, etc., d'une pyramide (fig. n_7) et une ligne brisée $\alpha\beta\gamma\delta$, etc., dont les sommets sont placés sur les arêtes latérales de la pyramide.

Pour développer la pyramide, il suffit, laissant fixe la face SAB, d'amener sur son plan la face SBC, par une rotation autour de leur arête de contiguïté SB, en entraînant, pour les rabattre à leur tour sur le plan de la première, les faces qui suivent. Dans ces conditions la longueur de chacun des côtés de la ligne $\alpha\beta\gamma\delta$ etc., et, par conséquent celle de cette ligne elle-même, ne change pas; ce qui justifie pleinement, en passant à la limite, la première partie du théorème.

Pour la seconde, si l'on observe que les angles des côtés $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, etc., avec les arêtes latérales qu'ils rencontrent ne changent pas lorsqu'on développe la surface, si l'on observe encore que, à la limite, ces mêmes côtés sont précisément, lorsqu'on les prolonge, les tangentes à la limite de la ligne

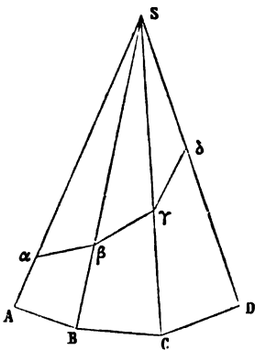


Fig. n_7.

brisée, on voit que l'angle formé par la tangente en un point d'une courbe tracée sur une surface conique avec la génératrice qui passe par ce point ne change pas lorsqu'on développe la surface.

Pour étendre cette propriété à deux courbes quelconques de la surface conique, il suffit d'ajouter que l'angle des deux courbes, qui est, par définition, égal à celui de leurs tangentes menées en leur point de croisement, se compose de la somme ou de la différence des angles que font ces mêmes tangentes avec la génératrice rectiligne de la surface qui passe par le point de rencontre des courbes considérées.

619. Théorème. — *A tout point, pris sur une section plane d'un cône et pour lequel le plan de la section se trouve être normal à la surface de ce cône, sans être perpendiculaire à l'arête de cette surface qui passe*

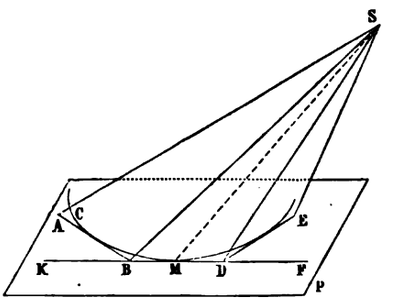


Fig. n_8.

par le point, correspond, sur le développement du cône, un point d'inflexion de la transformée de la section. — Considérons un cône quelconque de sommet S (fig. n_8) et, pour plus de simplicité, adoptons

comme directrice de la surfarce sa section C par un plan sécant P que l'on suppose normal en M à la surface du cône.

Substituons d'abord à la surface de ce cône celle d'une pyramide SABDE, etc., qui lui soit circonscrite, en ayant soin de placer l'une des faces SBD de cette pyramide sur le plan tangent au cône suivant l'arête SM.

On peut, en rabattant les faces SDE, SAB, autour des charnières respectives SD, SB et sur le plan de la face SBD prolongée, développer la portion figurée de la pyramide circonscrite; après quoi, en passant à la limite, on pourra étudier dans le voisinage du point M la forme de la transformée de C.

Prolongeons de part et d'autre de ses extrémités le côté BD; la droite KF ainsi obtenue est la projection commune sur le plan P des arêtes latérales SB, SD supposées ainsi prolongées.

Ces arêtes forment deux angles avec leur projection commune, l'un SDF nécessairement aigu, l'autre SBK nécessairement obtus; le premier de ces angles est plus petit que tous ceux que peut former SD avec les droites du plan; l'autre au contraire est plus grand que tous ceux qui peuvent être formés par SB avec les droites du même plan. On a donc :

$$\widehat{SDF} < SDE,$$

$$SBK > SBA.$$

Il est alors aisé de voir que, après les rabattements indiqués plus haut, le point E tombera au-dessous de la droite KF et le point A au-dessus de cette même droite.

Les côtés de la base de la pyramide présenteront donc après le développement la disposition ci-dessous indiquée (fig. n_9).

Dès lors on voit, en passant à la limite, que la droite fixe KF (fig. n_8) ou K'F' (fig. n_9), est tangente

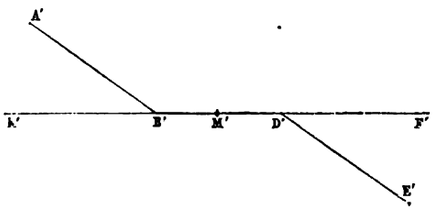


FIG. n_9.

à la transformée, et, de plus, que les points de celle-ci placés de part et d'autre de M' (fig. n_9) sont aussi de part et d'autre de la tangente, la transformée aura donc bien en M' (fig. n_9) un point d'inflexion.

Supposons maintenant, en conservant les notations précédentes, que la génératrice SM et le plan tangent SKF soient tous deux perpendiculaires au plan sécant P (fig. n_{10}); la face SBD est actuellement formée de deux triangles rectangles en M, en conséquence, les angles SBM, SDM sont aigus et ceux SBK, SDF obtus; il est alors manifeste que l'on a :

$$\widehat{SDF} > \widehat{SDE},$$

$$\widehat{SBK} > \widehat{SBA}.$$

En rabattant alors, comme on l'a fait plus haut, les faces SAB, SDE, autour des charnières

respectives SB, SD, sur le plan tangent SKF, les points A, E se placeront au-dessus de KF; la transformée de la base ABDE aura par suite la forme que la figure o_1 indique. A la limite, dans le voisinage

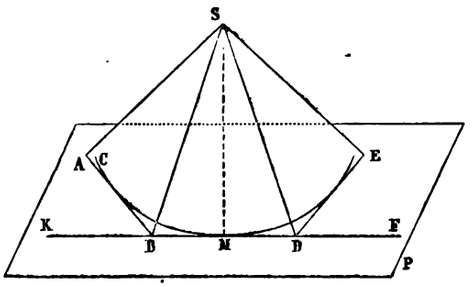


Fig. 368.

et de part et d'autre du point M' (fig. o_1), la transformée sera donc placée d'un même côté de la tangente K'F'. C'est là ce qu'on voulait démontrer.

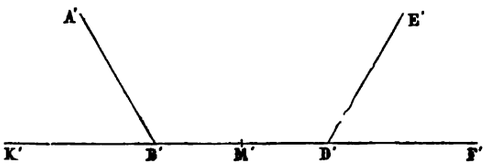


Fig. o_1.

620. Développement du cylindre. — Nous considérerons deux cas : 1° celui, très usuel et très simple, du cylindre droit de révolution; 2° celui du cylindre quelconque.

621. Problème. — *Construire les projections, la vraie grandeur et la transformée de la courbe d'intersection d'un cylindre droit de révolution, dont l'axe est perpendiculaire au plan horizontal, et d'un plan quelconque.* — Rien n'empêche de supposer que le plan sécant est dans une position perpendiculaire au plan vertical; car, par une rotation autour de l'axe du cylindre, il est toujours facile de l'amener dans cette position particulière. La trace horizontale du cylindre est le cercle figuré sur l'épure (*fig.* 368, pl. XLI), et la surface de ce cylindre se projette horizontalement sur cette trace. La projection verticale du cylindre limité, d'une part, à sa trace horizontale, de l'autre, à une base parallèle à cette trace, est le rectangle $a'b'a'_1b'_1$.

Donnons-nous, enfin, les traces $P\alpha P'$ du plan sécant.

622. Projection de la section. — Telle qu'elle est disposée, l'épure donne immédiatement les projections de la courbe d'intersection, qui sont : sur le plan horizontal, le cercle donné, et sur le plan vertical, le segment $e'g'$, compris dans le rectangle $a'b'b'_1a'_1$, de la trace $\alpha P'$.

623. Vraie grandeur de la section. — Dans le but de réduire la place occupée sur l'épure par la vraie grandeur de l'intersection, on rabat ordinairement cette intersection sur un plan parallèle au plan horizontal conduit par son centre ω, ω' : ce plan a pour trace verticale la parallèle Q' à la ligne de terre menée par ω'.

Prenons un point quelconque m, m' de la courbe d'intersection et rabattons-le autour de la droite ω', ωz : sa projection verticale vient au point de croisement m'_1 de Q' avec un arc de cercle dont m' est un point de passage et qui a son centre en ω'; sa projection horizontale se place à la rencontre m_1 d'une parallèle à la ligne de terre menée par m et d'une ligne de rappel issue de m'_1.

624. Tangente à la courbe de section en véritable grandeur. — Cherchons la tangente en m_1, m'_1. Avant le rabattement, la projection horizontale de la tangente n'est autre que la tangente mn au cercle donné; elle rencontre la charnière en n, point qui ne bouge pas pendant le rabattement; il suffit donc, pour avoir la projection horizontale de la tangente cherchée, d'unir les points n, m_1 par une droite. Sa projection verticale, qui se confond avec Q', ne présente donc aucun intérêt.

La courbe d'intersection, on l'a vu en géométrie analytique, est une ellipse. En appliquant à l'épure de la tangente la méthode de transmutation des figures, il est aisé de démontrer à nouveau l'une des propriétés bien connue qui sert à tracer la tangente à l'ellipse.

625. Sommets de la courbe de section en véritable grandeur. — Rien n'est plus simple que de les construire; ils sont en effet, la symétrie de la figure le montre, projetés en (a, e'), (b, g'), (i, ω'), (j, ω'); quant à leurs rabattements, on voit que les deux derniers, comme points de la charnière, ne bougeront pas et que les deux autres iront se placer en (e_1, e'_1), (g_1, g'_1).

626. Foyers de la section en véritable grandeur. — Les points de contact du plan $P\alpha P'$ avec deux sphères tangentes à ce plan et inscrites au cylindre, sont, d'après le théorème de DANDELIN et QUETELET, les foyers de la section; l'un deux, f, f', seulement a été construit sur notre épure; son rabattement y est également figuré en f_1, f'_1.

627. Directrices de la section en véritable grandeur. — Toujours d'après le même théorème, ces droites seront les rencontres de $P\alpha P'$ avec les plans des courbes de contact du cylindre donné et des sphères auxiliaires qui servent à la construction des foyers. L'une des directrices seulement est figurée, par sa projection verticale d' et son rabattement d_1, d'_1, sur notre épure.

628. Développement du cylindre. — Ouvrons le cylindre suivant la génératrice $b, b'b'_1$, pour le dérouler sur le plan vertical, en plaçant la transformée de sa base, qui est évidemment rectiligne, sur la ligne de terre.

Le développement du cylindre est un rectangle de base $\beta\beta''$ égale à la longueur de la circonférence $a\ i\ b\ j$ et dont la hauteur $\beta\beta_1$ n'est autre que celle du cylindre.

On peut calculer $\beta\beta''$; mais il est fréquemment plus commode d'opérer par la méthode graphique qui suit : Une valeur du nombre π approchée à un demi-centième près, par excès, est $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; on peut donc prendre pour valeur approximative de la circonférence

$$2R(\sqrt{2}+\sqrt{3}),$$

qui n'est autre chose que le double de la somme du côté du triangle équilatéral et du côté du carré tous deux inscrits dans la base.

Après ce que nous venons de dire, la construction rapide de $\beta\beta''$ et, par suite, celle du développement du cylindre n'a plus de difficulté.

629. Construction d'un point quelconque de la transformée de la section. — Opérons toujours sur le point projeté en m, m'; nous le déterminerons par son abscisse curviligne bm prise, à partir de l'origine b, sur la base du cylindre, et par son ordonnée rectiligne comptée sur la génératrice de ce même cylindre; cette ordonnée, dans sa véritable grandeur, est ici égale à $m'm'_2$.

On devra donc rectifier, attendu que la longueur d'une ligne est égale à celle de la transformée (§ 618, 1°), l'arc bm en $\beta''\mu_2$, et prendre, sur une perpendiculaire à la ligne de terre menée par μ_2, une longueur $\mu_2\mu$ égale à m'_2m'. Le point m, m' se place ainsi en μ, sur le développement.

On construira, de la même façon, un nombre de points suffisant pour déterminer la transformée de la section.

Pour rectifier l'arc bm en $\beta''\mu_2$, on lui substitue une ligne brisée inscrite, que l'on déroule, à partir de β'', sur la ligne de terre. Il est un moyen plus simple et plus exact d'opérer le déroulement des arcs; il consiste à choisir les points dont les projections horizontales partagent le cercle de base en un certain nombre de parties égales; après quoi, pour obtenir d'un seul coup toutes les abscisses curvilignes déroulées, il suffira de diviser en un même nombre de parties égales la longueur $\beta\beta''$ préalablement déterminée par l'une des méthodes données plus haut.

630. Tangente en un point quelconque de la transformée. — Nous choisirons le point μ. En appuyant notre tracé sur le théorème fondamental (§ **618**, 2°), on voit qu'il suffira de reproduire en μ l'angle, dans sa véritable grandeur, de la tangente en m, m' avec les génératrices du cylindre; nous engagerons cet angle dans un triangle que nous reproduirons en vraie grandeur sur le développement.

Après avoir fait observer que la trace horizontale de la tangente se fait au croisement t des droites $mn, \alpha P$, il est naturel de recourir, pour construire l'angle en véritable grandeur, au triangle de l'espace Mmt, rectangle en m: déjà, sur le développement, $\mu\mu_2$ représente la transformée de Mm; il reste alors simplement à reporter, sur la ligne de terre et dans un sens que l'examen de la figure permet facilement de déterminer, la longueur mt en $\mu_2\tau$, et de tirer la droite $\tau\mu$, qui sera la tangente cherchée.

631. Points le plus haut et le plus bas de la transformée. — Aux sommets (a, e'), (b, g') du grand axe, les tangentes à l'ellipse forment avec les génératrices du cylindre un angle droit, les points cherchés sont donc, attendu que cet angle droit doit se reproduire sur le développement, ceux ϵ, γ_1, γ''_1 que ces sommets déterminent.

632. Points d'inflexion de la transformée et tangentes en ces points. — En (i, ω'), (j, ω') les plans tangents au cylindre sont parallèles au plan vertical et perpendiculaires, par suite, au plan sécant $P\alpha P'$; le théorème du paragraphe **619** leur est donc applicable; par conséquent, leurs points correspondants ω_1, ω_2 sont les points d'inflexion de la transformée.

Pour trouver la tangente à la transformée en ω_2, il suffit de mener en ce point une droite qui s'incline sur la verticale d'un angle égal à celui des génératrices du cylindre et de la tangente à la courbe de l'espace en i, ω', or ce dernier est projeté dans sa véritable grandeur en $\alpha\omega' j$, la tangente se peut donc simplement obtenir en menant par ω_2 une parallèle $\omega_2\pi$ à $\alpha' P'$. La symétrie de la figure par rapport à la verticale du point ϵ, permet de construire très simplement la tangente au second point d'inflexion ω_1.

633. La transformée est une sinusoïde. — Nous chercherons, pour le prouver, l'équation du lieu du point μ.

Prenons pour origine le point d'inflexion ω_2 et pour axes $\omega_2 x$, $\omega_2 y$ respectivement parallèles à la ligne de terre et aux génératrices du cylindre.

Figurons les coordonnées du point μ et désignons-les par x et y.

Désignons encore par φ l'angle du plan $P\alpha P'$ avec l'horizon et par R le rayon du cylindre. Prolongeons les droites mm', mm_1: la première jusqu'à sa rencontre m'_3 avec Q'; l'autre jusqu'au point k où elle croise ij. Tout cela entendu, nous aurons, d'une part :

$$-y = \mu\mu_1 = m'm'_3 = m'_3\omega' \operatorname{tang}\varphi = mk \operatorname{tang}\varphi = R \sin m\omega k \operatorname{tang}\varphi,$$

ou encore

(1) $$-y = \mathrm{R} \sin \frac{\text{arc}\, im}{\mathrm{R}} \operatorname{tang} \varphi.$$

D'autre part, nous aurons encore :

(2) $$-x = \omega_2 \mu_1 = \text{arc}\, im.$$

En éliminant l'arc im entre (1) et (2) on trouve enfin

$$y = \mathrm{R} \operatorname{tang} \varphi \sin \frac{x}{\mathrm{R}},$$

qui est l'équation du lieu; elle est de la forme

$$y = c \sin c'x;$$

c'est donc bien l'équation d'une sinusoïde.

C'est à cause de son intervention dans une importante épure de la coupe des pierres (pont biais — appareil héliçoïdal), que nous avons étudié avec tous les détails qu'il comporte le présent problème.

634. Problème. — *Construire : 1° les projections et la vraie grandeur de la section droite d'un cylindre quelconque; 2° le développement du cylindre, les transformées de l'une de ses bases et de sa section par un plan quelconque.* — Les divers points de la figure à développer seront, comme pour le problème précédent, mis en place au moyen de deux coordonnées comptées : l'une sur les génératrices du cylindre, l'autre, sur une courbe de la surface ayant une transformée facile à construire. Cette courbe sera la section droite du cylindre, dont la transformée est une droite perpendiculaire aux transformées des génératrices. Il y a donc toujours lieu de construire, antérieurement au développement, la section droite du cylindre.

CONSTRUCTION DE LA SECTION DROITE D'UN CYLINDRE UELCONQUE

635. Adoptons, pour donner à l'épure un plus grand intérêt, un cylindre dont l'une des bases sera un cercle *abcd* (*fig.* 369, pl. XLII) situé sur le plan horizontal de projection; d'ailleurs, les raisonnements, en ce qui concerne le principe de la construction du développement, seront indépendants de la forme particulière attribuée à la base.

Afin d'achever la détermination du cylindre nous donnerons, en outre, la projection horizontale a'' de l'une de ses génératrices et la cote du point de cette ligne dont u est une projection : on a encore, pour éviter de charger l'épure de lignes inutiles à son explication, fait passer la droite au par le centre o du cercle donné.

Pour appliquer commodément la méthode du paragraphe **571**, plaçons la ligne de terre xy dans une position parallèle à la projection horizontale des génératrices du cylindre et projetons verticalement les points a, u : le premier en a', sur xy; l'autre en u', à la cote donnée. En unissant a', u' nous obtenons l'une des lignes du contour apparent vertical du cylindre; l'épure suffit pour indiquer la construction de l'autre ligne de ce contour.

Après avoir abaissé d'un point p, placé dans une position arbitraire sur xy, des droites respectivement perpendiculaires aux projections au, $a'u'$ de la génératrice, nous aurons les traces $\mathrm{P}p\mathrm{P}'$ du plan de la section droite.

La projection verticale de cette section est immédiatement donnée par le segment $a'_1c'_1$ de P′ compris dans le contour apparent vertical du cylindre.

636. Projection horizontale d'un point quelconque de la section droite. — Plaçons, dans une position arbitraire sur $a'_1c'_1$, la projection verticale m'_1 d'un point de la section droite et construisons successivement : la projection verticale m'_1m' de la génératrice qui passe par le point choisi; les traces horizontales m, k des deux lignes qui correspondent à cette projection verticale; les projections horizontales g, g_1 de ces lignes; enfin les points m_1, k_1 qui se trouvent à la rencontre de la ligne de rappel issue de m'_1 et des droites g, g_1.

Ces points m_1, k_1, ainsi construits, sont deux quelconques des points de la projection horizontale de la section droite. On construira pareillement autant de points qu'il en faut pour tracer avec exactitude la projection horizontale de la section droite, ou plutôt son rabattement, qui seul intervient dans la détermination de la transformée de cette section.

637. Construction de la tangente à la section droite. — Cherchons la projection horizontale de la tangente en m_1, m'_1; le plan tangent suivant la génératrice $m'm'_1$, mm_1 a pour trace horizontale la tangente R, en m, au cercle de base; par la rencontre t de R avec P, on a la trace horizontale de la tangente; la projection horizontale cherchée s'obtient donc en tirant la droite m_1t.

638. Sommets de la projection horizontale. — En premier lieu, nous voyons que le plan de front conduit par l'axe du cylindre est évidemment un plan de symétrie de la section et de sa projection horizontale; il en résulte que les projections horizontales a_1, c_1 des deux points (a_1, a'_1), (c_1, c'_1), de cette section, placés dans ce plan, sont les projections horizontales de deux des sommets et deux sommets de la projection horizontale.

En second lieu, nous voyons qu'aux points (d_1, b'_1), (b_1, b'_1) de la section, placés sur le contour apparent horizontal du cylindre, les tangentes sont, dans l'espace et en projection horizontale, respectivement parallèles à l'axe de l'ellipse a_1c_1, $a'_1c'_1$ et à l'axe a_1c_1 de sa projection horizontale. Il suit de là que les points b_1, d_1 sont tout à la fois, les projections horizontales des deux autres sommets et les autres sommets de la projection horizontale.

639. Vraie grandeur de la section droite. — On rabat le plan PpP′ sur le plan horizontal. En opérant sur le point m_1, m'_1 on trouve : 1° au point M′$_1$, où se fait l'un des croisements de xy avec un arc de cercle ayant p pour centre et m'_1 pour l'un de ses points de passage, le rabattement de la projection verticale du point choisi; 2° par le croisement de deux droites, l'une dans le prolongement de g, l'autre perpendiculaire à la ligne de terre et passant par M′$_1$, le rabattement M$_1$ du point considéré.

Par des traces semblables, on a pu figurer sur l'épure les sommets A$_1$, B$_1$, C$_1$, D$_1$ de l'ellipse rabattue.

La trace t de la tangente en m_1, m'_1 demeure fixe lorsqu'on rabat la figure, conséquemment la droite qui unit ce point à M$_1$ est la tangente au rabattement en ce même point M$_1$.

640. Section par un plan oblique quelconque QqQ′. — Construction d'un point quelconque de la section. — Les surfaces auxiliaires seront des plans de front passant par les génératrices qui ont déjà servi à la détermination de la section droite.

Celui qui passe par la génératrice mm_1, $m'm'_1$ rencontre Q en n, n' et QqQ′ suivant la droite de front projetée horizontalement sur g, verticalement sur la parallèle menée à Q′ par n'.

La rencontre n'_1, n_1 de cette ligne de front avec la génératrice $m'm'_1$, mm_1 est un point de l'intersection cherchée.

641. Construction de la tangente. — Le croisement h, des traces horizontales Q, R, est la trace horizontale de la tangente cherchée, cette trace a pour projection verticale h'; les projections de la tangente sont donc hm_1, $h'n'_1$.

642. Diamètres conjugués de la projection verticale. — En opérant sur les deux plans auxiliaires de front qui touchent le cylindre et sur celui qui passe par son axe, comme on l'a fait pour un plan auxiliaire quelconque, on trouvera sur le plan vertical les points r'_1, s'_1, l'_1, l'_2. Les deux premiers sont des points limites en lesquels, d'après la propriété générale connue (§ 579), les tangentes sont $r'r'_1$, $s's'_1$; les deux autres sont les points du contour apparent en projection verticale, ils ont donc pour tangentes les lignes $c'l'_1$, $a'l'_2$ qui forment ce contour.

Il en résulte que les droites $l'_1l'_2$, $s'_1r'_1$ parallèles respectivement aux côtés du parallélogramme 1'2'3'4' circonscrit à la projection verticale de l'ellipse que nous construisons, sont deux diamètres conjugués de cette projection.

Après avoir déterminé, par le procédé indiqué plus haut, un nombre suffisant de points de la projection verticale de la section cylindrique, on a fait passer par ses points un trait continu, afin de représenter la projection verticale de l'ellipse de section. Quant à la projection horizontale, inutile au tracé du développement, on ne l'a point déterminée; on eût également pu se dispenser de tracer la projection verticale de la courbe, à la condition, bien entendu, de construire ses points, seuls utiles à l'exécution du développement.

643. Développement du cylindre. — Dans les tracés que nous venons d'exécuter, tout a été disposé non seulement en vue de réduire ces tracés eux-mêmes; mais encore, et surtout, pour obtenir immédiatement les éléments nécessaires aux constructions ultérieures. Effectivement, les abscisses curvilignes des points se relèveront directement sur l'ellipse $A_1B_1C_1D_1$, et deviendront rectilignes après le développement; les ordonnées rectilignes, comptées sur les génératrices du cylindre, seront encore rectilignes sur le développement, et, en outre, elles se projettent verticalement dans leur véritable grandeur.

En insistant sur les avantages que présente le groupement des constructions de l'épure qui nous occupe, nous voulons appeler l'attention du lecteur sur ce point qu'il faut toujours, avant d'aborder l'exécution des divers tracés qui constituent une épure, l'étudier dans son ensemble, afin de réduire sa construction et de faciliter sa lecture.

644. Transformée de la section droite. — C'est, on l'a déjà dit, une ligne droite perpendiculaire aux transformées des génératrices; nous la placerons, pour rendre plus facile la lecture de l'épure, sur le prolongement de P'.

En supposant le cylindre ouvert suivant la génératrice aa_1, $a'a'_1$, le point a_1, a'_1 se dédoublera: donnons-nous d'abord, dans une position arbitraire sur P', l'un α_1' des points qu'il détermine sur le développement, après quoi, nous prendrons $\alpha'_1\beta_1$ égal à l'arc A_1B_1 rectifié: pour rectifier cet arc on le remplacera par une ligne brisée. Cela fait, on complètera le développement de la section droite en portant au delà de β_1, en $\beta_1\gamma_1$, $\gamma_1\delta_1$, $\delta_1\alpha'_1$, trois fois la longueur rectifiée, $\alpha'_1\beta_1$, du quart de l'ellipse de section droite.

645. Transformée de la base et de la section oblique. Constructions simultanées d'un point de chaque transformée. — Opérons sur les trois points (m_1, m'_1), (m, m'), (n_1, n'_1), le premier devant servir à obtenir l'abscisse commune aux deux autres.

Pour m_1, m'_1 on prend, entre γ_1, δ_1 et à partir de γ_1, une longueur égale à l'arc C_1M_1, que l'on rectifie en remplaçant toujours l'arc par une ligne brisée inscrite. On trouve ainsi le point μ_1.

Passons à la recherche des ordonnées; elles sont en vraie grandeur sur la proje
en m'_1m', $m'_1n'_1$. La mise en place des points cherchés se fera donc en prenant les r
perpendiculaire menée, à P', par μ_1, avec deux parallèles à cette même droi
points m', n'_1. On trouve ainsi : 1° un point quelconque μ ansformée de
2° un point aussi quelconque ν_1 de la transformée de la s ue.

646. Tangente en un point de la transformée de la r obteni
il suffit de tracer une droite inclinée sur $\mu\mu_1$ d'un angle égal ndeur
dans le plan tangent dont la trace horizontale est R, se projett ment
de même nom est la projection horizontale d'un triangle que l' d'o
dessiner en véritable grandeur et dans une position convenabl
rectangle en m_1, m'_1, l'un des côtés de l'angle droit se trouve
sa véritable grandeur, en $\mu\psi_1$, et la véritable grandeur de l'
à son rabattement M_1t.

En portant sur P', dans un sens facile à déterminer, la lon
enfin la droite $\mu\tau$, on a la tangente cherchée.

647. Tangente en un point de la transformée de la sec
$\nu_1\mu_1$ un angle égal à celui de la tangente en n_1, n'_1 avec les génér
construire, le point de rencontre de la tangente en n_1, n'_1 à la s
section droite en m_1, m'_1; ce point a pour projection horizontale
section droite, au point E_1.

L'angle en_1m_1 est la projection horizontale de celui que nous ch
pement; nous le ferons en construisant la véritable grandeur du tria
l'angle droit sont la vraie grandeur du segment de génératrice projeté
celle du segment de la tangente à la section droite dont la projection hori

Le premier de ces côtés se trouve déjà mis en place sur le développemen
sa véritable grandeur égale à la droite M_1E_1; d'où l'on déduit, que la tange
en reportant, dans un sens que l'on détermine encore par l'examen de la fi
sur P_1, en $\mu_1\varepsilon_1$, et en tirant enfin la droite qui va de ε_1 à ν_1.

648. Points les plus éloignés et les plus voisins de la section droite
en lesquels l'ordonnée est maximum ou minimum; leurs tangentes, su
parallèles à $\alpha'_1\alpha''_1$. En ce qui concerne la base *abcd*, on les obtient très si
aux points *a*, *c* les tangentes à la base sont perpendiculaires aux génératrice
mis en place sur les développement, déterminent ceux α, α'', γ que nous v

Pour la section située dans le plan QqQ', on les trouverait facilemen
rencontre des plans (PpP'), (QqQ'), qui est la droite du plan QqQ' dirigée,
nous cherchons, perpendiculairement aux génératrices du cylindre; 2° le
tangentes à la ligne de rencontre du cylindre et du plan QqQ', menées
dont on vient d'indiquer le tracé (609); enfin, 3° les points qui corresp
pement à ces contacts.

649. Points d'inflexion des transformées et tangentes en ces points
correspondants ceux en lesquels le plan tangent au cylindre est perpendicu
considérée (§ 619). Pour la base, on les trouvera donc en plaçant s
points *b*, *d*, qui viennent en β, δ. Au point *d*, *d'*, la véritable grandeur

avec la génératrice est égale à $\widehat{b'_1d'm'}$; il s'ensuit que la parallèle à xy, menée par δ, est une des tangentes d'inflexion.

L'autre s'obtient, comme on peut le voir sur l'épure, par symétrie.

Pour la section, on construira les points de cette courbe en lesquels le plan tangent au cylindre est normal au plan QqQ', dont on prendra les transformées.

Nous allons simplement énumérer les tracés :

1° Par u, u' menons une perpendiculaire au plan QqQ' et construisons sa trace horizontale θ;

2° Figurons la trace horizontale $a\theta$ d'un plan perpendiculaire à QqQ' et parallèle aux génératrices du cylindre;

3° Menons, dans la direction $a\theta$, des tangentes U_1, U_2 à la base; elles seront les traces horizontales des plans tangents au cylindre perpendiculaire à QqQ'.

4° Construisons les projections verticales f'_1, f'_2 des points de la section appartenant aux génératrices de contact de ces plans tangents;

5° En opérant comme pour ν_1, mettons en place sur le développement, en φ_1, φ_2, les points de la section qui se projettent verticalement en f'_1, f'_2.

Les points φ_1, φ_2 sont les points d'inflexion cherchés; les tangentes en ces points se construiraient comme $\nu_1\varepsilon_1$.

650. Transformées des points placés sur les contours apparents. — Ces points, projetés erticalement en s'_1, r'_1, l'_1, l'_2, ont été, comme les autres points de la courbe, placés sur le veloppement en σ_1, ρ_1, λ_1, λ_2, λ''_2, ces deux derniers sont les extrémités de la partie utile de ourbe.

tangentes à la transformée aux points σ', ρ' sont, on le voit aisément, la première parallèle utre parallèle à une droite symétrique de Q' par rapport à la direction des projections ver- génératrices du cylindre.

ts parasites. — Pour continuer les courbes au delà de leurs extrémités utiles, on suite de λ''_2, par exemple, l'arc utile qui précède λ_2; de même pour les autres

DÉVELOPPEMENT DU CONE

— *Un cône droit de révolution étant donné, on demande de construire :* 1° *les pro- ndeur de l'une de ses sections elliptiques;* 2° *le développement de la surface ;* 3° *la n.*

du cône droit de révolution. — Soient donnés (*fig.* 370, pl. XLII) : les pro- du cône, sa trace horizontale $a\,b\,c\,d$ et le plan sécant $P\alpha P'$, que l'on peut autour de l'axe de la surface, rendre perpendiculaire au plan vertical.

n. — A l'inspection de la figure on voit que le plan sécant ne rencontre upe, par suite, suivant une ellipse.

int quelconque de la section. — On prend les projections $s'e'$, se cône; puis on cherche sa rencontre e'_1, e_1, avec le plan donné. ples de génératrices ayant une projection verticale commune, on de la courbe. C'est ainsi que l'on a déterminé, à l'aide du tracé point k_1, e'_1 en même temps que e_1, e'_1.

Passons à la recherche des ordonnées; elles sont en vraie grandeur sur la projection verticale en m'_1m', $m'_1n'_1$. La mise en place des points cherchés se fera donc en prenant les rencontres d'une perpendiculaire menée, à P', par μ_1, avec deux parallèles à cette même droite P' issues des points m', n'_1. On trouve ainsi : 1° un point quelconque μ de la transformée de la base *abcd*, et 2° un point aussi quelconque ν_1 de la transformée de la section oblique.

646. Tangente en un point de la transformée de la base. — Pour obtenir la tangente en μ, il suffit de tracer une droite inclinée sur $\mu\mu_1$ d'un angle égal à la vraie grandeur de celui qui, situé dans le plan tangent dont la trace horizontale est R, se projette horizontalement en m_1mt; le triangle de même nom est la projection horizontale d'un triangle que l'on peut, afin d'obtenir l'angle cherché, dessiner en véritable grandeur et dans une position convenable, sur le développement. Ce triangle est rectangle en m_1, m'_1, l'un des côtés de l'angle droit se trouve déjà placé sur le développement dans sa véritable grandeur, en $\mu\mu_1$, et la véritable grandeur de l'autre côté de l'angle droit est égale à son rabattement M_1t.

En portant sur P', dans un sens facile à déterminer, la longueur en $\mu_1\tau$ égale à t_1M, et en tirant enfin la droite $\mu\tau$, on a la tangente cherchée.

647. Tangente en un point de la transformée de la section. — La tangente en ν_1 fait avec $\nu_1\mu_1$ un angle égal à celui de la tangente en n_1, n'_1 avec les génératrices du cylindre. Prenons, pour le construire, le point de rencontre de la tangente en n_1, n'_1 à la section oblique, avec la tangente à la section droite en m_1, m'_1; ce point a pour projection horizontale e; il se rabat, avec la tangente à la section droite, au point E_1.

L'angle en_1m_1 est la projection horizontale de celui que nous cherchons à placer sur le développement; nous le ferons en construisant la véritable grandeur du triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont la vraie grandeur du segment de génératrice projeté horizontalement en m_1n_1 et celle du segment de la tangente à la section droite dont la projection horizontale se fait sur m_1e.

Le premier de ces côtés se trouve déjà mis en place sur le développement en $\mu_1\nu_1$; l'autre est dans sa véritable grandeur égale à la droite M_1E_1; d'où l'on déduit, que la tangente est la droite obtenue en reportant, dans un sens que l'on détermine encore par l'examen de la figure, la longueur M_1E_1, sur P_1, en $\mu_1\epsilon_1$, et en tirant enfin la droite qui va de ϵ_1 à ν_1.

648. Points les plus éloignés et les plus voisins de la section droite. — Ce sont les points en lesquels l'ordonnée est maximum ou minimum; leurs tangentes, sur le développement, sont parallèles à $\alpha'_1\alpha''_1$. En ce qui concerne la base *abcd*, on les obtient très simplement; effectivement aux points a, c les tangentes à la base sont perpendiculaires aux génératrices; par suite, ces points, mis en place sur les développement, déterminent ceux α, α'', γ que nous voulions construire.

Pour la section située dans le plan QqQ', on les trouverait facilement en déterminant : 1° la rencontre des plans (PpP'), (QqQ'), qui est la droite du plan QqQ' dirigée, comme les tangentes que nous cherchons, perpendiculairement aux génératrices du cylindre; 2° les points de contact des tangentes à la ligne de rencontre du cylindre et du plan QqQ', menées parallèlement à la droite dont on vient d'indiquer le tracé (**609**); enfin, 3° les points qui correspondent, sur le développement à ces contacts.

649. Points d'inflexion des transformées et tangentes en ces points. — Ils ont pour points correspondants ceux en lesquels le plan tangent au cylindre est perpendiculaire au plan de la courbe considérée (§ **619**). Pour la base, on les trouvera donc en plaçant sur le développement les points b, d, qui viennent en β, δ. Au point d, d', la véritable grandeur de la tangente à la base

avec la génératrice est égale à $\widehat{b'_1 d' m'}$; il s'ensuit que la parallèle à xy, menée par δ, est une des tangentes d'inflexion.

L'autre s'obtient, comme on peut le voir sur l'épure, par symétrie.

Pour la section, on construira les points de cette courbe en lesquels le plan tangent au cylindre est normal au plan QqQ', dont on prendra les transformées.

Nous allons simplement énumérer les tracés :

1° Par u, u' menons une perpendiculaire au plan QqQ' et construisons sa trace horizontale θ;

2° Figurons la trace horizontale $a\theta$ d'un plan perpendiculaire à QqQ' et parallèle aux génératrices du cylindre;

3° Menons, dans la direction $a\theta$, des tangentes U_1, U_2 à la base; elles seront les traces horizontales des plans tangents au cylindre perpendiculaire à QqQ'.

4° Construisons les projections verticales f'_1, f'_2 des points de la section appartenant aux génératrices de contact de ces plans tangents;

5° En opérant comme pour ν_1, mettons en place sur le développement, en φ_1, φ_2, les points de la section qui se projettent verticalement en f'_1, f'_2.

Les points φ_1, φ_2 sont les points d'inflexion cherchés; les tangentes en ces points se construiraient comme $\nu_1\varepsilon_1$.

650. Transformées des points placés sur les contours apparents. — Ces points, projetés verticalement en s'_1, r'_1, l'_1, l'_2, ont été, comme les autres points de la courbe, placés sur le développement en σ_1, ρ_1, λ_1, λ_2, λ''_2, ces deux derniers sont les extrémités de la partie utile de la courbe.

Les tangentes à la transformée aux points σ', ρ' sont, on le voit aisément, la première parallèle à Q', l'autre parallèle à une droite symétrique de Q' par rapport à la direction des projections verticales des génératrices du cylindre.

651. Points parasites. — Pour continuer les courbes au delà de leurs extrémités utiles, on placera à la suite de λ''_2, par exemple, l'arc utile qui précède λ_2; de même pour les autres points extrêmes.

DÉVELOPPEMENT DU CONE

652. Problème. — *Un cône droit de révolution étant donné, on demande de construire : 1° les projections et la vraie grandeur de l'une de ses sections elliptiques; 2° le développement de la surface ; 3° la transformée de la section.*

1° *Section elliptique du cône droit de révolution.* — Soient donnés (*fig.* 370, pl. XLII) : les projections s, s' du sommet du cône, sa trace horizontale $a\,b\,c\,d$ et le plan sécant $P\alpha P'$, que l'on peut toujours, par une rotation autour de l'axe de la surface, rendre perpendiculaire au plan vertical.

653. Genre de la section. — A l'inspection de la figure on voit que le plan sécant ne rencontre qu'une nappe du cône et le coupe, par suite, suivant une ellipse.

654. Construction d'un point quelconque de la section. — On prend les projections $s'e'$, se d'une génératrice quelconque du cône; puis on cherche sa rencontre e'_1, e_1, avec le plan donné. En ayant soin d'employer des couples de génératrices ayant une projection verticale commune, on trouve, en même temps, deux points de la courbe. C'est ainsi que l'on a déterminé, à l'aide du tracé que la figure indique suffisamment, le point k_1, e'_1 en même temps que e_1, e'_1.

655. Projection horizontale de la tangente en un point de la section. — Adoptons le point e_1, e'_1; la trace horizontale du plan tangent conduit par ce point est la tangente Q à la base du cône, menée par e, elle rencontre P au point t' qui est la trace horizontale de la tangente; la droite qui unit les points t, e_1 est la projection horizontale de la tangente demandée.

656. Points situés dans le plan de profil conduit par l'axe. — La construction générale est en défaut en ce qui concerne les projections horizontales de ces points.

On les construit facilement en adoptant un plan horizontal auxiliaire conduit par la projection verticale g' de ces points. Ce plan coupe le cône suivant un parallèle dont h', h est un point de passage et dont la projection horizontale a son centre en s; on trace la projection horizontale de ce cercle et on prend ses rencontres g_1, g_2 avec la trace de même nom du plan de profil considéré. Les points (g', g_1), (g', g_2) sont ceux qu'il fallait construire.

657. Sommets de la projection horizontale et projections horizontales des sommets. — Ceux de l'axe focal se projettent, à cause de la symétrie de la figure, en (a_1, a'_1), (c_1, c'_1).

Quant aux deux autres sommets, ils se projettent sur le plan vertical, comme le centre de la surface, au milieu o' de $a'_1c'_1$; pour trouver leurs projections horizontales on construit les deux génératrices dont la projection verticale passe par o' et on opère sur elle comme au paragraphe **654**. On trouve ainsi les sommets (s_1, o'), (s_2, o').

658. Foyers et directrices de la projection horizontale. — L'un des foyers de la projection horizontale est la projection s du sommet du cône (§ **491**); la directrice correspondante r_1r_2 se trace en projetant horizontalement l'horizontale du plan PpP′ de même cote que le sommet s, s'.

L'autre foyer et l'autre directrice s'obtiendraient facilement à l'aide de la symétrie que présente la figure.

659. Foyers et directrices de la section. — Le théorème de DAUDELIN permet de les déterminer; il suffit de construire une sphère tangente au plan et inscrite au cône pour trouver immédiatement, en son point de contact avec le plan, le foyer f, f'. Le plan de la courbe de contact de la sphère et du cône est horizontal, il a pour trace verticale $i'j'$ et rencontre PpP′ suivant la directrice u', u_1u_2 qui correspond au foyer f, f'. La seconde sphère inscrite au cône et tangente au plan donnerait facilement l'autre foyer et l'autre directrice.

660. Vraie grandeur de la section. — En rabattant le plan PpP′ sur le plan vertical, on a successivement construit les éléments de la vraie grandeur de l'ellipse de section qui suivent:

1° L'un quelconque des points de cette ellipse, en E_1; le rabattement T de la trace horizontale de la tangente correspondante, d'où l'on a déduit celui TE_1 de la tangente au point E_1;

2° Les rabattements A_1, S_1, C_1, S_2 des quatre sommets de l'ellipse cherchée; celui de l'un de ses foyers F_1 et, enfin, celui de la directrice correspondante U_1U_2.

Le second foyer F_2 a été construit en prenant le symétrique de F_1 par rapport au centre O du rabattement.

Avec ces éléments rien n'est plus simple que de tracer l'ellipse.

661. Développement du cône. — Nous ouvrirons le cône suivant la génératrice $sa, s'a'$, et nous construirons le développement de la portion de sa surface comprise entre le sommet et le plan horizontal. Ce développement et un secteur $\alpha\sigma\alpha''$ (*fig.* 371, pl. XLII) dont le rayon est égal à la vraie grandeur $s'a'$ de l'arête du cône et dont nous allons calculer l'angle au centre $\alpha\sigma\alpha''$.

Soit θ la mesure de cet angle, en prenant le degré pour unité.

On peut aussi mesurer ce même angle par l'arc $\alpha\gamma\alpha''$ dont la longueur, en appelant R le rayon du cercle de base du cône, est égale à $2\pi R$.

Cela posé, en désignant par l la longueur de l'arête latérale du cône, nous aurons

$$\frac{\theta}{2\pi R} = \frac{360^\circ}{2\pi l};$$

d'où l'on tire

$$\theta = 360\,\frac{R}{l}.$$

Formule qui permet de calculer l'angle au centre du secteur.

On peut également limiter la base du secteur en inscrivant une ligne brisée dans le cercle de base du cône, dont les côtés seront ensuite portés, comme corde, successivement et bout à bout, sur l'arc de base du secteur.

662. Construction d'un point quelconque de la transformée et de sa tangente. — Pour obtenir un quelconque des points de la transformée on prend l'arc $\alpha\varepsilon$ égal à l'arc ae, et on tire la droite $\sigma\varepsilon$, sur laquelle il faut encore porter, à partir de σ, une longueur égale à se_1, $s'e'_1$, en véritable grandeur. Cette longueur s'obtient en amenant la génératrice qui passe par le point considéré, à l'aide d'une rotation autour de l'axe du cône, sur l'une $s'a'$, sa des génératrices de front de cette surface : le point s, s', ne bouge pas; e'_1 se déplace sur une parallèle à xy, et s'arrête en e'_2 sur $s'a'$.

La vraie grandeur cherchée est $s'e'_2$; on la portera ensuite en $\sigma\varepsilon_1$, et on aura le point ε_1 que l'on voulait construire.

Pour déterminer la tangente en ce point, on mène par le point ε, à la base du secteur, une tangente, sur laquelle on prend, dans un sens que l'examen de la figure indique, la longueur $\varepsilon\tau$ égale à et; après quoi il n'y aura plus qu'à unir les points τ, ε_1 pour avoir la tangente demandée.

663. Points le plus éloigné ou le plus voisin du sommet du cône. — Aux sommets du grand axe (a_1, a'_1), (c_1, c'_1), les tangentes à l'ellipse sont perpendiculaires à la génératrice du cône; il en résulte que la distance de ces points au sommet du cône est maximum ou minimum; cette double propriété se conservera sur le développement; elle aura donc également lieu pour les points $\alpha_1, \gamma_1, \alpha''_2$, qui correspondent aux premiers et que l'on a obtenus par le tracé général.

664. Points d'inflexion de la transformée. — Il faut d'abord chercher les points de la section en lesquels le plan tangent au cône est normal à PpP' (§ **619**).

Dans le cas d'un cône quelconque, on mènerait par le sommet du cône une perpendiculaire au plan sécant et par cette perpendiculaire des plans tangents au cône; les points de croisement des génératrices de contact et du plan de la section seraient ceux qui, transportés sur le développement, donneraient les points d'inflexion de la transformée de la section.

Dans le cas qui nous occupe, la surface est à la fois développable et de révolution, on peut, conséquemment, substituer avec avantage aux plans tangents leurs normales qui passent par les points demandés. Nous chercherons alors les pieds, sur la surface, des normales à celle-ci placées dans le plan PpP'.

L'axe du cône perce le plan PpP' au point g', s qui n'est rien autre chose que le point de rencontre des normales inconnues avec cet axe. Abaissons de g' une perpendiculaire à $s'a'$, et, par son pied m', menons une perpendiculaire à l'axe, que nous prolongerons jusqu'à son point de rencontre n' avec $s'c'$;

le parallèle dont $m'n'$ est la projection verticale peut servir de base au cône des normales qui contient celles que nous cherchons. On en déduit que la projection verticale des normales cherchées est $g'l'$, les pieds de ces lignes sur PpP' ont pour projection verticale commune l'. Tout se réduit actuellement à construire, par la méthode générale donnée pour un point quelconque, les projections horizontales l_1, l_2 des points de la section qui ont l' pour projection verticale, et à mettre en place ces points (l_1, l'), (l_2, l') sur le développement, en λ_1, λ_2; ces derniers seront les points d'inflexion de la transformée.

Discussion. — Désignons par γ le demi-angle au sommet du cône donné et par δ l'inclinaison du plan PpP' sur l'horizon; l'angle des génératrices du cône des normales avec le plan horizontal sera, évidemment, égal à γ. Trois cas sont à examiner, savoir :

1° Le plan PpP' coupe le cône des normales; il y a alors deux points d'inflexion et l'on à $\gamma < \delta$;

2° Le plan PpP' est tangent au cône des normales; nous sommes alors dans le cas exceptionnel indiqué au paragraphe **619**; il n'y a pas de point d'inflexion, ou plutôt, il y en a deux confondus en un seul sur la figure. L'arc $\lambda_1\lambda_2$ (*fig.* 371, pl. XLII) deviendra nul et la courbe ne présentera aucune inflexion apparente. Dans ce cas

$$\gamma = \delta;$$

3° Le plan PpP' est extérieur au cône des normales; il n'y a pas alors de point d'inflexion, et l'on a

$$\gamma > \delta.$$

665. Problème. — *Étant donné un cône droit de révolution, on demande;*

1° *De construire les projections et la vraie grandeur de l'une de ses sections hyperboliques.*

2° *De faire le développement de la surface et d'y tracer la transformée de la section.*

Les projections du sommet du cône sont en s, s' (*fig.* 372, pl. XLIII), sa trace horizontale est le cercle de centre s et de rayon sa; enfin, le plan sécant, que l'on peut toujours rendre perpendiculaire au plan vertical, se trouve déterminé par ses traces PpP' : on a choisi, afin que la section soit une hyperbole, un plan rencontrant les deux nappes du cône.

Construction d'un point quelconque de la section. — On ne doit pas, comme dans le cas de l'ellipse, construire les points par la rencontre des génératrices du cône et du plan PpP', attendu que cette rencontre se fait ici sous un angle très aigu, et conduirait à une épure fort peu exacte.

Nous adopterons des plans auxiliaires horizontaux, deux à deux équidistants du sommet; l'un des couples R', R'_1 de ces plans coupera la droite $s'c'$, sc en (d', d) (d'_1, d_1), et le cône suivant deux circonférences égales, dont les projections verticales seront respectivement des parties de R', R'_1, dont les projections horizontales se feront sur une même circonférence de cercle ayant pour centre s, et pour l'un de ses points de passage d. On tracera cette circonférence et les projections horizontales e_1e_2, f_1f_2 des rencontres des plans auxiliaires avec PpP'; puis on prendra les points g_1, g_2, k_1, k_2 communs à ces lignes, qui seront quatre points de la projection horizontale de l'hyperbole.

La tangente se construirait comme dans le cas de l'ellipse.

666. Sommets. — Foyers. — Directrices. — Les constructions de ces éléments de l'hyperbole sont les mêmes que celles que nous avons longuement expliquées pour l'ellipse.

667. Asymptotes de la section. — Il faut recourir au tracé général (§ **586**). Tout d'abord on mène par s, s' un plan QqQ' parallèle à PpP'; puis on détermine les rencontres $(s'q, sm)$, $(s'q, sm_1)$ du cône et du plan QqQ', ces droites sont les génératrices du cône contenant les points à l'infini de la section, en d'autres termes, ce sont les directions asymptotiques de la section.

Après quoi, on devra chercher les tangentes à la section menées par les points à l'infini des directions asymptotiques. Un point de passage de chacune de ces tangentes s'obtiendra en menant les tangentes à la base du cône aux point m, m_1 et en prenant leurs rencontres n, n_1 avec Pp.

Les asymptotes ont pour projections horizontales des parallèles à ms, m_1s menées, respectivement, par les points n, n_1; elles doivent, si l'épure est exactement faite, se couper au centre de la projection horizontale de la courbe, c'est-à-dire au milieu ω de la distance a_1c_1 des sommets réels de la projection horizontale de l'intersection.

668. Vraie grandeur de la section. — Comme pour l'ellipse, on a rabattu le plan PpP' sur le plan vertical, seulement, pour plus de clarté dans l'épure, on a dû transporter préalablement le plan $P\rho P'$ parallèlement à lui-même en $P_1p_1P'_1$.

Indiquons la construction pour un point quelconque e', g_1 : par g_1 on mène une parallèle à la ligne de terre, qui rencontre P_1 au point g''_1; de p_1 comme centre on décrit un arc de cercle passant par g_1'', dont on prend la rencontre G''_1 avec le rabattement de P_1 : ce rabattement n'est autre que la perpendiculaire P_2 menée à P'_1, par p_1; on prend la rencontre E_1 des droites P'_1 R'_1 et on tire enfin par les points G''_1, E_1 deux droites respectivement parallèles et perpendiculaires à P'_1. Le point cherché est au croisement E'' de ces droites.

On a opéré de même pour les autres points.

669. Développement du cône; transformée de la section hyperbolique. — On a déjà expliqué la construction du développement du cône et celle des divers points de la transformée d'une courbe tracée sur sa surface.

Nous ferons observer seulement que le cône étant supposé ouvert suivant la génératrice sc, $s'c'$, la branche supérieure de l'hyperbole se trouve divisée sur le développement, que, par suite, le sommet c'_1, c_1 se dédouble en γ_1, γ_2 et qu'en ces points les tangentes sont respectivement perpendiculaires aux deux positions de la génératrice dédoublée.

670. Point d'inflexion. — C'est la construction déjà donnée pour l'ellipse que l'on a de nouveau appliquée; sans reprendre les explications, donnons la succession des tracés : $P\alpha P'$ rencontre l'axe du cône donné au point s, s'_1 qui est le sommet du cône des normales; on en déduit les points (l', l_1) (l', l_2) en lesquels le plan $P\alpha P'$ est normal au cône; pour les placer sur le développement on tire les droites l_1s, l_2s, qui sont les projections horizontales des génératrices passant par les points (l', l_1), (l', l_2), les traces horizontales de ces droites sont en r_1, r_2; on prend sur la base du secteur deux arcs $\gamma\rho_1$, $\gamma''\rho_2$ de même longueur que ceux cr_1, cr_2 de la base, et on trace les droites $\rho_1\sigma$, $\rho_2\sigma$ qui passent par les points d'inflexion, enfin, sur ces lignes prolongées au delà de σ, on porte des longueurs $\sigma\lambda_1$, $\sigma\lambda_2$ égales à $s'l'_3$. Les points λ_1, λ_2 sont les points d'inflexion de la transformée.

671. Asymptotes de la transformée. — Ce sont des tangentes que l'on construit par la méthode du paragraphe **662**. Mettons en place les génératrices qui contiennent les points de contact à l'infini; ce que l'on fait en prenant les arcs $\gamma\mu_1$, $\gamma\mu$ de même longueur que ceux cm_1, cm de la base, et en tirant les droites $\sigma\mu_1$, $\sigma\mu$. Nous mènerons ensuite des tangentes à l'arc de base du secteur en μ_1, μ_2, sur lesquelles nous prendrons, dans le sens que la figure indique, $\mu_1\nu_1$, $\mu\nu$ égales à m_1n_1, mn. Les droites menées respectivement parallèles à $\mu_1\sigma$, $\mu\sigma$, par les points ν_1, ν, sont les asymptotes cherchées.

672. Problème. — Construire :

1° *Les projection et la vraie grandeur d'une section parabolique d'un cône droit de révolution;*

2° *La transformée de la parabole de section.*

Nous supposons que le plan sécant P, P′ (*fig.* 374, pl. XLIII) est perpendiculaire au plan vertical et parallèle à l'une des génératrices du contour apparent vertical. La section est alors une parabole que l'on peut immédiatement déterminer par le foyer s de sa projection horizontale, la directrice correspondante δ et le sommet a de cette même projection. Après tout ce qui a été dit pour l'ellipse et l'hyperbole, le tracé s'achève sans aucune difficulté.

673. Problème. — *Construire le développement d'un cône quelconque.*

On inscrit dans la surface une pyramide dont on prend le développement. Si l'on choisit les faces de la pyramide suffisamment petites, en faisant passer un trait continu par les sommets de la base de la pyramide développée, on aura la transformée de cette base.

La transformée d'une courbe quelconque de la surface se construirait pareillement.

SECTION PLANE DES SURFACES DE RÉVOLUTION

674. Problème. — *Construire les projections et la vraie grandeur de la section par un plan d'une surface de révolution quelconque.* — Soient z, z' l'axe (*fig.* 375, pl. XLIV), μ' la projection verticale du méridien de front et PαP′ le plan sécant.

Construction d'un point quelconque de la section. — Il y a deux feuillées de plans qui donnent sur la surface des sections de nature connue et faciles à construire; la première feuillée dont l'arête est à l'infini, est celle des plans horizontaux; l'autre, celle des plans méridiens. Nous allons indiquer les tracés relatifs à chacune d'elles.

Emploi des parallèles. — Soit pris d'abord un plan sécant auxiliaire horizontal Q′; sa rencontre avec le plan donné est l'horizontale $v'h'$, vh et celle avec la surface de révolution le parallèle $n'n'_1$, nn_1

Les points de croisement (m_1, m'_1) (m_2, m'_2) de ces intersections appartiennent à la rencontre du plan et de l'ellipsoïde.

Emploi des méridiens. — Reprenons sur la figure 376 (pl. XLIV) les données du problème et soit Q la trace horizontale du plan auxiliaire choisi.

L'axe de la surface perce le plan donné au point ω', z, dont la construction est indiquée sur l'épure, et par lequel passent toutes les intersections du plan PαP′ avec les divers plans auxiliaires qui seront employés.

Ce point construit, les rencontres du plan donné avec les plans méridiens auxiliaires se déterminent très aisément; effectivement, pour celui dont la trace horizontale est Q, par exemple, on trouve un second point de passage de l'intersection en prenant simplement le croisement h des droites P, Q.

Le problème est actuellement réduit à celui de la recherche des points de rencontre du méridien dont Q est la trace horizontale, et de la droite qui vient d'être déterminée; on les trouve en amenant le méridien et la droite dans le plan de front conduit par l'axe de la surface, à l'aide d'une rotation autour de cet axe; la trace h prend la position h_1, h_1'; comme le point ω', z ne bouge pas, en tirant la droite $h'_1\omega'$ et en prenant ses rencontres m'_1, n'_1 avec μ' on a les projections verticales de deux points qui, remis en place en (m, m'), (n, n'), sont précisément ceux que nous cherchions.

675. Construction de la tangente en un point de la commune intersection. — On peut employer deux méthodes : 1° la méthode du plan tangent; 2° la méthode des normales.

1° Méthode du plan tangent. — Proposons-nous de construire la tangente au point m_2, m'_2 (*fig.* 375, pl. XLIV). Menons antérieurement le plan tangent en ce point, lequel se peut obtenir en amenant, par une rotation autour de z, z', le point donné en n_1, n'_1, sur le méridien principal. Dans cette position du point de contact le plan cherché a pour trace verticale la tangente R'_1 à μ', menée par n'_1, et pour trace horizontale la perpendiculaire R_1 à la ligne de terre.

En ramenant le plan R_1, R'_1 sur sa position initiale, la distance zr_1 ne change pas et R_1 se place en R.

Cette droite R est la trace horizontale du plan tangent, son croisement θ, θ' avec αP est la trace de même nom de la tangente cherchée; laquelle est alors déterminée par deux de ses points. En les unissant par une droite (θm_2), $(\theta' m'_2)$ on trouve les deux projections de la tangente demandée.

2° Méthode des normales. — La normale en un point d'une surface de révolution se peut obtenir très aisément et sans recourir au plan tangent; il suffit, on l'a démontré (§ 389), de mener la normale au méridien par le point considéré.

Il suit de là que la méthode de Binet (§ 573) doit être employée lorsqu'on veut la tangente en un point de la ligne commune à deux surfaces de révolution; or, le présent problème n'est qu'un cas particulier de celui-ci, car tout plan peut être considéré comme une surface de révolution : l'axe de cette surface est une perpendiculaire quelconque au plan, et la ligne méridienne n'est rien autre chose qu'une droite quelconque menée par le pied de l'axe dans le plan considéré.

La méthode des normales est donc applicable aux sections planes des surfaces de révolution; mais elle n'offre aucun avantage sur celle du plan tangent; attendu que la construction de la rencontre du plan tangent et du plan donné est des plus simples et que celle de la perpendiculaire au plan de deux normales l'est un peu moins. C'est donc seulement comme exercice que nous allons donner le tracé qui suit :

Reprenons la figure 376 (pl. XLIV) et cherchons la tangente au point m, m' précédemment construit. Traçons la normale à μ' en m'_1 et prenons sa rencontre σ'_1 avec l'axe z, z'; le long du parallèle du point qui vient d'être adopté, le sommet du faisceau des normales se trouve en σ'_1, z, et la normale à la surface de révolution en m, m' doit passer par ce sommet.

Pour le plan PαP' la normale se projette suivant des droites ma, $m'a'$ issues des points m, m' et respectivement perpendiculaires aux traces de ce plan.

Actuellement, coupons le plan des normales par le plan de front F conduit par z, z', les sections seront : sur la normale à la surface de révolution le point σ_1', z; sur la normale au plan le point b, b'. La droite de jonction des points b', σ_1' est donc la projection verticale d'une droite de front du plan des normales; par suite la perpendiculaire $m't'$ à cette ligne, menée du point m', est la projection verticale de la tangente cherchée.

Quant à l'autre projection, on l'obtient par le secours d'une horizontale du plan des normales; prenons comme exemple, celle qui passe par m, m'; elle a pour projection verticale la parallèle m'_1m' à la ligne de terre, laquelle rencontre σ'_1b' en k', qui correspond à k; en tirant la droite km on a la projection horizontale de l'horizontale cherchée.

Pour obtenir la projection horizontale de la tangente nous n'avons plus qu'à élever du point m une perpendiculaire mt à la droite km que l'on vient de construire.

676. Points le plus haut et le plus bas (*fig.* 375, pl. XLIV). — Le plan méridien dont la trace horizontale Q se dirige perpendiculairement à αP est un plan de symétrie commun à la surface

de révolution et au plan donné $P\alpha P'$; d'autre part, ce plan est évidemment perpendiculaire au plan horizontal, il en résulte (§ **417**) que les points de la courbe d'intersection qu'il contient sont ceux que nous voulons construire. Pour le faire on emploie simplement la méthode des méridiens.

Construisons (*fig.* 375) la rencontre ω', z de l'axe et du plan $P\alpha P'$, et celle p des traces horizontales P, Q.

Cherchons ensuite les rencontres de la droite qui va de p au point ω', z avec la courbe méridienne placée dans le plan dont Q est la trace horizontale; dans ce but amenons le plan de symétrie, en entraînant la figure qu'il contient, à coïncider avec le méridien principal : le point p vient en p_1, p'_1, ω', z reste fixe; tirons la droite $\omega' p'_1$ et prenons ses rencontres s'_1, σ'_1 avec μ.

Revenant alors à la position première on trouve : le point le plus haut σ, σ' et celui s, s' qui est le plus bas.

Les projections des tangentes en ces points sont : sur le plan vertical, des parallèles à la ligne de terre; sur l'autre plan de projection, des parallèles à αP.

677. Plans limites. — Dans le cas de plans auxiliaires horizontaux, les plans limites sont ceux qui passent par les points le plus haut et le plus bas que l'on vient de déterminer.

Lorsque les plans auxiliaires sont ceux des méridiens, les plans limites doivent rencontrer $P\alpha P'$ (*fig.* 376, pl. XLIV) suivant des droites respectivement tangentes aux courbes méridiennes; droites qui sont en outre évidement tangentes à la courbe étudiée. D'autre part toutes les droites d'intersection des plans méridiens auxiliaires et du plan P passent par le point ω', z (§ **674**); nous aurons donc les tangentes contenues dans les plans limites par la rencontre du plan $P\alpha P'$ et du cône circonscrit à la surface de révolution dont le sommet est en ω', z.

Afin de déterminer ce cône, menons du point ω', z une ($\omega' u', zu$) tangente au méridien principal et prenons sa trace horizontale θ, θ'; la trace de même nom du cône est un cercle de centre z et dont θ est un point de passage. Ayant tracé ce cercle, on a trouvé, par ses rencontres t_1, t_2 avec αP, deux points des tangentes cherchées, ou encore deux points des méridiens limites; les traces horizontales de ces méridiens sont donc les droites zt_1, zt_2.

Pour trouver les projections des points limites, on peut simplement tracer les projections ($t_1 z$, $t'_1\omega'$), ($t_2 z$, $t'_2\omega'$) des tangentes en ces points, ainsi que celles uv, $u'v'$ du parallèle de contact de la surface de révolution et du cône circonscrit auxiliaire; puis, chercher les points de rencontre (λ_1, λ'_1), (λ_2, λ'_2), de ces deux lignes. L'épure sera soumise à cette vérification que les deux projections de noms différents des points ainsi déterminés devront se trouver respectivement placées sur des lignes de rappel.

678. Points doubles. — Nous supposons, comme au paragraphe **400**, la surface déterminée par son axe et par sa génératrice. Dans ces conditions le parallèle qui passe par les points doubles des courbes méridiennes coupe le plan sécant en des points doubles de la section.

Effectivement, à un point double d'une courbe méridienne répondent deux plans tangents à la surface; si on imprime à ses plans une rotation autour de l'axe de la surface, afin d'amener leur point commun de contact sur l'un des points de section du parallèle et du plan sécant, ils détermineront, par leurs rencontres avec ce plan sécant, deux tangentes à la section. De là résulte d'abord, que les points considérés sont bien doubles, ensuite, le moyen de les construire avec leurs tangentes.

Sans que la courbe méridienne d'une surface de révolution ait des points doubles, sa courbe d'intersection par un plan peut en offrir; cette propriété sera mise en évidence par le théorème qui suit :

679. Théorème. — *Lorsqu'une surface de révolution est tout à la fois touchée et coupée par un plan, le point de contact est un point double de la section.* — Soient : z, z' les projections de l'axe supposé vertical (fig. o_2); μ', μ'_1 la projection verticale du méridien de front; m, m' le point de contact, amené, par une rotation autour de z, z', sur ce méridien de front.

La tangente P', en m', à μ', est la trace verticale du plan tangent au point choisi; nous l'adopterons pour axe des abscisses et nous prendrons pour axe des ordonnées la parallèle à la ligne de terre menée par m'.

Tout d'abord, construisons, par l'emploi d'un plan horizontal auxiliaire ayant Q' pour trace verticale et voisin de m, m', deux points (u_1, u'), (u_2, u') de la section.

En faisant voir que la projection horizontale de la courbe d'intersection a deux tangentes en m,

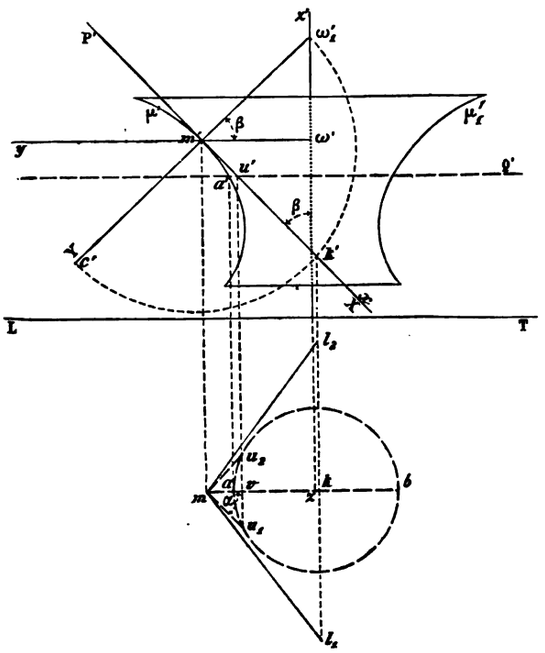


FIG. o_2.

nous aurons par là même démontré que la courbe dans *l'espace* présente elle-même au point correspondant M deux tangentes, et que, par suite, ce point est double.

Pour ce but, tirons les droites mu_1, mu_2; désignons par v la rencontre des droites u_1u_2, mz et par α l'angle u_1mz.

Lorsque le plan horizontal dont Q' est la trace verticale se déplace en se rapprochant du point m, m', les points u_1, u_2 se déplacent également et se rapprochent de m, il s'ensuit que, à la limite, les droites $m\,u_1$, $m\,u_2$ seront tangentes en m à la projection horizontale de la courbe étudiée.

Pour déterminer les positions de ces tangentes, cherchons donc la limite de tang α.

On voit, immédiatement, que l'on a

$$\text{tang}\,\alpha = \pm \frac{u_1\,v}{m\,v}.$$

Désignons : par R_1, R les rayons des parallèles placés, respectivement, dans le plan horizontal auxiliaire et dans celui qui contient le point m, m'; par a', x, y le point de rencontre de μ' avec Q' et ses coordonnées; par a, b les points de croisement du plan de front conduit par x, x' avec la projection horizontale du parallèle de rayon R_1, et enfin par β l'angle que fait P' avec une verticale quelconque.

Cela posé, on aura :

$$u_1 v = \sqrt{av \cdot vb} = \sqrt{y(2R_1 - y)},$$

$$m v = m'u' \sin\beta = x \sin\beta.$$

La substitution des valeurs de $u_1 v$ et de mv dans la première formule donne ensuite

$$\operatorname{tang}\alpha = \pm \frac{\sqrt{y(2R_1 - y)}}{x \sin\beta},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{2R_1 \frac{y}{x^2} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Lorsqu'on passe à la limite R_1 tend vers R et le rapport $\frac{y}{x}$, qui n'est autre chose que le coefficient angulaire de la tangente menée par l'origine à la courbe μ', devient nul; on trouve donc

$$\operatorname{Lim} \operatorname{tang}\alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{2R \lim \frac{y}{x^2}}.$$

Tout se réduit actuellement à la recherche de la limite du rapport $\frac{y}{x^2}$.

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe μ'; en développant son second membre par la formule de Maclaurin, on trouve

$$(1) \qquad y = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(\theta x),$$

dans laquelle θ est une fraction proprement dite, inconnue.

Dans la présente question $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, puisque la courbe μ touche à l'origine l'axe des abscisses; l'équation (1) se peut donc écrire

$$\frac{y}{x^2} = \frac{1}{1.2} f''(0) + \frac{x}{1.2.3} f'''(0) + \ldots + \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots n} f^n(0) + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{n+1}(\theta x);$$

en faisant tendre x vers zéro, on trouve, en général,

$$(2) \qquad \operatorname{Lim} \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2} f''(0).$$

La relation cherchée est donc

$$(3) \qquad \operatorname{Lim} \operatorname{tang}\alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{R f''(0)}.$$

En général $f''(0)$ n'est pas nul, donc, à cause du double signe compris dans la formule (3), m, m' est un point double de la section.

Les tangentes au point double, nous allons le faire voir dans un instant, se déterminent facilement en construisant la limite de l'angle α; mais, antérieurement, cherchons une interprétation géométrique de $f''(0)$.

L'équation de la ligne μ', dans ce système $xm'y$, peut s'écrire $x = \varphi(y)$: les fonctions f et φ étant inverses.

Conservons l'axe des abscisses et remplaçons celui des ordonnées par une perpendiculaire Y à $m'x$, menée par m' ; les formules de transformation donnent, en appelant X, Y les coordonnées nouvelles d'un point quelconque de la courbe μ',

$$x = X + Y \operatorname{tang} \beta,$$

$$y = \frac{Y}{\cos \beta};$$

donc, dans le nouveau système d'axe, l'équation de μ' est

$$X = - Y \operatorname{tang} \beta + \varphi\left(\frac{Y}{\cos \beta}\right).$$

D'autre part, il est manifeste que le rayon du cercle osculateur ou de courbure de la courbe μ' en m', que nous désignerons par ρ, est égal à la limite de la sous-normale, comptée sur l'axe $m'Y$, et relative à un point de μ' qui, d'abord voisin de m', se rapprocherait de ce dernier et tendrait à se confondre avec lui (§ 138). Nous désignerons par (x_1, y_1), (X_1, Y_1) les coordonnées, prises respectivement dans chacun des systèmes d'axes, de ce point voisin; l'équation correspondante de la normale à μ sera alors

$$Y - Y_1 = - X'_1 (X - X_1),$$

et la sous-normale sera égale à

$$X'_1 X_1;$$

par suite on aura

$$\rho = \operatorname{Lim} (X'_1 X_1).$$

D'ailleurs, de l'équation de la courbe μ' dans le nouveau système d'axes, on tire

$$X'_1 = - \operatorname{tang} \beta + \varphi'(y_1) \cdot \frac{1}{\cos \beta};$$

la substitution de la valeur de X'_1 dans celle de ρ donne, puisque X_1 tend vers zéro,

$$\rho = \operatorname{Lim}\left[\frac{1}{\cos \beta} X_1 \varphi'(y_1)\right],$$

ou encore

$$\rho = \frac{1}{\cos \beta} \operatorname{Lim} \frac{X_1}{f'(x_1)},$$

ou bien

$$\rho = \frac{1}{\cos \beta} \operatorname{Lim} \frac{x_1 - y_1 \sin \beta}{f'(x_1)}.$$

Lorsqu'on donne à x_1 la valeur zéro, la dernière fraction devient indéterminée; remplaçons-la donc par le rapport des dérivées de ses deux termes, ce qui donne

$$\rho = \frac{1}{\cos\beta} \operatorname{Lim} \frac{1 - f'(x_1)\sin\beta}{f''(x_1)},$$

en passant à la limite, on trouve

$$\rho = \frac{1}{\cos\beta} \quad \frac{1}{f''(0)},$$

ou finalement

(4) $$f''(0) = \frac{1}{\rho\cos\beta}.$$

La relation (3) devient alors

$$\operatorname{Lim} \operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta} \sqrt{\frac{R}{\rho\cos\beta}}.$$

Soient : ω' la projection verticale du centre du parallèle qui passe par le point double; ω'_1 la pro-

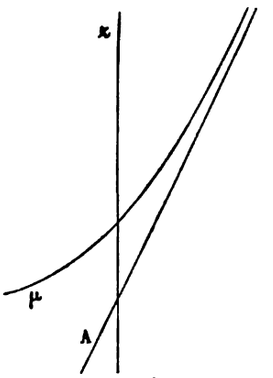


FIG. 62.

jection de même nom du sommet du faisceau des normales à la surface menées par les divers points de ce parallèle, et c' la projection verticale du centre de courbure en m, m', du méridien de front. Nous aurons :

$$m'\omega'_1 = \frac{m'\omega'}{\cos\beta} = \frac{R}{\cos\beta}, \quad m'c' = \rho,$$

et, par suite,

$$\operatorname{Lim} \operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta} \sqrt{\frac{m'\omega'_1}{m'c'}}.$$

Ce que l'on peut écrire :

$$\operatorname{Lim} \operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{m'\omega'_1}{\sin\beta\sqrt{m'c'.m'\omega'_1}}.$$

Décrivons sur ω'_1c' comme diamètre une demi-circonférence et soit k' son point de croisement avec P'; projetons ensuite k' en k, sur zm; on aura alors

$$\sin\beta\sqrt{m'c'.m'\omega'_1} = mk,$$

et finalement

$$\operatorname{Lim} \operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{m'\omega'_1}{mk}.$$

La construction se termine manifestement comme il suit : à partir de k, sur kk' et sur son prolongement, on portera des longueurs kl_1, kl_2 égales toutes deux à $m'\omega'_1$ et les droites de jonction des points l_1, l_2 au point m seront les tangentes cherchées.

680. Point double sur l'axe de rotation. — Ces points se produisent lorsque la courbe μ (fig. o_3) qui engendre, par sa rotation autour de l'axe z, la surface de révolution, rencontre cet axe et que le plan sécant P passe par ce point de rencontre M. Effectivement, dans cette hypothèse, la tangente MT en M à la courbe μ décrit, par sa rotation autour de z, un cône C dont les rencontres Mθ, Mθ_1 avec P sont tangentes en M à la courbe d'intersection; M est donc un point double de cette courbe.

La figure 377 (pl. XLVII) contient les constructions dont on vient d'indiquer le principe.

681. Branches infinies et asymptotes. — Pour que la courbe de rencontre d'une surface de révolution avec un plan ait des branches infinies, il faut et il suffit qu'il existe des parallèles de la surface à l'infini, autrement dit, que la courbe méridienne ait elle-même des branches infinies. Soient donc (fig. o_4) μ la courbe méridienne dans l'une quelconque de ses positions, A son asymptote, Z l'axe de rotation et P le plan sécant, qui n'a pas été représenté sur la figure.

Par sa rotation autour de z, la droite A décrit un cône qui porte le nom de *cône asymptote de la*

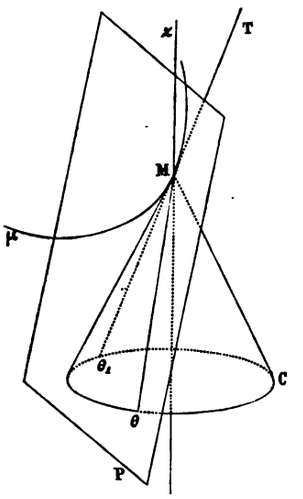


Fig. o_4.

surface. Or, à l'infini, la surface de révolution et le cône ont un parallèle commun, et, le long de ce parallèle, pour la surface de révolution comme pour le cône, le plan tangent contient celle des positions de A qui passe par le point considéré et est en outre perpendiculaire au plan méridien passant par ce point.

En somme, on voit, qu'à l'infini, les points de la surface et du cône se confondent ainsi que les plans tangents en ces points.

En ce qui concerne les points à l'infini et les asymptotes, on peut donc substituer à la surface son cône asymptote. Tout se réduit alors à appliquer les tracés déjà donnés pour le cône (§ 586).

Exécution de l'épure. — Soient z, z' l'axe de la surface (*fig.* 378, pl. XLVII), μ, μ' les projec-

tions de son méridien de front, $s'a'$, sa celles de l'asymptote à la courbe μ, μ' et $P\alpha P'$ les traces du plan sécant.

Le sommet du cône asymptote est au point de croisement s, s' des droites (z, z'), $(sa, s'a')$; la trace horizontale h, h' de cette dernière droite est un point de passage de la trace de même nom du cône asymptote et cette trace est un cercle de centre z.

Après avoir tracé ce cercle on a mené par s, s' le plan $Q\beta Q'$ parallèle à $P\alpha P'$ et on a pris ses rencontres $(sh_1, s'h'_1)$, $(sh_2, s'h'_2)$ avec le cône asymptote; ces droites sont les directions asymptotiques de la section.

Cherchons l'asymptote relative à l'une d'elles, sh_1, $s'h'_1$ par exemple; la trace horizontale du plan asymptotique correspondant est R, elle détermine, en θ, θ', la trace horizontale de l'asymptote; en menant par ce point une parallèle θd, $\theta' d'$ à sh_1, $s'h'_1$ on trouve enfin l'asymptote cherchée.

682. Points des contours apparents. — Lorsque les lignes des contours apparents sont planes, ce qui a toujours lieu pour les surfaces de révolution dont l'axe est perpendiculaire à l'un des plans de projection, on adopte simplement le plan de ces lignes comme plan auxiliaire et l'on applique le tracé ordinaire.

683. Points limites dans un sens déterminé. — Il s'agit, on l'a déjà expliqué (§ 593), de chercher les points de contact des tangentes menées dans une direction parallèle au plan de la courbe et ayant pour projections sur un plan des perpendiculaires à une direction donnée; ce qui se fera en circonscrivant à la surface, dans la direction des tangentes cherchées, un cylindre, dont on prendra les génératrices situées dans le plan donné : ces génératrices seront des tangentes à la courbe étudiée, et leurs points de contact donneront précisément les points limites cherchés; cette solution ne peut être appliquée commodément qu'aux surfaces du second degré; nous donnerons un peu plus bas la construction de l'épure dans ce cas particulier.

684. Vraie grandeur. — Elle s'obtient par un simple rabattement.

Bien que sur les figures 375, 376 (pl. XLIV) on ait pris des ellipsoïdes, les tracés indiqués jusqu'à présent supposent que la surface de révolution est quelconque; dans le problème qui va suivre nous indiquerons les constructions particulières aux surfaces de révolution du second degré.

685. Problème. — *Trouver les projections et la vraie grandeur de la courbe d'intersection d'une surface de révolution du second degré avec un plan quelconque.* — Adoptons (*fig.* 379, pl. XLV), comme exemple, un ellipsoïde de révolution ayant son axe z, z' vertical, déterminons cette surface par ses contours apparents, et coupons-la par un plan $P\alpha P'$ quelconque.

La construction des points de la courbe d'intersection et de leurs tangentes s'exécutera par l'une des méthodes générales précédemment expliquées; elle n'a pas été reproduite sur l'épure.

686. Points des contours apparents. — C'est encore la méthode générale, indiquée un peu plus haut (§ 682), qu'il faut appliquer. Pour le contour apparent vertical, en coupant par le plan de front dont Q est la trace horizontale pris pour plan auxiliaire, on trouve : d'abord avec $P\alpha P'$, la droite $\gamma_1 Q$, $\gamma'_1 f'$; puis avec la surface, l'ellipse donnée, et enfin, par les rencontres (a', a), (b', b) de ces lignes, les points du contour apparent vertical cherchés.

En opérant de même sur le plan de l'équateur, on trouve la rencontre $h'_1 h'$, $h_1 h$ de ce plan avec $P\alpha P'$, qui coupe l'équateur aux points (c, c'), (d, d') où la section rencontre le contour apparent horizontal de l'ellipsoïde.

687. Points limites dans le sens latéral. — Ces points se construisent par la méthode du paragraphe 683.

Tout d'abord on détermine la trace horizontale du cylindre circonscrite à l'ellipsoïde dans la direction de l'intersection du plan $P\alpha P'$ avec un plan de profil quelconque (§ 463). Les foyers de cette trace sont les projections obliques, faites dans la direction des génératrices du cylindre circonscrit et sur le plan horizontal de projection, des parallèles de rayon nul de l'ellipsoïde; on peut les trouver en construisant les points k', l' qui, placés sur $\alpha P'$, ont respectivement même cote que les sommets (e', z), (e'_1, z) de l'ellipse méridienne; puis en projetant horizontalement les points l', k', de P', dans la direction des génératrices du cylindre circonscrit. Ces projections s'obtiennent fort simplement; il suffit, effectivement, de prendre les rencontres φ, φ_1 de la droite αP avec les plans du profil menées par l', k'. Les distances $\psi\varphi$, $\psi_1\varphi_1$, sont égales à celle du pied z de l'axe aux foyers cherchés; on trouvera donc ces derniers en prenant simplement les longueurs zF, zF_1 égales respectivement à $\psi\varphi$, $\psi_1\varphi_1$. Le centre de la trace sera le milieu ω de FF_1 et les sommets s, s_1 du petit axe s'obtiendront, toujours d'après le paragraphe précité, en portant, sur une perpendiculaire à FF_1 menée par le point ω, et de part et d'autre de ce point, le rayon de l'équateur.

Quant aux sommets du grand axe s_2, s_3, on les obtient en reportant la distance des points s, F à partir et de part et d'autre du point ω, sur l'axe *focal*.

Pour chercher la rencontre de l'ellipse que nous venons de déterminer et de la trace αP, sans tracer cette ellipse, nous imaginerons que l'ellipse et la droite αP sont les projections orthogonales, sur le plan horizontal, d'un cercle et d'une droite : le diamètre de ce cercle serait s_2s_3 et son plan ferait avec l'horizon un angle dont le *cosinus* aurait pour valeur $\frac{\omega s}{\omega s_2}$.

Imaginons encore que l'on ait rabattu la circonférence de ce cercle, autour de s_2s_3, sur le plan horizontal, et, en décrivant de ω comme centre avec ωs_2 pour rayon une circonférence de cercle, figurons ce rabattement sur l'épure. Il faut maintenant rabattre la droite qui se projetterait en αP; β est un point de passage de ce rabattement; pour en trouver un second tirons les droites partant de s_2 pour aboutir au point s, et au point de rencontre σ de la circonférence rabattue avec la droite ωs prolongée; nous obtenons ainsi deux droites dont l'une $s_2\sigma$ peut être considérée comme le rabattement d'une droite projetée en s_2s et située dans le plan que l'on rabat.

La trace αP rencontre en i la droite ss_2; le point j du rabattement correspond au point i de la projection, c'est donc le second point de passage de la droite cherchée. Traçons cette droite βj et relevons, en n, n_1, sur αP, ses rencontres m, m_1 avec la circonférence rabattue. Les points n, n_1 sont aux tangentes cherchées; par suite, les projections de ces tangentes ne sont autre chose que les perpendiculaires à la ligne de terre menées par ces deux points.

Nous venons de construire les tangentes aux points limites des deux projections de l'intersection; il faut maintenant déterminer ces points eux-mêmes.

Nous chercherons seulement, pour éviter de trop charger l'épure de lignes, les points le plus à droite des deux projections; ceux qui se trouvent le plus à gauche s'obtiendraient pareillement.

Construisons d'abord la projection horizontale du point le plus à droite, ou, ce qui revient au même, le point de contact de la projection horizontale de l'ellipse étudiée et de la tangente perpendiculaire à la ligne de terre, menée par n_1. En vue de ce but, traçons des tangentes à la projection horizontale de l'équateur aux points d, c, ce que l'on peut faire avec beaucoup d'exactitude, puisqu'on opère sur un cercle donné; ces tangentes forment avec la tangente verticale menée par n_1, un triangle 1 2 3 circonscrit à la projection horizontale de l'ellipse cherchée.

Or, d'un autre côté, remarquons qu'un triangle circonscrit à une conique peut être considéré comme un hexagone, également circonscrit à la même conique, et dont trois angles, non consécutifs, seraient égaux à deux angles droits; ce qui permet d'appliquer au triangle le théorème de *Brianchon*, et conduit, par suite, à énoncer la propriété suivante :

Dans tout triangle circonscrit à une conique, les droites qui unissent les points de contact de chaque côté avec le sommet opposé se coupent au même point.

De là découle le tracé suivant :

On tire les droites $2c$, $3d$ et on en prend le croisement 4; on mène la droite 1 4 dont on prend la rencontre g avec 2 3; ce point g est celui que nous cherchions.

Reste à trouver la projection verticale correspondante; soient γ et g_3 les rencontres respectives de la tangente au point le plus à droite avec la ligne de terre et la droite $\alpha P'$; le segment de cette tangente compris entre sa trace verticale g_3 et son point de contact a pour projection horizontale $g\gamma$; nous allons chercher la longueur de sa projection verticale. Il suffit, évidemment, de conduire par g une parallèle xy, de prendre sa rencontre g_1 avec αP, de mener une perpendiculaire à xy par g_1, de prendre ses rencontres γ_2, g_2 avec les droites xy, αP; la distance $\gamma_2 g_2$ sera la longueur du segment cherché.

Alors, en prenant la longueur $g_3 g'$ égale à $\gamma_2 g_2$, on aura le point le plus à droite g' de la projection verticale.

On eût pu, afin d'opérer directement, chercher les points de rencontre des tangentes de profil et de la courbe de contact : cette courbe se projette sur un plan de profil quelconque suivant une droite; conséquemment, en imprimant, autour de z, z', une rotation de 90° à la figure, on eût été conduit à prendre la rencontre des projections rectilignes de la courbe de contact et des génératrices, puis à revenir sur la position primitive de la figure.

688. Points le plus haut et le plus bas. — Sommets. — Les points le plus haut et le plus bas (u, u'), (v, v') ont été obtenus par la méthode générale (§ **676**). Ces points sont aussi (la symétrie de la figure le fait voir) deux des sommets de la courbe. Les projections du milieu o, o' de leur droite de jonction est le centre de la courbe, et les points (w', w), (w'_1, w_1) en sont les deux autres sommets.

On voit aussi très aisément que les points v, u, w, w_1 sont les sommets de la projection horizontale et que ceux v', u', w', w'_1, sont les extrémités de deux diamètres conjugués de la projection verticale. On peut actuellement tracer les deux projections de l'ellipse, et, à l'aide du rabattement de la figure autour d'une horizontale $\psi'\psi'_1$, $\psi\psi'$ de son plan, construire la véritable grandeur $U''W''V''W''_1$ de cette ellipse.

SECTIONS PLANES DE L'HYPERBOLOIDE DE RÉVOLUTION A UNE NAPPE

689. Les sections faites par un même plan sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe et sur son cône asymptote sont *homothétiques*.

On peut se servir de cette propriété : 1° pour reconnaître le genre d'une section plane de l'hyperboloïde; 2° pour construire, comme on le verra un peu plus loin, les projections de cette section à l'aide de celles du cône asymptote,

690. Problème. — *Construire les projections et la vraie grandeur de l'intersection d'un plan et d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.*

Il y a trois cas que nous allons successivement traiter.

PREMIER CAS. — *Section elliptique.* — La surface est déterminée par son axe z, z' (*fig.* 380, pl. XLVI), perpendiculaire au plan horizontal et par l'une $\theta g, \theta' g$, de ses génératrices de front; le plan l'est par ses traces $P\alpha P'$.

La génératrice de front $\theta g, \theta' g'$ et le plan $P\alpha P'$ font avec le plan horizontal deux angles, dont le premier a été pris, afin que la section soit une ellipse, plus grand que l'autre.

691. Construction d'un point quelconque de la section. — On emploie, comme pour le cône (§ **665**), des couples de plans parallèles au plan horizontal et équidistants du collier; nous donnerons le tracé pour un seul de ces plans, dont la trace verticale est Q' : il détermine sur la surface un parallèle dont la projection horizontale a pour centre z; la rencontre a', a du plan auxiliaire avec $\theta' g', \theta g$ est un point de ce parallèle; on peut donc trouver facilement sa projection horizontale.

L'intersection du plan auxiliare avec $P\alpha P'$ est une droite qui a sa trace verticale en v', v et dont la projection horizontale vh passe par v et se dirige parallèlement à αP.

Les croisements (c, c'), (d, d') des deux intersections que nous venons de construire, sont des points de l'ellipse cherchée.

692. Tangente en un point quelconque. — Adoptons le point d, d' et construisons la trace horizontale du plan tangent à la surface en ce point (§ **503**), ce plan est déterminé par les deux génératrices rectilignes passant au point considéré; ces génératrices ont pour projections horizontales les tangentes menées du point d à la projection de même nom du collier; une fois ces projections construites, on observe que d, d' est au-dessus du collier, et alors les traces horizontales t, t_1 des génératrices rectilignes se trouvent facilement. Menons la trace horizontale tt_1 du plan tangent et prenons sa rencontre t_2 avec αP; ce point, qui se projette verticalement en t'_2, est la trace horizontale de la tangente; les projections de celle-ci s'obtiennent alors en tirant les droites $t_2 d$, $t'_2 d'$.

693. Points le plus haut et le plus bas. — Sommets. — Le plan conduit par l'axe z, z', perpendiculairement à $P\alpha P'$ est aussi perpendiculaire au plan horizontal et a pour trace horizontale la perpendiculaire R, menée par z, à αP. Ce plan est un plan de symétrie commun à l'hyperboloïde et à $P\alpha P'$; conséquemment, es points de la courbe étudiée qu'il contient sont, tout à la fois, les points le plus haut ou le plus bas et deux sommets de cet te courbe. La rencontre z, e' du plan $P\alpha P'$ avec z, z' a été déterminée par le secours de la ligne $zh, h'e'$ appartenant au plan de front conduit par z, z' et au plan $P\alpha P'$. Ce point e', z est un point de passage de la rencontre du plan $P\alpha P'$, avec le plan de symétrie dont R est la trace horizontale; d'autre part, le point d'intersection h_1, h'_1 des droites R, P, est un second point de passage de cette intersection. Dès lors, la droite $h_1 z, h'_1 e'$, qui unit ces deux points, percera la surface précisément aux points que nous cherchons; il n'y a donc plus qu'à construire la rencontre de l'hyperboloïde avec cette droite $h_1 z$, $h'_1 e'$; c'est un problème déjà longuement expliqué au paragraphe **519**; nous nous bornerons donc à décrire les constructions qui en résultent.

Du point z comme centre avec zh_1 pour rayon on décrit une circonférence de cercle, qui est la trace horizontale du cône auxiliaire engendré par la rotation, autour de z, z', de la droite zh_1, $e'h'_1$.

Par le sommet z, e' de ce cône et par la droite g, g' on conduit un plan, dont la trace horizontale est la droite qui unit les traces de même nom θ, θ_1 de la droite $\theta g, \theta' g'$ et d'une parallèle à celle-ci menée par e', z. La trace $\theta\theta_1$ rencontre celle du cône auxiliaire aux points θ_2, θ_3, que l'on unit par des droites à z; par les rencontres f, l de ces droites avec θg on a les projections horizontales des points d'intersection du cône auxiliaire avec la génératrice $\theta g, \theta' g'$, on fait alors passer par chacun d'eux une circonférence de cercle ayant z pour centre.

Ces circonférences sont les projections horizontales des parallèles communes au cône auxiliaire et

à l'hyperboloïde. Celle qui passe par f correspond à la nappe supérieure du cône, l'autre à la nappe inférieure; par suite le point de rencontre k de la première avec la droite h_1z prolongée au delà de z, est la projection horizontale de l'un des points cherchés; l'autre, qui est sur la nappe inférieure du cône, se projette horizontalement en m. Aux points de croisement de la droite h'_1e', avec deux lignes de rappel menées l'une par k, l'autre par m, on trouve les projections verticales k', m' des points que l'on voulait construire. Dès lors, ces points sont déterminés par leurs projections (k', k), (m, m'); ils représentent deux des sommets de l'ellipse cherchée et les points le plus haut ou le plus bas de la même courbe; ces points servent encore, puisque les plans auxiliaires sont ici horizontaux, à faire connaître les plans limites.

Le milieu o, o' de la droite mk, $m'k'$ est le centre de la courbe; conséquemment, le plan horizontal auxiliaire dont la trace verticale Q'_1 passe par o' sert à trouver deux points (r, r'), (s, s') qui sont les deux autres sommets de la courbe étudiée.

Sur le plan horizontal, les projections des sommets se confondent avec les sommets de la projection, sur le plan vertical elles donnent les extrémités m', k', s', r' de deux diamètres conjugués $m'k'$, $r's$ d'ellipse correspondante; on peut tracer le parallélogramme $(1'2'3'4')$ circonscrit à cette courbe.

694. Points du contour apparent horizontal. — On coupe par le plan du collier pris pour plan auxiliaire; autrement dit, on exécute le tracé général (§ **691**) pour le plan auxiliaire dont la trace verticale Q'_2 passe par la projection verticale du centre de la surface; on a ainsi trouvé les points (u, u'), (w, w').

695. Points du contour apparent vertical. — L'intersection du plan $P\alpha P'$ avec le plan de front conduit par l'axe z, z' est une droite dont les projections, déjà construites, sont hz, $h'e'$. Ce même plan de front rencontre l'hyperboloïde suivant le contour apparent vertical de cette surface.

Après avoir tracé ce contour, qui est ici l'hyperbole dont la construction fait l'objet du paragraphe **502**, on pourrait prendre la rencontre de cette hyperbole avec la droite zh, $e'h'$; mais il est mieux d'opérer directement sur les données de l'épure sans le secours de l'hyperbole méridienne. C'est le problème qui vient d'être expliqué que l'on doit reprendre; il faut, en effet, construire les points de rencontre de l'hyperboloïde et d'une droite zh, $e'h'$ qui rencontre son axe.

Le cône auxiliaire a maintenant pour base une circonférence de cercle de centre z et dont h est un point de passage, le sommet du cône est encore le point de rencontre z, e' du plan $P\alpha P'$ avec l'axe z, z', en conséquence le plan auxiliaire a toujours pour trace horizontale $\theta\theta_1$. Les rencontres de ces deux surfaces auxiliaires sont deux droites projetées horizontalement en θ_4z, θ_5z.

Les points de croisement δ, β de ces projections avec θg sont les projections horizontales de deux points placés, respectivemenent, sur les parallèles communs à l'hyperboloïde et au nouveau cône auxiliaire.

On en déduit les projections horizontales de ces parallèles, et celles ε, γ, sur le même plan, des points cherchés, que l'on relève ensuite en γ', ε', sur $h'e'$.

L'épure, sur laquelle on a représenté l'hyperboloïde tronqué compris entre le plan horizontal de projection et la section elliptique, est soumise à cette vérification que l'hyperbole de contour apparent vertical doit passer par les points ε', γ', et doit y toucher la projection verticale de la courbe d'intersection.

696. Vraie grandeur de la section. — On rabat, autour de αP et sur le plan horizontal de projection, l'ellipse que l'on vient de déterminer.

Après avoir mené, dans le plan $P\alpha P'$, la droite de front $o\mu$, $o'\mu'$ passant par le centre de la section,

on obtient le rabattement de ce centre par la rencontre O_1 d'un arc de cercle, de centre μ et de rayon égal à $\mu'o'$, avec la droite oh_1 prolongée (§ 130).

Les sommets rabattus se déterminent fort simplement ensuite, comme on le voit sur l'épure. On pourrait encore construire facilement les rabattements des divers points de la section et celui des tangentes correspondantes.

697. Construction indirecte des sommets d'une section plane de l'hyperboloïde (*fig.* 381, pl. XLVII). — L'hyperboloïde est déterminé comme dans l'épure précédente; quant au plan nous supposons, pour plus de simplicité, qu'on l'a fait tourner autour de z, z' pour l'amener sur l'une $P\alpha P'$ de ses positions perpendiculaires au plan vertical.

Nous déterminons d'abord la rencontre du plan donné avec le cône asymptote de l'hyperboloïde.

Le sommet de ce cône se confond avec le centre z, s' de la surface; l'une de ses génératrices du contour apparent vertical a pour projections g' et la parallèle g_1 à g, menée par z, l'autre a sa projection horizontale encore sur g_1 et pour projection verticale la droite g'_1 symétrique, de g' par rapport à z'.

Cela dit, cherchons les sommets de la projection horizontale de la section du cône asymptote par le plan $P\alpha P'$ (§ 657). Deux d'entre eux, a, b, se construisent immédiatement.

Pour obtenir les deux autres, on peut recourir à l'un des foyers et au centre, qui se trouvent : le premier f au pied même de l'axe, l'autre o au milieu de la droite ab. La perpendiculaire à cette dernière droite menée par o est le deuxième axe de la projection cherchée.

Enfin, en décrivant du point f comme centre avec le demi-grand axe oa pour rayon, un arc de cercle, on obtient, en ses points de rencontre c, d avec le deuxième axe, les deux autres sommets cherchés.

Tout cela entendu, passons à la recherche des sommets de la section faite par le plan $P\alpha P'$ sur l'hyperboloïde. Au point o répond sur la projection verticale le point o' qui est tout à la fois le milieu des segments interceptés sur $\alpha P'$ par les asymptotes du contour apparent vertical de l'hyperboloïde et par ce contour lui-même.

Il suit de là que les sections faites par le plan $P\alpha P'$ sur l'hyperboloïde et sur son cône asymptote sont non seulement homothétiques mais encore concentriques.

Deux des sommets (o', c_1), (o', d_1) de la section faite dans l'hyperboloïde par $P\alpha P'$ seront facilement obtenus en employant, comme plan auxiliaire, le plan horizontal conduit par o, o' (§ 691).

L'un des deux autres sommets s'obtiendra alors, puisque les sections du plan $P\alpha P'$ avec l'hyperboloïde et son cône asymptote sont homothétiques, en tirant la droite cb, en lui menant ensuite par c_1 une parallèle que l'on prolongera jusqu'à sa rencontre b_1 avec g_1. Ce point sera le troisième sommet de la projection horizontale; quant au quatrième c'est le symétrique a_1 de b_1 par rapport au centre commun aux projections horizontales des deux sections.

698. Deuxième cas. — *Section hyperbolique.* — La surface est toujours déterminée (*fig.* 382, pl. XLVI) par son axe z, z', que l'on suppose encore vertical, et par l'une g, g' de ses génératrices rectilignes de front. Quant au plan $P\alpha P'$ nous lui avons cette fois assigné, afin de simplifier l'épure et d'indiquer les diverses dispositions qu'elle peut offrir, une position perpendiculaire au plan vertical de projection.

La construction d'un point quelconque de la section, identique à celle du premier cas, n'a pas été exécutée sur notre épure.

699. Axes et sommets. — En ce qui concerne les axes, la manière la plus simple d'exécuter le

tracé est de chercher tout d'abord la projection verticale du centre; elle se trouve évidemment au milieu o' du segment que l'hyperbole du contour apparent vertical de la surface intercepte sur $\alpha P'$, ou plutôt, au milieu du segment $l'k'$ que les deux asymptotes de cette hyperbole interceptent sur cette même droite $\alpha P'$; on en déduit la projection horizontale o correspondante.

Il est alors très facile de déterminer la position de l'axe transverse. Effectivement, lorsque, comme dans notre épure, le point o' tombe dans l'intérieur du contour apparent vertical de la surface, la perpendiculaire au plan vertical menée par ce point est précisément l'axe transverse. Alors, l'emploi d'un plan horizontal auxiliaire passant par o' conduit à la détermination des deux extrémités de cet axe :

En exécutant ce tracé on a trouvé les sommets (s_1, o'), (s_2, o').

Lorsque, au contraire, le point o' se trouve à l'extérieur du contour apparent vertical de la surface, les sommets de l'axe horizontal sont imaginaires; dans ce cas, et seulement dans ce cas, on devra recourir au tracé un peu long qui sert à trouver les sommets de l'axe qui croise z, z' (§ **693**).

700. Asymptotes de la section. — Quelle que soit la surface de révolution, on peut, comme nous l'avons démontré plus haut (§ **681**), remplacer pour ce qui concerne la détermination des branches infinies et la construction des asymptotes, la surface donnée par son cône asymptote. On est ainsi conduit à appliquer au cône asymptote le tracé déjà expliqué (§ **586**), et que nous allons simplement indiquer.

Construisons d'abord le cône asymptote : son sommet est le centre σ', z de la surface donnée, sa base sur le plan horizontal de projection est un cercle de centre z, dont un point de passage s'obtient en prenant la trace horizontale t d'une parallèle g', g_1 à g, g' menée par z, σ'; on peut par suite facilement tracer cette base.

Menons par le sommet du cône un plan $Q'\beta Q$ parallèle à $P'\alpha P$ et prenons les génératrices $(\sigma'\beta, z\beta_1)$, $(\sigma'\beta, z\beta_2)$, d'intersection de ce plan parallèle avec le cône asymptote. Après quoi, nous conduirons des plans tangents au cône par ces droites, ces plans auront pour traces horizontales des tangentes à la base du cône menées par β_1, β_2; nous chercherons enfin leurs rencontres avec $P\alpha P'$.

Les traces horizontales que nous venons de construire rencontrent αP aux points h_1, h_2, qui sont les traces horizontales des asymptotes cherchées; ces asymptotes ont donc pour projections horizontales des droites menées par h_1, h_2 et respectivement parallèles à $\beta_1 z$, $\beta_2 z$.

Nous terminerons en remarquant que les plans tangents aux cônes conduits par $(z\beta_1, \beta\sigma')$, $(z\beta_2, \beta\sigma')$ sont des plans asymptotiques à l'hyperboloïde, qui doivent le couper chacun suivant deux génératrices rectilignes parallèles entre elles, et aussi respectivement parallèles à la génératrice de contact de ces plans avec le cône.

On voit par là que les tangentes à la projection horizontale du collier menées par les points d'intersection t_2, τ_2 des traces horizontales de l'hyperboloïde et de l'un des plans asymptotiques considérés, doivent, si l'épure est exactement faite, être toutes deux parallèles à $\beta_2 z$.

Le plan asymptotique qui touche le cône asymptote suivant $(z\beta_1)$, $(\sigma'\beta)$, donnera lieu à une vérification semblable.

Signalons encore les constructions de quelques points remarquables de la section, qui se trouvent exécutées sur notre épure. Tout d'abord, la rencontre k, k' de la génératrice donnée avec $P\alpha P'$ est un point de la section.

En adjoignant ce point aux deux asymptotes que l'on vient de construire, on a les éléments nécessaires à la détermination de la courbe, dont le tracé peut avec ces éléments se faire sans difficulté.

On a également déterminé les points (a, a'), (b, a') où la courbe d'intersection rencontre le contour apparent horizontal de la surface, et ceux (c, α), (d, α), (e, e'), (f, e') où elle coupe deux plans horizontaux équidistants du collier, dont l'un est le plan horizontal de projection.

Ces deux plans horizontaux comprennent entre eux un segment de l'hyperboloïde dont on a, pour régler les effets de la visibilité, enlevé la partie placée au-dessus du plan $P\alpha P'$; en outre l'hyperboloïde a été supposé plein et opaque. Des hachures ont été placés sur les parties coupées visibles (§ **275**).

Troisième cas. — *Section parabolique* (*fig.* 883, pl. XLVII). — Conservons, en ce qui concerne l'hyperboloïde, les données de l'épure précédente; plaçons ensuite le plan sécant $P\alpha P'$ dans une position perpendiculaire au plan vertical, et parallèle, afin que la section soit une parabole, à la génératrice g, g'.

La parabole est la limite de l'ellipse, par suite, sauf de très légères modifications, tout ce qui a été dit dans le premier cas est ici applicable.

Nous allons seulement reprendre deux questions qui peuvent être résolues par des procédés relatifs au seul cas de la parabole.

701. Axe et sommets. — L'axe est la droite $ta, \alpha P'$, placée à la rencontre du plan $P\alpha P'$ et du plan de front conduit par z, z'.

Pour trouver le sommet il faut chercher la rencontre de cet axe avec la surface; or, l'axe $ta, \alpha P'$ est parallèle à la génératrice $\theta g, \theta' g'$; ces deux droites sont donc dans un même plan. En adoptant ce plan comme plan sécant auxiliaire, on trouvera sur l'hyperboloïde une courbe du second degré qui, devant comprendre la génératrice $\theta g, \theta' g'$, sera formée de cette génératrice et d'une génératrice de système différent, que nous allons construire.

Après avoir figuré sur l'épure la trace horizontale de l'hyperboloïde et celle θt du plan auxiliaire, en prenant le second point h de croisement de ces lignes, on aura l'un des points de la génératrice demandée. La projection horizontale de la seconde génératrice d'intersection est donc l'une des deux tangentes que l'on peut mener du point h à la projection horizontale du collier.

Il faut choisir parmi les deux tangentes celle qui convient à la présente question. Un observateur qui serait placé en θ et regarderait le point d contact de g avec la projection horizontale du collier, aurait cette dernière à sa gauche.

En plaçant l'observateur dans les mêmes conditions en h il devra voir la projection horizontale du collier à sa droite (§ **504**); c'est donc la tangente hk qu'il convient d'adopter. Son point de croisement s avec ta est tout à la fois la projection horizontale du sommet et le sommet de la projection horizontale; la projection verticale correspondante se trouve à la rencontre s' de P' et de la ligne de rappel menée par s.

702. Foyer de la projection horizontale. — Antérieurement, nous déterminerons les éléments de la parabole commune au plan $P\alpha P'$ et au cône asymptote, se qui se fait très simplement.

En effet, complétons le contour apparent vertical du cône asymptote qui se compose de deux droites ayant une projection horizontale ta commune et des projections verticales g', g'_1 symétriquement placées par rapport à z'. Le point de rencontre σ, σ' de $P\alpha P'$ avec g'_1, ta est le sommet de la parabole que le plan $P\alpha P'$ découpe dans le cône; en outre, σ est le sommet de sa projection horizontale, et, d'après un théorème démontré plus haut (§ **491**), z en est le foyer.

Cela posé, démontrons que le plan $P\alpha P'$ coupe l'hyperboloïde et son cône asymptote suivant deux paraboles égales.

Imaginons que la surface et son cône asymptote soient rapportés à trois axes rectangulaires issus

du centre du collier, dont l'un oz serait l'axe de rotation des deux surfaces et dont un second OX serait situé dans le plan du collier et se projetterait horizontalement sur za.

Dans ce système, les équations de l'hyperboloïde et de son cône asymptote ne différeront que par le terme constant, il en sera donc de même de celles des projections sur le plan du collier des paraboles que détermine la rencontre de $P\alpha P'$ sur l'hyperboloïde et sur son cône asymptote.

D'autre part, ces projections sont elles-mêmes deux paraboles ayant pour axe commun OX; elles auront donc des équations de la forme :

$$y^2 = 2px + c,$$

$$y^2 = 2px + c'.$$

Il suit de là que les projections des deux paraboles sur le plan du collier, ou, ce qui revient au même, sur le plan horizontal, ont même paramètre et sont, par suite, égales.

Pour achever, nous prendrons simplement sur l'axe za, à partir de s, un segment sf égal et dirigé dans le même sens que le segment σz; le point f sera le foyer cherché.

On pourra alors, puisqu'on connaît le foyer et le sommet, construire la parabole.

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE SURFACE

703. Par la droite on conduit un plan dont on cherche la rencontre avec la surface donnée, et on prend les points en lesquels la droite croise la section plane.

Dans le cas d'un cône ou d'un cylindre quelconque, on conduit le plan auxiliaire par le sommet du cône ou dans la direction des génératrices du cylindre. Pour l'hyperboloïde, le plan auxiliaire peut être remplacé par un paraboloïde (§ **518**).

Arrivons aux surfaces de révolution et du second degré.

704. Problème. — *Construire l'intersection d'une sphère et d'une ligne droite.* — Traçons (*fig.* 384, pl. XLVII) les contours apparents en projections de la sphère, et les deux projections ab, $a'b'$ de la droite donnée. Quelle que soit la position de la droite, on peut, à l'aide d'une rotation autour de la verticale menée par le centre o, o' de la sphère, la rendre parallèle au plan vertical (§ **119**) : le pied p, p' de la plus courte distance de l'axe à la droite vient en p_1, p'_1; et la trace θ, θ' de $ab, a'b'$ prend la position θ_1, θ'_1, par suite $\theta_1 p_1, \theta'_1 p'_1$ sont les nouvelles projections de la droite donnée.

On coupe alors la sphère par le plan vertical projetant de la droite déplacée; ce plan donne sur la sphère le cercle $cd, c'd'$; par les rencontres (n'_1, n_1) (m'_1, m_1) de ce cercle avec la droite de front on obtient les points d'intersection de cette droite avec la sphère.

En revenant sur la position primitive, ces points donnent ceux (m, m'), (n, n') qu'il fallait construire. Les parties des projections de la droite qui se trouvent cachées par la sphère ont été dessinées en points ronds sur l'épure; on les détermine par un procédé en tout semblable à celui que nous avons expliqué au paragraphe **267**.

705. Problème. — *Construire l'intersection d'un ellipsoïde de révolution et d'une droite.*

Première solution. — On coupe la surface par le plan projetant de la droite sur le plan vertical, puis, afin d'éviter le tracé d'une ellipse, on détermine un plan sur lequel la courbe d'intersection se projette suivant un cercle. La construction s'achèvera ensuite sans aucune difficulté.

Deuxième solution. — En diminuant les ordonnées perpendiculaires au plan de l'équateur dans un rapport facile à déterminer, on transformera l'ellipsoïde en une sphère et la droite en une nouvelle droite.

Les projections horizontales des points communs à cette dernière droite et à la sphère s'obtiendront très aisément (§ **704**) et seront également les projections de même nom des points cherchés; des lignes de rappel feront alors connaître les projections verticales correspondantes.

Cette solution est évidemment applicable à l'ellipsoïde à trois axes inégaux, à la condition d'opérer deux transformations analogues à celle qui vient d'être indiquée.

Troisième solution. — Donnons-nous dans la position habituelle, l'ellipsoïde par ses contours apparents (*fig.* 385, pl. XLVII) et soient ab, $a'b'$ les projections de la droite. Coupons l'ellipsoïde par le plan projetant de la droite donnée sur le plan vertical; la section est une ellipse projetée verticalement suivant $e'f'$, tirons les droites qui unissent respectivement les points e', f' aux extrémités d', c' de la projection verticale de l'équateur, et désignons par s' leur point de concours.

Considérons ensuite un cône auxiliaire ayant pour sommet le point (s, s') du plan de front conduit par z, z', dont la projection verticale se fait en s' et pour base la section de l'ellipsoïde projetée verticalement sur $e'f'$.

Ce cône est du second degré et coupe la surface suivant une première courbe de ce degré, l'intersection se complétera par une courbe plane; on voit sans peine que cette courbe n'est rien autre chose que l'équateur.

On cherchera facilement les points en lesquels la droite donnée perce le cône auxiliaire, ces points seront ceux qu'il fallait construire. Cette solution est de tout point applicable à l'ellipsoïde à trois axes inégaux et à l'hyperboloïde à deux nappes.

706. Problème. — *Construire les points communs à une droite et à un paraboloïde de révolution.* — Nous supposerons l'axe de la surface vertical. Si la droite n'est pas parallèle à cet axe on adoptera pour plan auxiliaire son plan projetant perpendiculairement au plan vertical, lequel découpera, sur la surface, une ellipse à projection horizontale circulaire (§ **480**); la construction s'achèvera alors sans aucune difficulté. Dans le cas d'une droite parallèle à l'axe on obtiendra très aisement les parallèles de la surface qui passent par les points cherchés, et, par suite, ces points eux-mêmes. Pour terminer, ajoutons que l'on peut appliquer cette solution au paraboloïde elliptique, à la condition de la changer préalablement en paraboloïde de révolution par le procédé du paragraphe **705** (2ème sol.).

CHAPITRE VI

INTERSECTION DE DEUX SURFACES COURBES

707. Problème I. — *Construire l'intersection de deux cônes dont les bases sont dans un même plan* (*fig.* 386, pl. XLVIII). — Dans l'exemple choisi, les bases sont deux cercles γ, γ_1 placés sur le plan horizontal de projection et dont les centres sont o, o_1; les sommets se projettent en (s, s'), (σ, σ'); avec ces données on peut achever, en traçant les contours apparents, de représenter les deux surfaces.

708. Construction des points quelconques de la ligne commune aux deux surfaces. — Nous adopterons une feuillée de plans auxiliaires ayant pour arête la droite $s\sigma, s'\sigma'$ qui unit les sommets des cônes donnés. On eût pu, pour l'exemple choisi, employer des plans auxiliaires horizontaux; mais, d'une part, les sections rectilignes que donnent les premiers plans sont plus faciles à construire que les sections circulaires que donneraient les seconds; d'autre part, nous avons dû, pour traiter le problème dans sa complète généralité, préférer une solution indépendante de la forme assignée aux bases. Les traces horizontales des plans auxiliaires menés par la ligne des sommets $s\sigma$, $\sigma's'$ constituent un faisceau de droites passant par la trace horizontale t de cette ligne. Soit P l'une de ces traces; elle rencontre : la base du premier cône aux points a_5, a_7; celle du second en b_5, b_{18} et les deux cônes, suivant quatre génératrices qui ont sa_5, sa_7, σb_5, σb_{18} pour projections horizontales.

Par les rencontres de ces projections horizontales, on obtient les projections sur le même plan de quatre points m_5, m_7, m_{16}, m_{18} qui appartiennent à la courbe étudiée.

Projetons verticalement a_7 en a'_7, b_7 en b'_7 et tirons les projections verticales $s'a'_7$, $\sigma'b'_7$ des génératrices correspondantes; au point de croisement m'_7 de ces lignes on aura la projection verticale d'un point M_7 de la section. L'épure devra offrir cette vérification que les points m_7, m'_7 appartiendront à une même ligne de rappel.

On opérerait de même pour les trois autres points contenus dans le plan auxiliaire, dont P est la trace horizontale.

709. Tangente en un point quelconque de l'intersection. — Premier cas. — *Les traces sur le plan des deux bases des plans tangents aux deux cônes qui passent par le point choisi, se coupent dans les limites de l'épure.* — Proposons-nous de mener la tangente à la commune intersection des surfaces au point m_7, m'_7. C'est l'intersection des plans tangents menés aux deux cônes par ce point. Or, nous connaissons déjà un point de passage m_7, m'_7 de cette intersection, il suffit donc de construire les traces horizontales des plans tangents au point considéré, qui ne sont rien autre chose que les tangentes R_1, R_3 menées aux bases respectives par les points a_7, b_7, et de prendre le point θ, θ' où ces traces se coupent. Alors, en tirant la droite qui va de θ, θ' au point m_7, m'_7, on a la tangente cherchée.

Deuxième cas. — *Les traces sur le plan des deux bases des plans tangents aux cônes menés par le point choisi, se coupent en dehors des limites de l'épure.* — Adoptons le point dont la projection horizontale est m_{16}; il conduit à chercher la rencontre des plans tangents dont les traces horizontales sont les tangentes R_1, R_3 menées aux bases respectives par les points a_7, b_{16}. Au lieu de regarder la tangente inconnue comme l'intersection de ces deux plans tangents, considérons-la comme l'intersection de deux cônes, qui auraient pour directrices les traces horizontales R_1, R_3 et pour sommets respectifs (s, s'), (σ, σ'); appliquons simplement à ces cônes le tracé général.

La ligne des sommets $s\sigma, s'\sigma'$ et, par suite, sa trace horizontale t se conservent. Menons donc par t la trace horizontale Q d'un plan sécant auxiliaire (on pourrait prendre l'un des plans ayant servi à la construction des points de l'intersection étudiée), d'abord les rencontres du plan auxiliaire dont Q est la trace horizontale avec R_1 et R_3 sont les points θ_1 et θ_3; ensuite celles avec les plans tangents ont leurs projections horizontales en $s\theta_1$, $\sigma\theta_3$; là où ces droites se croisent, on a la projection horizontale τ d'un point de la tangente. La projection horizontale de la tangente cherchée est donc τm_{16}.

La projection verticale correspondante s'obtiendrait très aisément.

710. Points placés sur les plans limites. — Parmi les plans auxiliaires il en est qui touchent

l'une des surfaces tout en coupant l'autre; ces plans, on l'a déjà dit (§ 579), portent le nom de plans limites.

Dans la présente épure ils ont pour traces horizontales les droites P_1, P_2. Le premier de ces plans, lorsqu'on lui applique le tracé général, détermine, aux points de croisement de la génératrice de contact $\sigma b_1, \sigma' b'_1$ du plan limite considéré avec l'un des cônes et de ses génératrices $(sa_1, s'a'_1)$, $(sa_{12}, s'a'_{12})$ de section avec l'autre cône, deux points (m_1, m'_1), (m_{12}, m'_{12}) de la courbe étudiée, en lesquels, d'après la propriété générale des surfaces limites (§ 579), les tangentes ne sont rien autre chose que les génératrices $(sa_1, s'a'_1)$, $(sa_{12}, s'a'_{12})$ suivant lesquelles le plan limite coupe l'une des surfaces.

On verra pareillement que le second plan limite, dont la trace horizontale est P_2, détermine les points (m_6, m'_6), (m_{17}, m'_{17}) et leurs tangentes respectives $(\sigma b_6, \sigma' b'_6)$, $(\sigma b_{17}, \sigma' b'_{17})$.

711. Pénétrations. — Pénétration réciproque. — Arrachement. — Sur le plan des bases, on

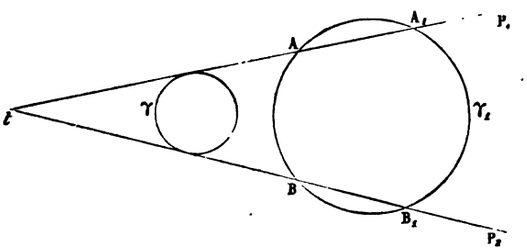


FIG. o_5.

peut trouver, en conservant les données et les notations de notre épure, l'une des trois figures ci-dessus décrites.

Dans la première (fig. o_5) les plans limites touchent tous deux la même surface et coupent l'autre; l'intersection se compose alors de deux courbes : l'une de ces courbes est donnée par les rencontres de toutes les génératrices du cône dont la base est γ avec celles du cône dont la base est γ_1 qui ont

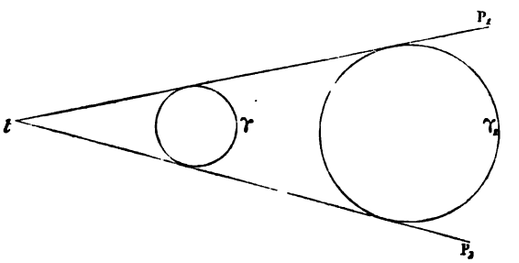


FIG. o_6.

leurs traces horizontales sur l'arc AB; la seconde courbe s'obtient en combinant toujours toutes les génératrices du cône de base γ avec celles de l'autre cône qui ont leurs traces horizontales sur l'arc A_1B_1, de la base γ_1.

La surface dont la base est γ pénètre dans l'autre surface par une courbe, pour en sortir par une deuxième courbe; on dit alors qu'il y a *pénétration*.

Dans la seconde disposition (fig. o_6) les plans limites touchent tous deux chacune des surfaces, il y a alors *pénétration réciproque*.

Remarquons en passant que la pénétration réciproque de deux cônes du second degré se fait, d'après le théorème de MONGE (§ 475), suivant deux courbes du second degré qui se croisent dans chacun des plans limites.

Enfin dans la troisième dispositions (fig. o_7), qui est celle de notre épure, l'un des plans limites

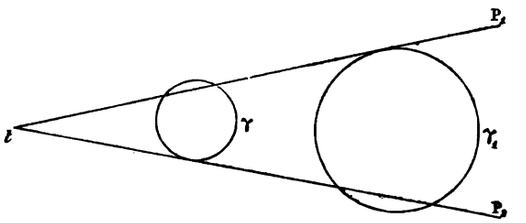


FIG. o_7.

touche l'une des deux surfaces données et l'autre plan limite touche la seconde surface; les deux cônes s'entaillent réciproquement et on dit qu'il y a *arrachement*.

Pour ce dernier cas l'intersection est formée par une seule courbe.

712. Points des contours apparents. — Rien n'est plus simple que de construire ces points; car il suffit d'employer, parmi les plans auxiliaires compris entre les plans limites et servant à trouver les points de la ligne commune aux deux surfaces, ceux dont les traces horizontales passent par les traces de même nom des diverses génératrices qui constituent les contours apparents.

Dans notre épure (*fig.* 386, pl. XLVIII), les traces horizontales de ces plans vont du point t aux points a_{10}, b_3, b_{15}, a_4, a_{11}, b_{11}.

Au sujet des points a_{11}, b_{11} nous ferons remarquer qu'ils ont été, en mettant en place les données, choisis de telle sorte que la droite a_{11}, b_{11} aille passer par le point t; c'est là un cas absolument particulier, que nous avons pris dans l'unique but de donner, comme on va le voir un peu plus bas, un plus grand intérêt à l'épure.

Indiquons les constructions relatives à l'une des lignes qui forment les contours apparents. Nous opérerons sur la ligne $\sigma'b'_{20}$, σb_{15}; le plan auxiliaire qui la contient a pour trace horizontale la droite tb_{15} et coupe le cône dont σ, σ' est le sommet suivant deux droites dont l'une, que l'on a seule employée dans l'épure, est évidemment la génératrice $\sigma'b'_{20}$, σb_{15}. Sur l'autre cône les sections ont pour projections verticales $s'a'_{15}$, $s'a'_{20}$; ces deux dernières droites croisent $\sigma'b'_{20}$ aux points m'_{15}, m'_{20} qui sont les projections verticales des deux points qu'il fallait construire. Quant à leurs projections horizontales, on les construirait tout aussi simplement; mais, comme elles n'offrent rien de remarquable, nous nous sommes dispensés, afin d'éviter de charger l'épure de lignes inutiles à son explication, de les déterminer.

Aux points m'_{15}, m'_{20} que nous venons de construire, la projection verticale de la commune intersection doit toucher la droite $\sigma'b'_{20}$ (§ 342).

On a construit pareillement les autres points des contours apparents.

713. Points le plus haut et le plus bas. — La détermination de ces points conduit au problème suivant : Deux courbes γ, γ_1 et un point t étant donnés, conduire par ce point une droite telle, que les tangentes menées à chacune des courbes par un de ses points de rencontre avec la droite soient parallèles. Cette droite est la trace horizontale du plan sécant auxiliaire qui contient les points cherchés; dès qu'elle sera déterminée, il ne restera plus qu'à appliquer le tracé général.

Le problème qui vient d'être énoncé peut se résoudre d'une manière générale par le calcul; effectivement, soient

$$\rho = f(\omega)$$

et

$$\rho = \varphi(\omega),$$

les équations des deux bases γ, γ_1; en prenant pour pôle le point t et pour axe polaire une droite quelconque menée par ce point. On sait que l'angle V de la tangente à une courbe avec le rayon vecteur, est déterminé par la formule

$$\operatorname{tg} V = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

dans laquelle α désigne l'inclinaison du rayon vecteur passant par le point de contact et de l'axe polaire.

Il s'ensuit que, en appelant α l'angle de la droite cherchée avec l'axe polaire, on aura

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha}.$$

Si l'on pouvait parvenir à résoudre simplement cette équation, la connaissance des valeurs de α entraînerait celle des plans sécants auxiliaires donnant les points cherchés. Mais la résolution de l'équation est presque toujours trop pénible; on peut alors opérer par tâtonnements; on mènera des divergentes par t ainsi que des tangentes aux bases par leurs points de rencontre avec ces divergentes, et on cherchera à obtenir celles de ces tangentes qui sont parallèles. Le plus souvent on renonce à construire ces points, sauf cependant dans le cas où les bases sont homothétiques. En effet, dans ce cas particulier il suffit pour avoir immédiatement la trace sur le plan des deux bases des plans auxiliaires qui contiennent les points cherchés, de joindre tout simplement le point t au centre d'homothétie. Quand les bases seront circulaires on joindra, attendu que deux cercles quelconques sont toujours doublement homothétiques, le point t aux deux centres d'homothétie, et l'on aura ainsi les traces horizontales des plans demandés.

Il est presque inutile d'ajouter que, pour qu'un plan ainsi déterminé contienne les points le plus haut ou le plus bas, il faut et il suffit que sa trace sur le plan des bases tombe entre celles des plans limites.

En appliquant cette méthode à l'épure qui nous occupe, on voit que la droite de jonction du point t au centre d'homothétie directe tombe à l'extérieur de l'espace angulaire compris entre les traces P_1, P_2 des plans limites; au contraire la droite de jonction P_3 de ce même point t au centre d'homothétie inverse c est comprise dans cet espace. Il y a donc seulement lieu d'appliquer le tracé général (§ 708) au plan dont P_3 est la trace horizontale; en exécutant ce tracé on a trouvé les projections verticales du point le plus haut m'_{21} et du point le plus bas m'_9.

714. Points de rebroussement de première espèce. — Deux des lignes des contours apparents relatifs aux deux surfaces et au même plan de projection peuvent, exceptionnellement, se rencontrer dans l'espace. Cette circonstance sera signalée sur l'épure par la coïncidence de deux divergentes issues du point t, et passant respectivement par les traces horizontales de deux des lignes des contours apparents de même nom des deux surfaces coniques. On l'a dit plus haut, cette particularité se

produit sur notre épure pour les droites ta_{11}, tb_{11}, qui se superposent. Dans ces conditions, les deux génératrices projetées horizontalement en sa_{11}, σb_{11} se coupent en un point m_{11}, pour lequel les plans tangents aux deux cônes sont verticaux, puisque le point M_{11} appartient au contour apparent horizontal de chacun des cônes. Il suit de là que la tangente en M_{11} à la commune intersection est dans l'espace perpendiculaire au plan horizontal, et, en vertu du théorème IIIbis du paragraphe **386**, que la projection horizontale de l'intersection présente en m_{11} un rebroussement de première espèce.

715. Jonction des points. — Arrachement. — Afin de pouvoir appuyer par un exemple les indications générales qui vont suivre, nous nous occuperons pour l'instant du cas figuré sur l'épure, qui est celui de l'arrachement; quant aux cas de la pénétration réciproque et de la pénétration simple, nous nous réservons de les traiter un peu plus loin, avec les problèmes qui vont suivre, dont les données seront choisies en vue de réaliser successivement ces deux cas de l'intersection des surfaces coniques.

C'est encore la méthode des projections centrales (§ **283**) qu'il convient d'appliquer; nous nous bornerons donc à reproduire les explications déjà données pour le cas de deux pyramides. Que l'on imagine un point mobile qui, parti de l'un quelconque des points de la courbe cherchée pour y revenir, la décrirait d'un mouvement continu. Alors les projections centrales du mobile, faites sur le plan horizontal et en plaçant le centre de projection soit au sommet s, s', soit au second sommet σ, σ', parcourront d'un mouvement continu la base γ de l'un des cônes, ou celle γ_1 de l'autre cône.

Pour tout passage du mobile dans un plan limite, l'une de ses projetantes coniques est tangente à la courbe de l'espace; il en résulte que, sur la projection correspondante, il devra rebrousser chemin (§ **385**) et parcourir à nouveau la portion de courbe précédemment décrite.

On en conclut que la jonction peut être faite comme nous allons l'indiquer.

Plaçons, afin d'éviter l'un des rebroussements, la position initiale du mobile sur l'un des points M_1 du plan limite dont P_1 est la trace horizontale. Pour les deux projections centrales du mobile et pour le mobile lui-même nous trouverons les positions correspondantes et consécutives qui suivent : 1° sur l'arc de la base γ compris entre les plans limites : a_1, a_2, $a_3 \ldots a_{12}$. Arrivé en a_{12} il faudra, nous l'avons démontré, rebrousser chemin et passer par les points a_{13}, $a_{16} \ldots a_{20}$, a_{21};

2° Sur l'arc de γ_1, compris entre les plans limites : b_1, b_2, $b_3 \ldots b_6$; là, en rebroussant chemin nous trouverons b_7, b_8, $b_9 \ldots b_{17}$; en rebroussant encore chemin l'une des projections coniques se placera en b_{17}, $b_{18} \ldots b_{20}$, b_{21}, b_1;

3° Sur la courbe de l'espace : M_1, M_2, $M_3 \ldots M_{20}$, M_{21}.

Relativement aux points des contours apparents, nous avons déjà fait remarquer qu'une seule de leurs projections présente un intérêt particulier; c'est celle qui appartient à la ligne du contour apparent en projection; pour ce motif on n'a pas tracé sur l'épure les deux projections de ces points. Ainsi les points tels que M_4 n'ont pas été projetés verticalement, et ceux tels que M_{14} ne l'ont pas été sur le plan horizontal.

En tenant compte de cette remarque on arrive à unir par un trait continu sur la projection horizontale m_1, m_2, m_4, m_5, m_6, m_7, m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{16}, m_{17}, m_{18}, m_{19}, m_1, et ceux m'_1, m'_3, m'_6, m'_7, m'_8, m'_9, m'_{10}, m'_{12}, m'_{14}, m'_{15}, m'_{17}, m'_{20}, m'_{21}, m'_1, sur la projection verticale.

716. Visibilité. — Sur la figure 386 (pl. XLVIII) on a représenté le solide constitué par l'ensemble des deux corps. Dans cette hypothèse, les effets de visibilité se règlent à l'aide des remarques qui suivent :

1° Pour qu'un point de l'intersectionsoit visible par rapport à l'un des plans de projection, il faut et il suffit qu'il se trouve au croisement des deux génératrices visibles en projection;

2° Les points de passage des parties visibles aux parties cachées sur l'un des plans de projection, se trouvent sur les lignes des contours apparents par rapport à ce plan de projection.

Ces deux remarques, et l'examen attentif, que rien ne saurait remplacer, des deux projections de la figure étudiée, suffisent pour arriver à saisir les effets de visibilité indiqués sur l'épure.

La figure 387 (pl. XLVIII) représente le cône de sommet s, s' supposé solide et entaillé par l'autre cône. Dans la figure 388 (pl. XLIX) nous avons, en faisant les mêmes hypothèses, représenté l'autre cône.

La figure 389 (pl. XLIX) est l'épure du solide commun aux deux cônes.

Sur la figure 390 (pl. XLIX) on peut voir les projections de la portion de la *surface* du cône dont le sommet est σ, σ' qui se trouve comprise dans la courbe d'intersection; autrement dit cette figure représente une *feuille* formée par la partie de la *surface* du cône dont le sommet est $\sigma\,\sigma'$ comprise dans l'autre cône.

Enfin sur la figure 391 (pl. XLIX) on a représenté une *feuille* formée de la partie de la surface du cône dont s, s' est le sommet qui se trouve renfermée dans l'autre cône.

717. Problème II. — *Construire l'intersection de deux cônes dont les bases sont dans deux plans différents.* — Nous nous bornerons à construire la projection horizontale de la figure.

Soient (*fig.* 392, pl. XLIX): s, σ les projections horizontales des sommets des deux cônes; γ, γ_1 les projections horizontales des bases, que l'on suppose placées dans des plans quelconques; uv la projection de même nom de la droite commune à ces deux plans; θ, θ_1 les projections horizontales des points où la ligne droite qui unit les sommets des cônes va percer les plans des bases γ, γ_1.

Les plans auxiliaires passeront par la droite des sommets, par suite les projections horizontales de leurs traces sur les plans des bases seront deux droites issues respectivement des points θ, θ_1 et se croisant sur uv.

Soient, $\theta\alpha_4$, $\theta_1\alpha_4$ les projections horizontales, pour une position quelconque du plan auxiliaire, des traces de ce plan sur les plans de base; les projections horizontales des génératrices suivant lesquelles ce plan auxiliaire coupe les deux cônes sont sa_4, sa_{10}, σb_4, σb_{10}; leurs points de croisement m_4, n_4, m_{10}, n_{10} sont des points de la projection horizontale de la ligne commune aux surfaces données.

Les plans limites se construisent très simplement, et l'on distingue alors facilement le cas d'un arrachement de celui d'une pénétration.

Nous avons pris, pour varier les exemples, des bases telles, que les plans limites $\theta\alpha_1\theta_1$, $\theta\alpha_7\theta_1$ soient tous deux tangents à la fois aux deux cônes; autrement dit, il y a pénétration réciproque des deux surfaces coniques représentées sur notre épure.

D'autre part, nous avons adopté des ellipses pour base des surfaces ; alors, comme nous l'avons dit un peu plus haut, l'intersection est, d'après le théorème de Monge, un système de deux courbes du second degré, qui se croisent sur les plans limites. En appliquant le tracé général aux plans limites on trouve les projections horizontales des deux points de croisement m_1, m_7 des deux courbes qui forment l'intersection.

On a encore construit, comme on le voit sur l'épure, les points des contours apparents m_2, m_3, m_8, m_9, n_6, n_9, n_{12}, n_3, et la tangente en n_4; expliquons ce dernier tracé. Les projections horizontales des traces sur les plans des bases respectives des plans tangents en N_4 à chaque cône sont les tangentes

$a_{10}\delta$, $b_4\beta$ aux courbes γ, γ_1. On assimile, comme on l'a déjà fait au paragraphe **709** (2ème cas), les plans tangents à des cônes qui auraient pour sommets (s, s'), (σ, σ') et dont les directrices seraient les tangentes projetées horizontalement en $a_{10}\delta$, $b_4\beta$. Coupons ces cônes par le plan limite $\theta a_1\theta_1$, les projections horizontales des droites d'intersection sont $\sigma\beta$, δs et ces droites se croisent en ε.

La droite qui va du point ε au point n_4 est la projection de la tangente qu'il fallait construire.

718. Jonction des points. — On unira par un trait continu les points qui se présenteront dans les plans auxiliaires successifs que l'on rencontrera en parcourant l'une des bases complète deux fois dans le même sens, et l'autre base complète également deux fois, mais dans les deux sens.

Appliquons ceci à notre épure; les points correspondants se succèderont dans l'ordre suivant : $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{11}, a_1$ pour la base γ de l'un des cônes; pour la base γ_1 du second cône, b_1, b_2, $b_3, \ldots$ $\ldots b_{12}$, b_1 et, enfin, pour l'une des courbes que l'on se propose de tracer m_1, $m_2 \ldots m_{10}$, m_1.

En conservant l'ordre ci-dessus indiqué pour γ_1 et en renversant celui qui vient d'être employé pour γ, on trouvera sur cette dernière courbe successivement les points c_1, c_3, $c_4 \ldots c_9 \ldots c_1$, et sur la seconde courbe que l'on doit tracer m_1, n_3, $n_4 \ldots n_{12}$, m_1.

On peut encore observer que, dans ces conditions, le point de croisement des projections horizontales des traces sur les plans de base des plans auxiliaires a pris successivement pour chacune des courbes d'intersection, les positions α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_6$, α_7, $\alpha_8, \ldots \alpha_{11}$, α_{12}, α_1.

Dans la figure principale (*fig.* 392, pl. XLIX) on a représenté l'un des cônes supposé solide en supprimant la partie de ce corps comprise dans l'autre cône.

Sur la figure 393 (pl. XLIX) on a représenté le solide commun aux deux cônes, et la figure 394 de la même planche représente le cône de sommet S supposé solide et limité aux plans des courbes d'intersection.

719. Problème III. — *Construire l'intersection d'un cône et d'un cylindre.*

Le présent problème n'est qu'un cas particulier des deux précédents; il se résout par conséquent d'une manière absolument semblable à celle qui vient d'être donnée; aussi ne traiterons-nous que le seul cas où les bases sont dans un même plan et renverrons-nous le lecteur, pour la construction de la tangente, des points des contours apparents, des points placés dans les plans limites, des points le plus haut et le plus bas et des points de rebroussement, à la solution générale.

Le cône est donné (*fig.* 395, pl. L) par les projections s, s' de son sommet et par sa trace horizontale γ; le cylindre est donné par sa trace horizontale γ_1 et par la parallèle $s\theta$, $s'\theta'$ à la direction de ses génératrices menée par le sommet du cône. Il est facile de tracer avec ces données les contours apparents des deux surfaces.

720. Construction d'un point quelconque. — On fait toujours passer les plans auxiliaires par la droite qui unit les deux sommets; c'est-à-dire par la parallèle $s\theta$, $s'\theta'$ aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône; les traces horizontales de ces plans formeront un faisceau dont le sommet est θ. Soit P l'une d'elles; le plan auxiliaire correspondant coupe le cône suivant deux génératrices qui ont pour traces horizontales β_1, β_2, et qui se projettent sur ce plan de même nom suivant $s\beta_1$, $s\beta_2$; ce même plan auxiliaire coupe aussi le cylindre suivant deux génératrices dont les traces horizontales sont α_1, α_2 et dont les projections de même nom sont les parallèles $\alpha_1 g_1$, $\alpha_2 g_2$ menées, à $s\theta$, par les points α_1, α_2. Les projections horizontales que nous venons de construire s'entrecoupent en quatre points m_1, m_2, m_3, m_4, qui appartiennent à la projection horizontale de l'intersection.

Indiquons la construction de la projection verticale du point M_4; on projette α_1, β_2 en α'_1, β'_2; par α'_1 on mène une parallèle $\alpha'_1 g'_1$ à $s'\theta'$, on unit s', β'_2 par une droite; enfin, par la rencontre des droites

$\alpha'_1 g'_1$, $s'\beta'_2$, qui ne sont rien autre chose que les projections verticales des génératrices dont le croisement se fait en M_4, on trouve la projection verticale m'_4 cherchée.

721. Plans limites. — Ces plans ont pour traces horizontales P_1, P_2; ces plans sont tangents à la base γ, on en conclut qu'il y a pénétration du cône dans le cylindre.

722. Jonction des points. Pénétration. — Nous répéterons ce qui a été dit au paragraphe **292**. La jonction des points dans le cas d'une pénétration se fait plus simplement que dans celui d'un arrachement. Effectivement, il y a dans ce cas deux courbes, l'une d'entrée, l'autre de sortie, que l'on construit séparément.

Pour tracer la première on unit par un trait continu les points de rencontre placés dans les plans sécants qui se succèdent, lorsqu'on parcourt simultanément la base complète γ du cône, dans le sens de la flèche f, par exemple, et deux fois l'un des segments e_1k_1 de la base γ_1 compris entre les plans limites P_1, P_2, dans le sens des flèches ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3.

On opérera de même pour tracer la courbe de sortie; le segment e_1k_1 sera simplement remplacé par a_1d_1, qui sera parcouru dans l'ordre des flèches φ, φ_1, φ_2, φ_3.

Sur la figure principale (*fig.* 395, pl. L) on a représenté le cylindre et le cône, en les limitant au plan horizontal de projection.

Sur la figure 396 de la même planche, on a représenté la portion de la surface du cône comprise dans le cylindre.

723. Problème IV. — *Construire l'intersection de deux cylindres.* — Nous donnerons seulement sur ce problème, qui n'est qu'un cas particulier des trois premiers, quelques indications générales.

Prenons le cas usuel de deux cylindres définis par leurs traces horizontales, qui sont ici deux cercles γ, γ_1 (*fig.* 397, pl. LI) et par les directions des génératrices; traçons, avec ces données, les contours apparents des surfaces et passons à la détermination de leur ligne commune.

724. Construction d'un point quelconque de la ligne commune. — Par un point a, a' pris dans une position arbitraire, on conduit une parallèle à chacune des directions des génératrices, et on construit les traces horizontales θ, θ_1 de ces parallèles.

La droite de jonction des points θ, θ_1 est la direction générale des traces horizontales des plans auxiliaires. Soit P l'une de ces traces; ses rencontres θ_2, θ_3, θ_4, θ_5 avec les courbes de base sont les traces horizontales des génératrices suivant lesquelles le plan auxiliaire correspondant coupe le cylindre. En traçant les projections horizontales de ces génératrices on trouve, là où elles se coupent, les projections horizontales m_1, m_2, m_3, m_4 de quatre points de l'intersection; si l'on projette ensuite verticalement θ_3 et θ_5 sur la ligne de terre, en θ'_3, θ'_5, et que l'on mène par ces deux projections des droites respectivement parallèles aux projections verticales des génératrices, on trouvera, par le croisement m'_3 de ces droites, la projection verticale de l'un des points de l'intersection. L'épure sera soumise à cette vérification que les points m_3, m'_3 devront être placés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

On a construit de la même manière les projections verticales m'_1, m'_2, m'_4 des trois autres points de l'intersection placés dans le plan auxiliaire dont la trace horizontale est P.

725. Points remarquables de la courbe d'intersection. — Les plans limites ont pour traces horizontales P_1, P_2; il y a donc arrachement. On suivra facilement sur l'épure la construction des points (a_1, a'_1), (a_2, a'_2), (a_3, a'_3), (a_4, a'_4) placés dans les plans limites et celle de ceux qui appartiennent aux contours apparents.

En ce qui concerne les points le plus haut et le plus bas, nous ferons remarquer que les bases ont

été prises égales, il s'ensuit que le centre d'homothétie directe et la parallèle à $\theta_1\theta_2$ menée par ce centre sont à l'infini ; cette parallèle n'est donc pas comprise entre les traces P_1, P_2 des plans limites, il n'y a donc que deux points (h, h'), (b, b') à cotes maximum ou minimum : ces points ont été obtenus en construisant le centre d'homothétie inverse ω, qui se trouve au milieu de la droite unissant les centres des bases γ, γ_1, et en appliquant le tracé général au plan auxiliaire dont la trace horizontale P_3 passe par ce centre.

La figure principale représente le corps constitué par l'ensemble des deux cylindres.

On a ensuite représenté, sur la figure 398 (pl. LI), ce qui reste de l'un des cylindres, supposé solide, après avoir enlevé la partie comprise dans l'autre, ou, si l'on veut, l'un des cylindres entaillé par l'autre.

La figure 399 (pl. L) représente le solide commun aux deux cylindres supposés pleins.

Les deux feuilles formées par les portions des surfaces de chacun des cylindres qui se trouvent renfermées dans la courbe commune, sont enfin représentées sur les figures 400 et 401 de la même planche.

DES POINTS DOUBLES DANS L'INTERSECTION DES SURFACES DU SECOND ORDRE

726. Ces points sont de deux sortes, savoir :

1° Les points doubles de l'espace ;

2° Les points doubles en projection.

POINTS DOUBLES DE L'ESPACE

727. On les trouve assez simplement, car en chacun d'eux les tangentes à la ligne commune sont contenues dans les plans tangents aux deux surfaces; ces plans doivent donc se confondre. Ainsi, *aux points doubles de l'intersection de deux surfaces celles-ci ont un plan tangent commun.*

La réciproque de cette propriété est vraie, mais sa démonstration générale ne peut entrer dans le cadre de ce traité.

On trouvera, un peu plus loin, une démonstration de cette réciproque pour le cas particulier des surfaces coniques.

La construction habituelle des tangentes tombe en défaut aux points doubles, puisque les plans tangents aux deux surfaces se confondent en ces points.

Pour parvenir à déterminer ces tangentes, on peut chercher les droites en lesquelles le plan tangent commun aux deux surfaces données rencontre un cône auxiliaire, qui aurait le point double pour sommet, et l'intersection de ces surfaces pour directrice.

On coupe, à cet effet, le cône et le plan par un plan quelconque, et l'on tire les droites de jonction des points de croisement des deux lignes qu'il détermine au point double ; ces droites sont les tangentes cherchées. Ce tracé peut être simplifié par le secours de quelques théorèmes que nous allons établir.

728. Théorème. — *Lorsqu'une courbe de degré m a un point double, tout cône dont le sommet est en ce point et qui passe par la courbe, est de degré m — 2.*

Conduisons un plan quelconque par le point double ; sa rencontre avec la courbe se fera suivant m

points, dont deux se trouveront confondus avec le point double. Le plan coupera donc le cône suivant $m-2$ génératrices; le degré de cette surface sera donc bien $m-2$.

729. Corollaire. — *Lorsque la courbe commune à deux surfaces du second degré présente un point double, le cône dont le sommet est en ce point et qui contient cette courbe est du second degré.* — Ce corollaire résulte immédiatement du théorème qui précède, puisque la courbe d'intersection est ici du quatrième degré. Dans le cas de l'intersection de deux surfaces du second degré, la détermination des tangentes en un point double de cette ligne se réduira donc à la recherche de l'intersection d'un cône du second degré et d'un plan passant par son sommet. On coupera le cône et le plan par un plan auxiliaire, sur lequel on trouvera une courbe du second degré et une droite, dont on prendra les deux points de rencontre; les droites de jonction de ces points au point double seront les tangentes cherchées.

730. Théorème. — *Il existe six directions dans lesquelles un plan coupe suivant des courbes homothétiques, deux surfaces du second degré.* — Transportons les cônes asymptotes des deux surfaces parallèlement à eux-mêmes, en leur assignant un même sommet quelconque. Les cônes ainsi déplacés auront quatre génératrices communes, lesquelles, combinées deux à deux, détermineront six plans réels ou imaginaires.

Tout plan parallèle à l'un d'eux coupera les surfaces données suivant deux courbes ayant pour direction asymptotique commune les droites qui ont servi à fixer la direction de ce plan. Ces deux courbes auront donc même direction asymptotique et seront par suite homothétiques.

731. Théorème. — *Les six directions dans lesquelles un plan coupe deux surfaces du second degré suivant des courbes homothétiques sont communes à ces surfaces, et à toutes celles, de même degré, qui passent par leur intersection.*

En effet, tout plan rencontrant les deux premières surfaces suivant des courbes homothétiques contiendra quatre points de l'intersection de ces surfaces, dont deux seront toujours à l'infini.

Au surplus, la rencontre du plan sécant avec l'une des surfaces du second ordre menées par l'intersection des deux premières passera nécessairement par ces deux points à l'infini. En somme, le plan sécant coupera toutes les surfaces suivant des coniques ayant, à l'infini, deux points communs; coniques qui seront donc bien homothétiques.

732. Corollaire. — *Tout plan cyclique commun à deux surfaces du second degré est aussi commun aux surfaces du même degré passant par l'intersection des deux premières.* — Ce corollaire résulte immédiatement du dernier théorème : puisque deux cercles quelconques sont toujours homothétiques, et que les figures homothétiques d'un cercle sont aussi des cercles.

733. Simplification de la construction des tangentes aux points doubles. — Lorsque les plans par lesquels on peut couper suivant des courbes homothétiques deux surfaces du second degré, ne sont pas tous imaginaires, on peut opérer le tracé du paragraphe **591** comme il suit.

Ayant choisi un plan qui donne, sur les surfaces, des courbes homothétiques, on pourra déterminer la conique suivant laquelle ce plan rencontre l'une des surfaces données; celle que le plan découpe sur le cône auxiliaire se déterminera ensuite très aisément puisqu'elle est homothétique de la première. Cette dernière conique sera la base du cône dont on doit chercher la rencontre avec le plan tangent au point double; ce que l'on pourra faire soit en ayant recours aux plans cycliques du cône, soit en construisant une projection circulaire de sa base.

On le voit, les tracés sont encore longs, et, à l'exception de certains cas particuliers, parmi lesquels on doit signaler au premier rang celui de deux cônes ayant des bases circulaires sur un même

plan, le plus simple consiste à ne déterminer que quelques points de la courbe de rencontre du cône auxiliaire avec un plan sécant quelconque. On aura soin, bien entendu, de choisir ceux de ces points qui, placés de part et d'autre de la trace du plan tangent commun sur le plan sécant, avoisinent cette trace; on pourra ainsi construire approximativement les parties utiles de la rencontre du plan sécant et du cône; puis achever la construction de l'intersection du cône et du plan tangent aux deux surfaces données comme à l'ordinaire.

734. Construction des tangentes aux points doubles de l'intersection de deux surfaces coniques ou cylindriques. — Considérons deux cônes ayant un plan tangent commun P. Soient: S, S_1 leurs sommets; $S\delta$, $S'_1\delta$ les génératrices suivant lesquelles P touche, respectivement, chacune de ces surfaces.

Nous allons, tout à la fois, démontrer que le point δ, en lequel P touche les deux cônes, est un point double de leur intersection et chercher les tangentes en ce point. Pour atteindre simultanément ces deux buts, il suffit de construire les tangentes à la courbe d'intersection en δ, et de constater que le problème offre deux solutions.

Ces tangentes sont nécessairement dans le plan tangent commun P, il est d'ailleurs manifeste

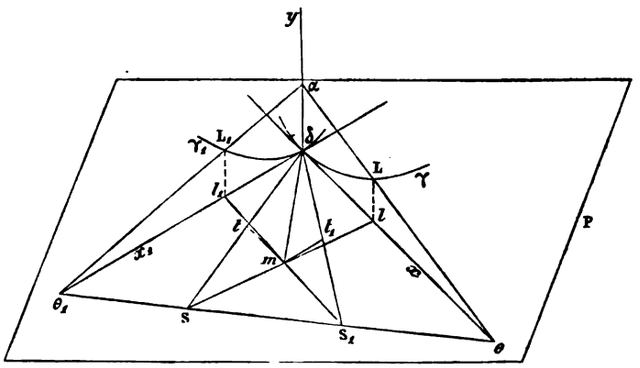


FIG. 0₁.

qu'elles se confondent avec les tangentes à la projection sur P de la courbe commune aux deux cônes; nous chercherons donc simplement ces dernières.

Conduisons par δ deux plans perpendiculaires au plan tangent P et soient : δx, δx_1 leurs traces sur P; γ, γ_1 les courbes suivant lesquelles ils coupent respectivement les cônes de sommets S, S_1; δy l'intersection des plans perpendiculaires au plan P, qui est elle-même perpendiculaire à P, et, finalement, θ, θ_1 les points en lesquels la ligne qui unit S, S_1 coupe respectivement les plans des courbes γ, γ_1.

Nous adopterons γ, γ_1 pour bases respectives des cônes et nous construirons, par la méthode générale (§ 708), un point de la projection sur P de leur ligne commune.

Pour le faire conduisons par θ, θ_1 et par un point α, placé sur y et voisin de δ, un plan sécant auxiliaire; lequel donne : sur les plans des bases les droites $\theta\alpha$, $\theta_1\alpha$; sur les bases elles-mêmes les points L, L_1, que l'on projette en l, l_1, sur P; enfin sur les cônes, des génératrices, dont les projections Sl, S_1l_1 se croisent au point m cherché.

Traçons la droite δm et observons que, puisqu'on connaît le point δ, tout se réduit à déterminer la

limite de la direction de δm, lorsque m tend vers δ. On le fera en menant par m des droites mt, mt_1 respectivement parallèles à $\theta\delta$, $\theta_1\delta$; puis en cherchant la limite du rapport de ces deux lignes, que nous désignerons, la première mt, par p, l'autre mt_1, par p_1.

Soient :

$$y = f(x),$$

$$y_1 = \varphi(x_1),$$

les équations des courbes γ, γ_1 rapportées respectivement aux axes $y\delta x$, $y\delta x_1$, et (x, y), (x_1, y_1) les coordonnées des points L, L_1.

On a, par les triangles semblables

$$\frac{mt}{\delta l} = \frac{St}{S\delta},$$

$$\frac{mt_1}{\delta l_1} = \frac{S_1t_1}{S_1\delta};$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{p}{x} = \frac{St}{S\delta},$$

$$\frac{p_1}{x_1} = \frac{S_1t_1}{S_1\delta}.$$

En divisant membre à membre ces deux dernières relations, on a

$$\frac{p}{p_1} \cdot \frac{x_1}{x} = \frac{St}{S\delta} : \frac{S_1t_1}{S_1\delta}.$$

Lorsqu'on fait tendre α vers δ, les points m, t, t_1 tendent aussi vers δ et les rapports du second membre de la dernière égalité ont pour limite 1, ce qui permet d'écrire la relation

$$\lim \frac{p}{p_1} \cdot \lim \frac{x_1}{x} = 1,$$

ou, ce qui revient au même,

(1) $$\lim \frac{p}{p_1} = \lim \frac{x}{x_1}.$$

D'autre part, d'après le paragraphe 679 on peut écrire :

(2) $$\frac{y}{x^2} = \frac{1}{1.2} f''(0) + \frac{x}{1.2.3} f'''(0) + \ldots\ldots$$

(3) $$\frac{y_1}{x_1^2} = \frac{1}{1.2} \varphi''(0) + \frac{x_1}{1.2.3} \varphi'''(0) + \ldots\ldots$$

a similitude des triangles donne encore

$$\frac{y}{\delta\alpha} = \frac{\theta l}{\theta\delta},$$

$$\frac{y_1}{\delta\alpha} = \frac{\theta_1 l_1}{\theta_1\delta};$$

on en déduit

$$\frac{y}{y_1} = \frac{\theta l}{\theta \delta} : \frac{\theta_1 l_1}{\theta_1 \delta},$$

et, par suite,

$$\lim \frac{y}{y_1} = 1. \tag{4}$$

Or des équations (2) et (3), on tire, en général

$$\lim \frac{y}{x^2} = \frac{f''(0)}{1.2},$$

$$\lim \frac{y_1}{x_1^2} = \frac{\varphi''(0)}{1.2}.$$

D'où l'on déduit

$$\lim \frac{y_1}{y} \cdot \lim \frac{x^2}{x_1^2} = \frac{\varphi''(0)}{f''(0)},$$

ou encore, d'après (4),

$$\lim \frac{x}{x_1} = \pm \sqrt{\frac{\varphi''(0)}{f''(0)}}.$$

En remplaçant dans (1) $\lim \frac{x}{x_1}$ par sa valeur, il vient

$$\lim \frac{p}{p_1} = \pm \sqrt{\frac{\varphi''(0)}{f''(0)}}.$$

Reprenons la formule (4) du paragraphe 679

$$f''(0) = \frac{1}{\rho \cos \beta}$$

dans laquelle β représente l'angle de la normale à la courbe μ (fig. o_2), en m', avec l'axe $m'y$, et observons que cette formule est applicable aux courbes γ, γ_1 (fig. o_3) à la condition toutefois de supposer β nul. Alors, en désignant par ρ et par ρ_1 les rayons de courbure, en δ, des courbes γ, γ_1, nous aurons

$$f''(0) = \frac{1}{\rho}, \qquad \varphi''(0) = \frac{1}{\rho_1},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\varphi''(0)}{f''(0)} = \frac{\rho}{\rho_1},$$

et par suite

$$\lim \frac{p}{p_1} = \pm \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}}.$$

Telle est la formule cherchée; elle montre que le point δ est un point double et elle va servir à construire les tangentes en ce point.

735. Construction des tangentes. — La formule que l'on vient de trouver peut s'écrire

$$\lim \frac{p}{p_1} = \pm \frac{\sqrt{\rho\rho_1}}{\rho_1};$$

le tracé ne saurait maintenant offrir aucune difficulté.

Opérons dans le plan tangent commun P; rien ne sera plus simple ensuite que de projeter sur un plan quelconque la figure que nous allons construire. Soient $S\delta$, $S_1\delta$ les deux génératrices de contact qui se croisent au point double δ (fig. o_9).

Construisons $\sqrt{\rho\rho_1}$, après quoi, par un point a, pris arbitrairement sur $S\delta$, menons une parallèle à la trace du plan de la courbe γ sur celui de la figure et portons sur cette ligne, de part et d'autre de a, deux longueurs ab, ac égales à $\sqrt{\rho\rho_1}$ puis par b, c tirons des parallèles à $S\delta$.

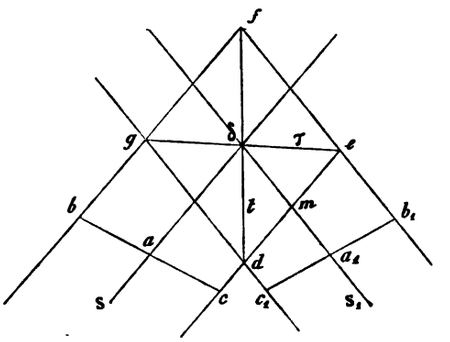


FIG. o_9.

Opérons de même pour l'autre cône, mais en remplaçant cette fois $\sqrt{\rho\rho_1}$ par ρ_1.

Les couples de parallèles ainsi tracées forment un parallélogramme $defg$, dont les diagonales δt, $\delta\tau$ sont les tangentes cherchées.

Pour exécuter ce tracé, nous avons dû recourir aux rayons de courbure de deux bases placées dans des plans perpendiculaires au plan tangent commun; le théorème qui suit permet de le rendre indépendant de l'orientation des bases.

736. Théorème de Meusnier. — (Ce théorème, que nous nous bornerons à considérer dans le seul cas des surfaces coniques, est encore vrai pour une surface quelconque.)

Dans toute surface conique, le rayon de courbure d'une section oblique est la projection du rayon de courbure de la section normale qui a même tangente.

Soient (fig. o_{10}) : Q le plan de base ou d'une section oblique faite sur la surface; c la base d'un cône elle-même ou la section oblique; S le sommet de la surface et Sg sa génératrice de contact avec l'un P de ses plans tangents.

Le plans P, Q se coupent suivant la tangente ab, à la courbe c au point a. Par ab conduisons un plan N perpendiculaire à P et considérons sa section c_1 avec le cône.

Prenons deux points, l'un d sur c, l'autre e sur la tangente ab; tirons la génératrice Sd et désignons par d_1 sa rencontre avec c_1; traçons enfin la droite Se, ainsi que les triangles aed, aed_1. Nous désignerons encore respectivement par (Ω, Ω_1), (R, R_1) les aires de ces triangles et les rayons des cercles circonscrits à ces mêmes triangles.

On aura

$$4\Omega R = ae.ed.ad$$

$$4\Omega_1 R_1 = ae.ed_1.ad_1;$$

en divisant ces égalités membre à membre, on trouve

$$(1) \qquad \frac{\Omega}{\Omega_1}\cdot\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1}\cdot\frac{ad}{ad_1}.$$

La comparaison des pyramides $Sade$, $Saed_1$ donne à son tour, en appelant h et h_1 les distances du point S aux plans Q et N, la relation

$$\frac{\Omega h}{\Omega_1 h_1} = \frac{Sa.Se.Sd}{Sa.Se.Sd_1},$$

ou

$$\frac{\Omega}{\Omega_1} = \frac{h_1}{h}\cdot\frac{Sd}{Sd_1}.$$

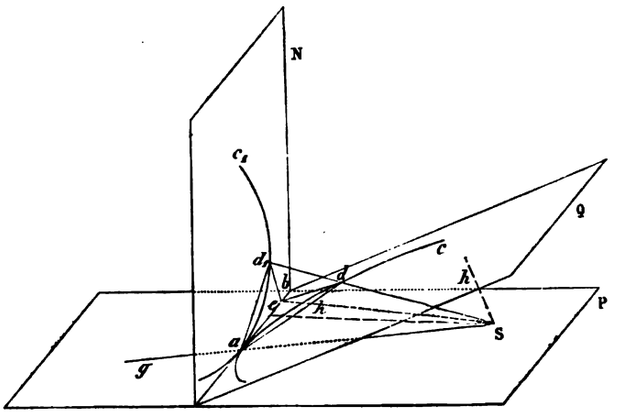


Fig. 010.

En éliminant $\frac{\Omega}{\Omega_1}$ entre cette dernière relation et (1), on trouve

$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1}\cdot\frac{ad}{ad_1}\,\frac{h}{h_1}\,\frac{Sd_1}{Sd};$$

mais d'autre part, on a :

$$\frac{ad}{sd} = \frac{\sin dSa}{\sin daS},$$

$$\frac{Sd_1}{ad_1} = \frac{\sin d_1aS}{\sin d_1Sa};$$

en combinant les trois dernières relations, on trouve

$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1}\,\frac{\sin d_1aSh}{\sin daSh_1};$$

mais, en appelant θ l'angle des plans N, Q, on peut remplacer $\frac{h}{h_1}$ par $\cos\theta$ dans la dernière relation, ce qui donne

$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1}\,\frac{\sin d_1 aS}{\sin daS}.\cos\theta.$$

En faisant d'abord tendre le point e vers a, le rapport $\frac{ed}{ed_1}$ tendra vers $\frac{ad}{ad_1}$, ou vers son égal $\frac{\sin ad_1 d}{\sin add_1}$; si l'on fait ensuite tendre d vers a, les rayons R, R_1 tendront vers les rayons de courbure des courbes C et C_1 que nous désignerons par ρ et par ρ_1, et nous aurons finalement

$$\rho = \rho' \cos\theta,$$

ce qui justifie l'énoncé du théorème; attendu que l'angle des plans Q, N est égal à celui des normales en a aux courbes considérées.

737. Application. — *Deux cylindres reposent tangentiellement sur le plan horizontal et ont pour directrices deux cercles du plan vertical; on demande de construire les tangentes aux points doubles de l'intersection de ces surfaces.*

Soient γ', γ'_1 les cercles des bases situées dans le plan vertical (*fig.* 402, pl. LII), et $a\delta$, $b\delta$ les génératrices par lesquelles les cylindres touchent le plan horizontal. L'intersection a pour point double δ et nous voulons construire les tangentes en ce point.

Nous couperons les deux cylindres par le plan vertical de projection qui est ici perpendiculaire au plan tangent commun.

Les rayons de courbure des deux sections étant connus, on construira, comme on le voit sur la figure, leur moyenne géométrique ac, que l'on rabattra en ad, ae, de part et d'autre du point a, sur la ligne de terre, à l'aide d'une demi-circonférence de cercle.

Par e et d on conduira des parallèles aux projections horizontales des génératrices du petit cylindre.

Pour le grand cylindre, les génératrices du contour apparent en projection horizontale sont les parallèles cherchées.

Les croisements des deux couples de parallèles se font en m_1, m_2, m_3, m_4; les diagonales m_1m_3, m_2m_4 doivent passer par δ et y toucher la courbe d'intersection.

En coupant les deux cylindres par des plans auxiliaires horizontaux, on construit les projections d'autant de points que l'on veut de la courbe d'intersection et l'on peut ensuite tracer cette courbe. Sur l'épure la construction de quelques points remarquables est indiquée. On a représenté le plus petit cylindre supposé solide et entaillé par le grand.

Sur la figure 403 on a représenté le solide commun aux deux cylindres.

La figure 404 représente une feuille formée de la partie du grand cylindre comprise dans le petit.

Enfin, la figure 405 représente la partie de la surface du petit cylindre comprise dans le grand.

738. Théorème. — *Les tangentes au point double de l'intersection de deux surfaces coniques forment un faisceau harmonique avec les deux génératrices de ces surfaces qui se croisent en ce point : les couples de rayons conjugués sont, d'une part, les deux tangentes, de l'autre les deux génératrices.*

Considérons la figure o_9 et le faisceau δ, SS_1t_7. Soit m la rencontre des droites de, δS_1; la droite de prolongée coupe à l'infini δS; comme, d'autre part, m est le milieu de de, on voit que les rayons du

faisceau considéré déterminent sur une même droite des points de section formant une division harmonique (§ **257**), et, par conséquent, que ce faisceau est lui-même harmonique.

Ce théorème est évidemment applicable aux projections des rayons du faisceau (§ **254**) et sert, lorsqu'on connaît l'une des tangentes au point double, à trouver l'autre tangente en ce point, comme on va le voir dans les applications qui suivent.

739. **Première application.** — *Construire les tangentes au point double de l'intersection de deux cônes, d'un cône et d'un cylindre ou de deux cylindres de même base.*

Considérons d'abord le cas de deux cônes (fig. p_1).

La base commune, qui a pour projection horizontale γ, est supposée plane et quelconque,

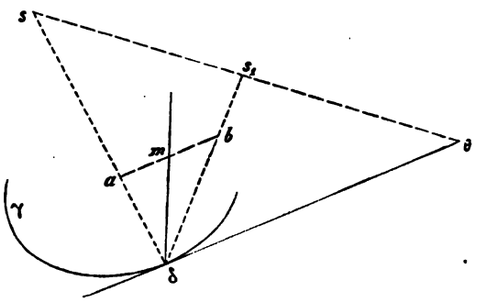


Fig. p_1.

donnons-nous les projections horizontales s, s_1 des sommets, et celle θ du point de rencontre de la droite qui les unit et du plan de la base commune.

Les deux cônes ont un plan tangent commun dont la rencontre avec le plan de la base se projette horizontalement sur la tangente $\theta\delta$, à γ, menée par θ; le point de contact δ de cette tangente est évidemment la projection horizontale du point double. La courbe projetée en γ fait partie de l'intersection, par conséquent $\theta\delta$ est une des tangentes au point double ; traçons les deux droites $s\delta$, $s_1\delta$ et

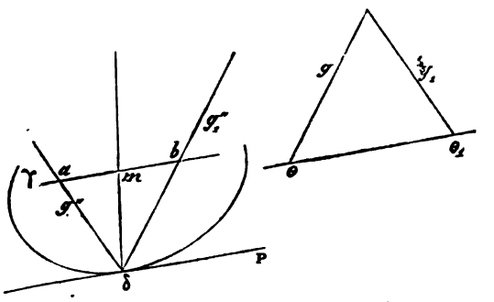


Fig. p_2.

cherchons le conjugué harmonique du rayon $\theta\delta$ par rapport à ces deux droites : on mène une parallèle à $\theta\delta$, dont on prend les points de rencontre a, b avec $s\delta$, $s_1\delta$; on détermine ensuite le milieu m de ab, et alors la droite qui va de δ au point m est la deuxième tangente au point double; effectivement, le point de rencontre de ab avec $\theta\delta$ est à l'infini, et le milieu m de ab est le conjugué harmonique, par rapport à a, b, de ce point à l'infini (§ **257**).

Le problème se résout de même dans le cas d'un cône et d'un cylindre.

Passons au cas de deux cylindres (fig. p_2).

Soient γ, g, g_1 (fig. p_2) les projections horizontales de la base commune, et celles des deux parallèles aux génératrices qui servent à construire la projection horizontale $\theta\theta_1$ de la direction des traces sur le plan de base des plans auxiliaires.

La tangente P à γ, menée dans la direction $\theta\theta_1$, a pour point de contact la projection horizontale δ du point double cherché.

L'une des projections horizontales des tangentes au point double est P; l'autre est le rayon conjugué harmonique de P par rapport aux droites g'', g''_1 menées dans les directions des droites g_1, g, par le point δ. On l'obtient donc très aisément en prenant le milieu m du segment ab d'une parallèle à P comprise entre g'' et g''_1, et en tirant la droite δm.

740. Deuxième application. — Dans la construction des tangentes au point double indiquée au paragraphe **727**, il arrive assez fréquemment que la section du cône auxiliaire par un plan quelconque rencontre en un point dont les projections sont extérieures à l'épure, l'intersection de ce même plan et du plan tangent commun; tandis que le second point de rencontre se trouve projeté à l'intérieur des limites de l'épure.

On trouve alors immédiatement l'une des tangentes cherchées, et l'autre, comme on vient de le démontrer, peut être obtenue à l'aide du tracé donnant le quatrième rayon d'un faisceau harmonique dont trois rayons sont connus.

741. Points doubles au sommet d'une surface conique. — Au sommet d'un cône la surface offre une infinité de plans tangents, il en résulte que la conclusion du paragraphe **734** peut être en défaut lorsque ce sommet est un point double de l'intersection du cône considéré avec une deuxième surface. Il faut évidemment, pour que le sommet soit un point double de l'intersection, qu'il se trouve placé sur la deuxième surface; cette position particulière du cône donne lieu au théorème qui suit :

742. Théorème. - - *Lorsque le sommet d'une surface conique du second degré est placé sur une autre*

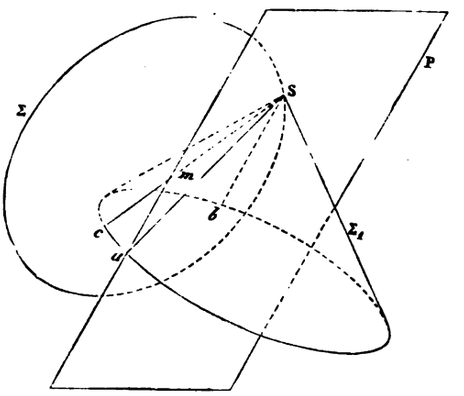


Fig. p_2.

surface quelconque, la ligne d'intersection des deux surfaces peut offrir : un point double, un point de rebroussement ou un point isolé, suivant que le plan tangent mené à la surface quelconque par le sommet du cône coupe, ou touche la surface conique, ou ne la rencontre qu'en un seul point.

Soient : Σ, Σ_1 la surface quelconque (fig. p_2) et le cône donnés; S le sommet de ce dernier, que

l'on suppose placé sur Σ, P le plan tangent en S à la surface Σ, et Sa, Sb les génératrices par lesquelles le plan P coupe la surface conique Σ_1.

Considérons une génératrice Sc mobile et voisine de Sa; elle coupe Σ en S et en un autre point m, et, lorsque Sc se meut pour venir se confondre avec Sa, m tend vers le point S et se confond avec lui à la limite; il en résulte que Sa est tangente à la section; il en est de même de la droite Sb. L'intersection a donc en S un point double, puisqu'elle a en ce point deux tangentes.

Lorsque le plan P est tangent aux deux surfaces Σ, Σ_1, les deux tangentes Sa, Sb se confondent, et l'une des nappes du cône ne rencontre plus la surface Σ (nous admettons que cette surface n'est pas traversée par son plan tangent).

La courbe est donc formée de deux arcs qui touchent une même droite au point S sans le franchir et, qui, par conséquent, présente en S un point de rebroussement.

Enfin, lorsque la plan P ne coupe le cône qu'au sommet S, aucun des points de rencontre des génératrices du cône et de Σ ne vient se confondre avec le sommet du cône, par suite ce sommet est un point isolé de la courbe commune aux deux surfaces Σ, Σ_1.

DES POINTS DOUBLES EN PROJECTION

743. Soient : P, S le plan et le centre de projection; C, c la courbe d'intersection de deux surfaces et sa projection.

Nous savons (§ **378**) qu'un point double en projection provient de deux points M_1, M_2 placés sur une même projetante, et dont, par suite, les projections m_1, m_2 se confondent.

Les points doubles de l'intersection de deux surfaces s'obtiennent très simplement à l'aide des

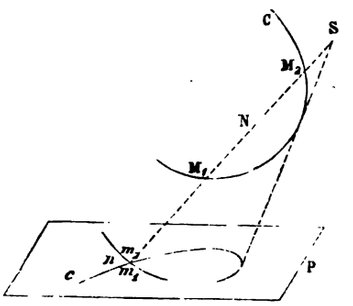


Fig. p_1.

plans tangents communs; c'est la construction des tangentes en ces points qui se fait avec difficulté. Par contre, rien n'est plus simple, lorsqu'on connaît les points doubles en projection, que de construire les tangentes correspondantes, puisqu'il suffit d'opérer comme à l'ordinaire; mais la construction de ces points est fort difficile, et, sauf pour certains cas particuliers, on doit se contenter de les déterminer par le tracé même de la courbe.

Lorsque les surfaces sont du second degré, nous allons faire voir qu'il est facile de construire, ce qui donne plus de précision au tracé, la droite de jonction des points doubles en projection sur un plan.

744. Détermination de la droite de jonction des points doubles en projection de la ourbe commune à deux surfaces du second ordre. — Plaçons sur la figure p_1 le conjugué

harmonique N du point S par rapport aux points M_1, M_2; ce point se projette manifestement au point double cherché. Il appartient aux deux lieux géométriques, que l'on obtient en prenant le conjugué harmonique de S par rapport aux points en lesquels chacune des surfaces données rencontre des divergentes issues de ce même point S.

Or, pour le cas qui nous occupe, ces lieux ne sont rien autre chose que les plans polaires de S par rapport aux surfaces considérées. En sorte que les points doubles en projection doivent appartenir à la projection de la droite de rencontre des plans polaires, dans les deux surfaces données, du centre de projection.

Pour le *cas usuel* de projections orthogonales, le point N se place au milieu du segment M_1M_2; les plans polaires sont alors les plans diamétraux conjugués des cordes perpendiculaires au plan de projection considéré.

Il est évident que ces plans diamétraux ne sont autres que les plans des lignes des contours apparents des surfaces relatifs au plan de projection dont on s'occupe.

745. Remarque. — *Dans les cas de deux surfaces du second degré, la courbe d'intersection a, au plus, deux points doubles en projection sur chacun des plans coordonnés.* — Effectivement, les points doubles en projection sont sur une droite qui ne peut rencontrer la projection de la ligne commune aux deux surfaces en plus de quatre points, puisque cette projection est du quatrième degré; or, en chacun des points doubles placés sur une droite il y a deux points de rencontre de la droite et de la courbe; il ne peut donc y avoir plus de deux points doubles en projection sur un même plan.

746. Première application. — *Construire la droite des points doubles en projection de l'intersection de deux cônes, dont les bases sont dans un même plan* (*fig.* 386, pl. XLVIII).

En examinant l'épure, on voit tout de suite que la droite des points doubles n'est utile que sur le plan horizontal.

L'un des plans diamétraux passe par le sommet s, s'; il a en outre pour trace horizontale la polaire a_1a_{11} du point s par rapport à γ, puisqu'il contient les génératrices du contour apparent horizontal, et que ces lignes ont leurs traces de même nom aux points a_1, a_{11}.

Pareillement, on voit que l'autre plan diamétral passe par σ, σ' et qu'il a pour trace horizontale b_2, d.

Reste à trouver la projection horizontale de l'intersection des deux plans diamétraux. La rencontre h de leurs traces horizontales est un point de cette intersection.

Pour en trouver un autre on pourrait les assimiler à des cônes (§ 709, 2e cas); mais ici nous savons que deux des droites du contour apparent horizontal se coupent en un point dont la projection horizontale se fait en m_{11}. La droite unissant h, m_{11} est donc la droite des points doubles en projection horizontale; il faut, en conséquence, qu'elle aille passer par le point double de la projection horizontale de l'intersection.

747. Deuxième application. — *Construire la droite des points doubles en projection de l'intersection de deux cônes, dont les bases sont dans des plans différents* (*fig.* 392, pl. XLIX).

L'épure sur laquelle le tracé doit être effectué réunit deux sortes de points doubles : ceux m_1, m_7, qui sont les projections des points doubles de l'espace, et deux autres points, qui sont les points doubles de la projection.

Les premiers ont été complètement déterminés: leurs tangentes se construiraient très simplement puisque les cônes auxiliaires ordinairement employés se réduisent ici à deux plans, dont les rencontres avec les plans tangents sont faciles à trouver.

Arrivons à la construction de la droite qui passe par les points doubles en projection.

Les rencontres des plans diamétraux avec ceux des bases respectives ont pour projections horizontales a_2a_8, b_9b_3, et ces plans diamétraux passent respectivement par les points dont s, σ sont les projections.

La projection horizontale de l'intersection de ces plans a été obtenue en les assimilant à des cônes (§ 709, 2e cas), que l'on a coupés par deux des plans auxiliaires ayant déjà servi à construire des points de la courbe commune aux cône donnés. L'un de ces plans passe par les points projetés horizontalement en θ, θ_1, α_3, et détermine sur les plans diamétraux deux droites projetées sg, σf.

Le point de croisement k de ces droites est un point de la droite cherchée.

Pareillement, en ayant recours au plan auxiliaire limite dont les traces sur les plans de base se projettent en $\theta\alpha_7$, $\theta_1\alpha_7$, on a trouvé les droites sa_8, σb_6 et leur point de rencontre l. La droite qui unit k, l est donc celle que nous cherchions.

748. Troisième application. — *Trouver la droite des points doubles de l'intersection d'un cylindre et d'un cône* (*fig.* 395, pl. L).

Opérons cette fois sur le plan vertical.

Pour le cylindre, la trace horizontale du plan diamétral conjugué des cordes perpendiculaires au plan vertical est $\tau_2\tau_3$; ce plan, qui est parallèle aux génératrices du cylindre, est maintenant complètement déterminé.

Pour le cône, le plan diamétral passe par le sommet s, s' et a pour trace horizontale la droite h_3h_4.

La rencontre des plans diamétraux a pour trace horizontale h, h'; on en trouve un second point en considérant le premier des plans diamétraux comme un cylindre à directrice rectiligne, l'autre comme un cône dont la directrice est encore rectiligne. Pour trouver un nouveau point de la rencontre de ces surfaces, nous adopterons comme plan sécant auxiliaire le plan limite dont la trace horizontale est P_1, lequel détermine : sur le premier plan diamétral la parallèle aux génératrices du cylindre qui a pour trace horizontale t, t' cette trace parallèle se projette verticalement en $t'k'$; sur le second plan diamétral une droite dont la trace horizontale est t_1, t'_1 et qui se trouve projetée verticalement en t'_1s'.

Le point de croisement l' de ces projections verticales est à la droite cherchée; cette droite est donc celle qui unit l', h'.

On opérerait de même sur le plan horizontal.

749. Quatrième application. — *Construire la droite des points doubles en projection de l'intersection de deux cylindres, dont les bases sont dans un même plan* (*fig.* 397, pl. LI).

Pour le plan horizontal on doit employer deux plans diamétraux qui, respectivement parallèles aux génératrices des cylindres, ont pour traces horizontales Q, Q_1.

Le point de croisement k de ces traces horizontales est un point de passage de la droite cherchée; un second point l de cette droite a été trouvé par le secours du plan limite dont la trace horizontale est P_2. La droite kl doit donc passer par les points doubles de la projection horizontale de la ligne commune aux deux cylindres.

En ce qui concerne les points doubles de la projection verticale, on remarque que les droites R, R_1 sont les traces horizontales des plans diamétraux. Puisque ces droites sont parallèles entre elles et à la ligne de terre, l'intersection des plans diamétraux sera aussi parallèle à cette ligne. Il ne s'agit plus que de trouver un point de la projection verticale de cette intersection.

A cette fin, on a coupé les deux plans, assimilés à des cylindres, par le plan auxiliaire dont la trace

est P_4; les traces des deux intersections sont (t, t'), (t_1, t'_1); on mène par les points t', t'_1 des parallèles aux projections verticales des génératrices des cylindres qui correspondent à chacun d'eux et on trouve, par le croisement f' de ces parallèles, le point qu'il fallait construire. La parallèle à la ligne de terre menée par f' est la droite qui doit passer par les points doubles de la projection verticale.

750. Remarque. — En général, pour construire complètement les points doubles en projection, on pourra couper les deux surfaces par le plan contenant la droite des points doubles et perpendiculaires au plan de projection considéré; on obtiendra sur chacune d'elles une ligne, et les rencontres de ces lignes auront pour projections les points cherchés.

On n'effectue ce tracé que dans certains cas particuliers, pour lesquels les deux lignes d'intersection sont faciles à construire; comme exemple nous donnerons bientôt la construction complète des points doubles des projections de l'intersection d'un cône du second degré et d'une sphère ayant pour centre le sommet du cône.

Quelquefois on peut arriver à la détermination des points doubles en projection de l'intersection de deux surfaces du second ordre, par le secours d'un hyperboloïde à une nappe passant par l'intersection des deux surfaces et ayant une de ses génératrices rectilignes perpendiculaire au plan de projection considéré. Dans ces conditions l'hyperboloïde offre une génératrice du système opposé, également perpendiculaire à ce même plan de projection; les points en lesquels ces génératrices percent les surfaces données ont, sur le plan considéré, leurs projections confondues aux pieds des perpendiculaires; d'où il résulte que ces deux pieds sont alors précisément les points cherchés.

THÉORÈMES SERVANT A FACILITER LA CONSTRUCTION DES PROJECTIONS DE L'INTERSECTION DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ

751. Théorème I. — *L'intersection de deux surfaces du second degré est du quatrième degré.* — Un plan quelconque rencontre les deux surfaces suivant des courbes du second degré, et ces courbes ont quatre points réels ou imaginaires communs. Il en résulte que tout plan sécant coupe la ligne commune aux deux surfaces en quatre points; cette ligne est donc bien du quatrième degré.

752. Théorème II. — *Lorsque deux surfaces du second ordre se coupent suivant une première courbe plane, leur intersection se complète par une seconde courbe plane.*

Ce deuxième théorème est une conséquence immédiate du premier.

753. Corollaire. — *Lorsque deux surfaces coniques du second ordre sont tangentes l'une à l'autre suivant une génératrice commune, leur intersection se compose d'une droite double et d'une conique.*

La génératrice de contact doit être considérée comme formant deux génératrices communes aux surfaces et confondues; c'est une droite double qui fait partie de l'intersection. Cette droite est donc une conique commune aux deux surfaces, qui devront avoir en commun une deuxième conique, d'après le théorème qui vient d'être démontré.

754. Théorème III. — (Voy. § **475.**)

755. Corollaire I. — (§ **476.**)

756. Corollaire II. — (§ **477.**)

757. Corollaire III. — *Quand deux surfaces du second degré se touchent suivant une ligne, cette ligne est une conique.*

En prenant, dans une position arbitraire, deux points sur la ligne de contact, les deux surfaces se

toucheront en ces points et devront par suite se couper (§ 475) suivant deux coniques passant par les deux points pris arbitrairement sur la ligne commune; ces coniques devront donc se confondre avec cette ligne, qui sera, par conséquent, elle-même une conique.

758. Théorème IV. — *Lorsque deux surfaces du second degré ont un plan de symétrie commun, leur intersection se projette sur tout plan parallèle à ce plan de symétrie suivant une conique.*

Imaginons trois axes, dont deux, ox, oy, seraient dans le plan de symétrie, et le troisième oz perpendiculaire à ce plan; les équations des deux surfaces seront privées des termes du premier degré en z, et pourront s'écrire :

$$z^2 = f(x, y),$$

$$z^2 = \varphi(x, y);$$

dans lesquelles $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont du second degré.

De ces équations on déduit

$$f(x, y) = \varphi(x, y),$$

qui est précisément l'équation de la projection de la courbe d'intersection sur le plan de symétrie. Cette projection, qui ne diffère en rien de celle de la même courbe sur un plan parallèle au plan de symétrie, est donc une conique.

759. Remarque. — *Lorsque les conditions des deux derniers théorèmes sont simultanément vérifiées, la projection de la courbe d'intersection sur tout plan parallèle au plan de symétrie est généralement un système de deux droites.*

En effet, les deux points de contact des plans tangents communs ne sont pas en général dans le plan de symétrie, il s'ensuit que la corde commune aux deux courbes planes dont se compose l'intersection est perpendiculaire au plan de symétrie, ces deux courbes ont donc des projections rectilignes sur le plan de symétrie ou sur un plan parallèle.

Si, exceptionnellement, il arrivait que les contacts des plans tangents fussent dans les plans de symétrie, les deux coniques seraient alors symétriquement placées par rapport à ce plan et auraient une projection commune non rectiligne.

760. Théorème V. — *L'intersection de deux surfaces homothétiques du second degré est un système de deux coniques dont une se trouve à l'infini.*

Quand deux surfaces du second degré sont homothétiques, leurs équations ont mêmes termes du second degré, elles sont donc de la forme :

$$S = 0,$$

$$S + \lambda P = 0,$$

dans lesquelles S est une fonction du second degré, P une fonction linéaire et λ une constante.

La courbe d'intersection devra par suite se trouver sur la surface

$$\lambda P = 0,$$

qui représente un plan à distance fini, et le plan à l'infini, ce qui établit la propriété énoncée.

761. Théorème VI. — *Les sections faites par un même plan sur deux surfaces du second ordre circonscrites l'une à l'autre, sont des coniques doublement tangentes.*

Il est en effet évident que les coniques se toucheront aux points réels ou imaginaires de rencontre du plan sécant et de la courbe de contact.

762. Corollaire. — *Si le plan sécant touche l'une des surfaces circonscrites en un de ses ombilics, il coupera l'autre suivant une conique ayant pour foyer l'ombilic* (1), *et pour directrice correspondante la droite de rencontre du plan sécant et de celui de la courbe de contact.*

En effet, l'ombilic est alors un cercle de rayon nul bitangent à la conique d'intersection, et dont les points de contact sont précisément sur la droite de rencontre du plan sécant avec le plan de la courbe commune aux deux surfaces; donc, d'après ce qui a été dit au paragraphe **462**, le corollaire est démontré.

763. Remarque. — Si la surface tangente au plan est une sphère, le théorème est vrai quel que soit le point de contact, puisque tous les points d'une sphère sont des ombilics.

764. Théorème VII. — *Lorsque deux cônes du second degré ont un plan tangent commun et que leurs génératrices de contact sont parallèles, le cylindre conduit, dans la direction de ces génératrices de contact, par la courbe d'intersection des deux cônes, est aussi du second degré.*

Effectivement, le point de rencontre des génératrices de contact est un point double de l'intersection des cônes; par suite un nouveau cône, ayant pour sommet ce point double et pour directrice la courbe d'intersection, est aussi du second degré (§ **729**); or, ce cône dont le sommet est à l'infini sur les génératrices de contact, est un cylindre parallèle à ces génératrices; le théorème se trouve ainsi établi.

765. Remarque. — La démonstration qui vient d'être donnée est applicable à deux hyperboloïdes à une nappe.

DÉTERMINATION DES BRANCHES INFINIES DE LA COURBE COMMUNE A DEUX SURFACES CONIQUES OU CYLINDRIQUES

766. Les branches infinies sont dues à deux causes qu'il importe de distinguer :

Première cause. — Les deux surfaces ont des génératrices rectilignes parallèles.

Deuxième cause. — Une des surfaces a des génératrices rejetées à l'infini et rencontrant l'autre surface.

Dans le cas de deux surfaces cylindriques, la première cause ne se produit que pour des cylindres parallèles; alors l'intersection est formée d'un certain nombre de génératrices et ne présente rien qui puisse nous intéresser dans l'étude des branches infinies dont nous nous occupons.

Pour le cas de deux cônes, c'est, au contraire, la seconde cause qu'il convient de laisser de côté; effectivement les génératrices d'un cône ne sont jamais entièrement à l'infini, puisqu'elles passent par l'un des sommets.

Enfin, dans les cas d'un cône et d'un cylindre, les deux causes signalées doivent être examinées.

D'après cela, nous distinguerons trois cas : 1° celui de deux cônes; 2° celui d'un cône et d'un cylindre, et 3° celui de deux cylindres.

767. Premier cas. — *Les deux surfaces sont deux cônes.* — Afin de vérifier l'existence des géné-

---

(1) On nomme *ombilics* d'une surface du second ordre les points en lesquels la surface est coupée par les diamètres conjugués de ses plans cycliques.

ratrices parallèles, on transporte parallèlement à lui-même l'un des deux cônes au sommet de l'autre (§ **528**, 3°), et on examine si les cônes de même sommet ont des génératrices communes.

Soient (fig. p_5) : S, S_1 les sommets des cônes donnés; Σ, Σ_1, leurs bases respectives sur un même plan P, et Σ_2 la base sur le même plan du cône dont S est le sommet après qu'on l'a transporté parallèlement à lui-même au sommet du second cône donné.

La base Σ_2 peut offrir par rapport à Σ_1 diverses positions qu'il convient d'examiner successivement.

1° Σ_1, Σ_2 *n'ont aucun point commun.*

Dans ce cas les cônes donnés n'ont point de génératrices parallèles et leur intersection ne s'étend pas à l'infini.

2° Σ_1, Σ_2, comme dans la figure p_5, *se coupe à distance finie.*

Soit t le point de rencontre.

Tirons la génératrice S_1t et ramenons-la sur sa position primitive en menant tout simplement par S une parallèle $S\tau$ à S_1t. Le point M_∞ sur les droites S_1t, $S\tau$ fait partie de l'intersection des cônes donnés; celle-ci a donc un point à l'infini.

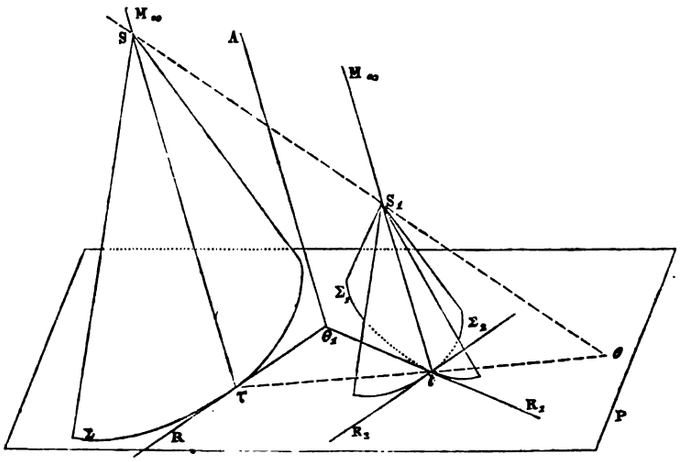


FIG. p_5.

La droite SS_1, d'après le paragraphe précité, a pour trace sur P le centre de similitude des courbes Σ, Σ_2; ce centre appartient nécessairement aussi à la droite τt, il est donc au point de rencontre θ de ces droites.

Le tracé ordinaire donne dans le plan $S\theta\tau$ le point de l'intersection M_∞ ; il donnerait également des points de cette ligne très éloignés dans des plans voisins et situés de part et d'autre du premier, sauf pourtant dans le cas où les cônes toucheraient le plan $S\theta\tau$ et se trouveraient aussi placés de part et d'autre de ce plan. On en conclut que l'intersection a, généralement, des branches infinies dans la direction tS_1.

Cherchons l'asymptote correspondante, c'est-à-dire la tangente à la courbe commune au point M_∞ : les plans tangents en ce point ont pour traces sur le plan des bases des tangentes R, R_1, menées, respectivement, à Σ, Σ_1, par les points τ, t; la rencontre θ_1 de ces traces est un point de la tangente ; M_∞ en est un autre; donc la parallèle A à S_1t, menée par θ_1 est l'asymptote cherchée.

Menons la tangente R_2 à Σ_2 par le point t; cette droite doit être parallèle à R; par conséquent, R, R

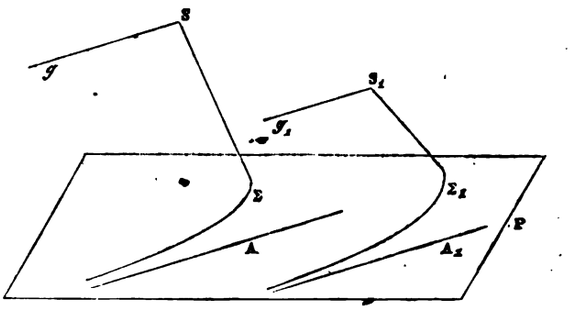
ne sont pas parallèles; ce qui fait voir que la section a toujours, dans le cas considéré, une asymptote; *elle est donc hyperbolique.*

Lorsque les cônes sont du second degré, Σ_1, Σ_2 se coupent en quatre points réels, ou en deux points réels et deux imaginaires, ou enfin en quatre points imaginaires.

Il y a donc dans ce cas ou quatre asymptotes ou deux seulement.

Lorsque les quatre points sont imaginaires, on se trouve reporté au cas précédemment examiné, et la courbe n'a pas de branches infinies.

3° Σ_1, Σ_2 *se coupent à l'infini.*



10.

Les cônes ont alors deux génératrices Sg, S_1g_1 (fig. p_6) parallèles entre elles et au plan P. Les plans tangents conduits par ces deux droites coupent, en général, P suivant les asymptotes A, A_1 des courbes Σ, Σ_1, et se coupent entre eux suivant une parallèle à Sg, qui est l'asymptote correspondante de la courbe commune aux deux surfaces.

4° Σ_1, Σ_2 *se touchent.*

Les plans tangents suivant les génératrices parallèles $S\tau$, S_1t (fig. p_7) ont, sur P, des traces R, R_1

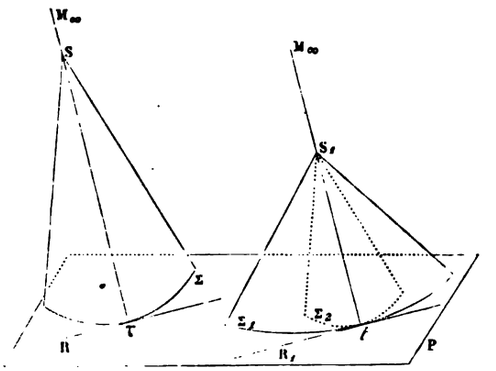


Fig. p_7.

parallèles et sont eux-mêmes parallèles; l'asymptote est entièrement à l'infini dans la direction de ces plans parallèles; la courbe est donc *parabolique.*

Si les surfaces sont du second ordre, Σ_2 coupera Σ_1 en deux points confondus en t et en deux

autres points réels ou imaginaires; on trouvera donc, en plus de l'asymptote à l'infini, deux asymptotes réelles ou imaginaires.

S'il arrivait que les plans SrR, S_1tR_1 se confondissent, la commune intersection aurait alors un point double à l'infini M_∞ et les asymptotes s'obtiendraient par la rencontre du plan tangent commun avec le cylindre auxiliaire passant par l'intersection et dont les génératrices seraient parallèles à S_1t (§ 727). En supposant que les surfaces soient du second degré, ce cylindre serait lui-même du second degré (§ 729), et la courbe commune aurait deux asymptotes parallèles entre elles.

Enfin, quand les courbes Σ_1, Σ_2 sont du second degré et bitangentes, l'intersection a deux asymptotes à l'infini dans la direction des plans tangents communs aux deux cônes de même sommet.

5° Σ_1, Σ_2 *sont osculatrices;* ce qui veut dire que les courbes ont trois points communs confondus.

Les génératrices parallèles des cônes primitifs sont triples dans ce cas; l'asymptote se trouve, comme précédemment, tout entière à l'infini et coupe la courbe en trois points confondus, elle traverse donc la courbe, qui offre, par suite, un point d'inflexion à l'infini.

Quand les courbes Σ_1, Σ_2 ont quatre points confondus, l'intersection a son asymptote à l'infini et celle-ci ne traverse plus la courbe, etc.

6° *Les courbes* Σ_1, Σ_2 *se confondent.*

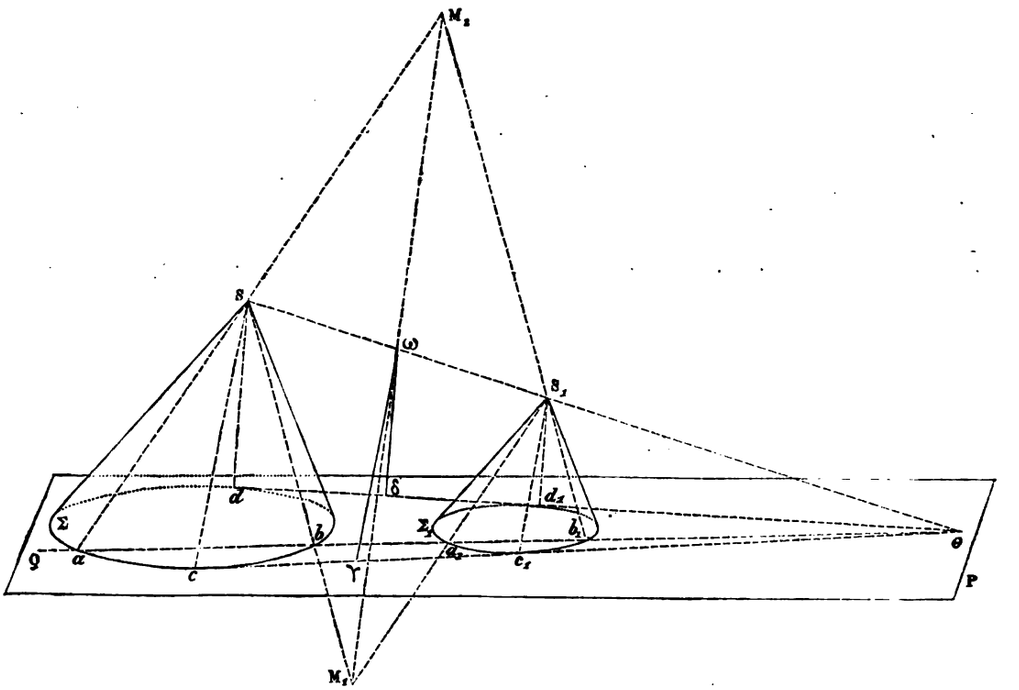


FIG. p_2.

Les deux cônes donnés sont alors homothétiques; toutes leurs génératrices se trouvent deux à deux parallèles et l'une des branches de la courbe commune qui est entièrement rejetée à l'infini; reste à examiner s'il existe une branche de cette intersection qui soit placée à distance finie et si cette branche s'étend indéfiniment.

Considérons (fig. p_8) : les cônes donnés ; leurs bases Σ, Σ_1 sur un même plan P; la droite des sommets SS_1; sa trace θ sur le plan P, ainsi que celle Q sur le même plan d'un plan auxiliaire conduit par la droite SS_1. Le point θ est le centre de similitude des courbes Σ, Σ_1 (§ 363, 3°) et les génératrices Sa, Sb, Sa_1, Sb_1 que le plan auxiliaire détermine sur les deux cônes sont deux à deux parallèles. Il en résulte, dans le cas figuré, quatre points de la courbe d'intersection, dont deux sont à l'infini et les autres en M_1, M_2.

Pour les plans tangents communs aux cônes, ces derniers points seront eux-mêmes à l'infini ; par conséquent, la branche qui sera figurée sur l'épure devra s'étendre à l'infini en général.

Les points à l'infini de cette branche sont les points de contact des plans tangents communs aux deux cônes, ce sont donc les points doubles de l'intersection. La recherche des asymptotes se fera donc comme on vient de le dire (4°); jusqu'ici, bien que l'on ait figuré des bases du second degré, la nature de ces bases est indifférente dans le raisonnement.

Supposons maintenant que les cônes soient du second degré, alors en vertu du théorème démontré au paragraphe 759, l'intersection sera un système de deux coniques dont une se trouvera à l'infini. Au surplus, le cône auxiliaire qui sert à trouver les tangentes au point double, se réduit à deux plans dont l'un est le plan à l'infini. D'autre part, les cônes donnés ont deux plans tangents communs et, par suite, deux points doubles ; il s'ensuit que la courbe a quatre asymptotes dont deux à l'infini ; les deux autres sont relatives à la ligne que l'on tracera sur l'épure ; cette ligne sera donc une hyperbole.

Rien n'est alors plus simple que d'obtenir les asymptotes. En premier lieu, on mène les plans tangents communs et leurs génératrices de contact (Sc, S_1c_1) (Sd, S_1d_1) ; ces deux couples de droites parallèles déterminent les directions asymptotiques. En second lieu, on observe que la figure $SM_1S_1M_2$ est un parallélogramme dont le centre ω se maintient fixe, lorsque le plan auxiliaire varie; ce centre ω est donc toujours au milieu des cordes telles que M_1M_2, c'est donc aussi le centre de l'intersection. On obtient donc les asymptotes en conduisant par ω des droites ωy, $\omega \delta$ respectivement parallèles aux directions asymptotiques Sc, Sd.

768. Deuxième cas. — *Les deux surfaces sont un cône et un cylindre.*

Première cause. — *Les deux surfaces ont des génératrices parallèles.*

Pour que la courbe d'intersection ait des branches infinies dues seulement à la première cause, il faut, nous l'avons déjà dit, que la base du cylindre n'ait pas de branches infinies ; quant à celle du cône, elle peut avoir des branches infinies ou être limitée, indifféremment.

Démontrons d'abord ce théorème :

Les asymptotes d'une courbe tracée sur un cylindre, dont la base n'a pas de branches infinies, sont nécessairement des génératrices du cylindre. — Effectivement, en projetant obliquement, dans la direction des génératrices du cylindre et sur le plan de la base, la courbe considérée, on devra trouver la base elle-même qui est limitée par hypothèse; ce qui nécessite que l'asymptote de la courbe se projette en un point de la projection de cette courbe, autrement dit, que cette asymptote soit une génératrice du cylindre.

Arrivons maintenant à la question principale, et, une fois pour toutes, faisons observer que, dans les épures relatives à la recherche des branches infinies en général, il ne sera question que de projections horizontales. Soient donc (fig. p_9) : s la projection du sommet du cône ; α, α_1 les traces respectives sur le plan de projection du cylindre et du cône ; $s\theta$ la projection de la génératrice du cône parallèle aux génératrices du cylindre et θ la trace sur le plan de projection de cette génératrice.

Les plans auxiliaires que l'on emploie à l'ordinaire pour construire des points de l'intersection, ont pour traces les rayons d'un faisceau dont θ est le sommet. Effectuons le tracé pour l'un d'eux, celui qui a pour trace P_1, par exemple; nous trouvons: sur le cône, deux génératrices, dont les projections sont $s\theta$, sf_1; sur le cylindre, deux autres génératrices, projetées en c_1g_1, $d_1\gamma_1$, et sur la projection de la courbe d'intersection quatre points, deux n_1, m_1 à distance finie et les deux autres constamment à l'infini. La courbe tracée sur l'épure est le lieu des points tels que m_1, n_1, et c'est pour cette courbe qu'il faut vérifier l'existence des branches infinies. Les points m_1, n_1 seront à l'infini lorsque la droite sf_1 deviendra parallèle à la direction des projections des génératrices du

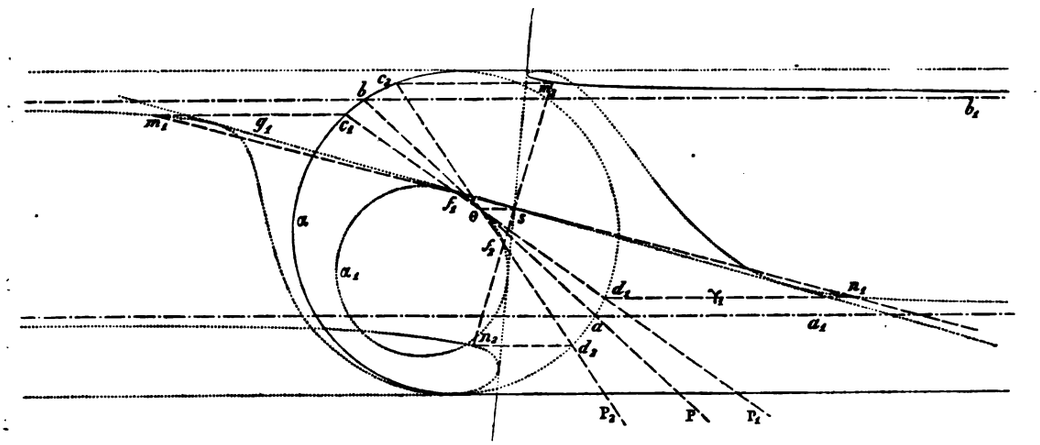


Fig. p_9.

cylindre, ou, ce qui revient au même, lorsqu'elle se confondra avec $s\theta$. Alors la trace du plan auxiliaire sera la tangente P à la base α_1, menée par θ.

Le plan auxiliaire dont P est la trace est le plan limite pour le cône; ce plan peut ne pas rencontrer le cylindre, ou le couper, ou le toucher.

1° *Le plan limite pour le cône ne rencontre pas le cylindre.* — La courbe tracée sur l'épure est alors limitée.

2° *Le plan limite pour le cône coupe le cylindre.* — C'est le cas représenté sur la figure p_9. Les génératrices suivant lesquelles se fait la rencontre du cylindre avec ce plan limite pour le cône se projettent en aa_1, bb_1, et, d'après les propriétés des surfaces limites, elles doivent toucher la projection de la courbe d'intersection des surfaces à l'infini; mais, comme l'intersection est formée d'une partie tracée sur l'épure et d'une autre rejetée à l'infini, on pourrait craindre que le théorème général ne fût en défaut dans ce cas. Il n'en est rien; effectivement, suivons la courbe lieu des points m_1, n_1 dans le voisinage des droites aa_1, bb_1. Pour cet effet, considérons deux plans auxiliaires, dont les traces P_1, P_2, placées de part et d'autre de P, s'inclinent peu sur cette droite.

Les points de l'intersection qui se trouvent placés à distance finie et dans ces plans, sont n_1, m_1, n_2, m_2. Lorsqu'on fait tendre P_1 et P_2 vers P, on voit facilement que les points m_1, m_2, placés de part et d'autre de bb_1, tendent vers le point à l'infini de cette droite; de même pour n_1, n_2. Il en faut conclure que aa_1, bb_1 sont des asymptotes de la courbe étudiée.

Dans l'exemple choisi, les bases sont du second degré; mais il est tout à fait évident, pourvu que

les points θ, a et b ne soient ni des points d'inflexion, ni des points singuliers, que la forme de la base est indifférente.

Il peut se faire que la génératrice de contact du plan limite pour le cône appartienne au cylindre ; alors, la figure p_{10}, sur laquelle on a conservé les notations et les constructions de l'épure précédente,

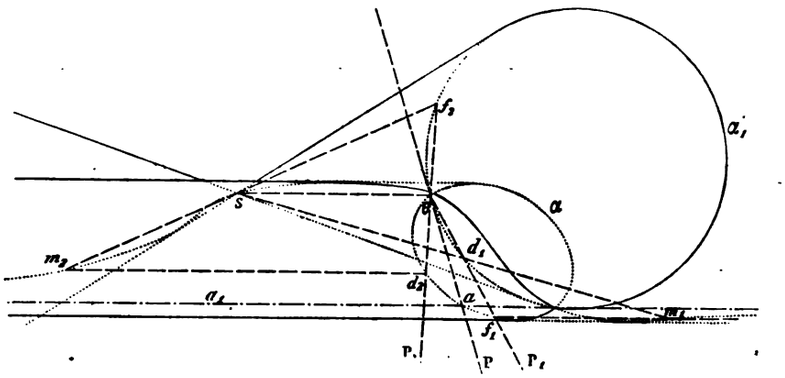


Fig. p_{10}.

montre que la courbe n'a qu'une asymptote, qui n'est autre que la génératrice suivant laquelle le plan limite pour le cône coupe le cylindre et dont aa_1 est la projection.

3° *Le plan limite pour le cône se confond avec l'un des plans limites pour le cylindre.*

Supposons d'abord que les génératrices de contact du plan limite commun soient distinctes, et

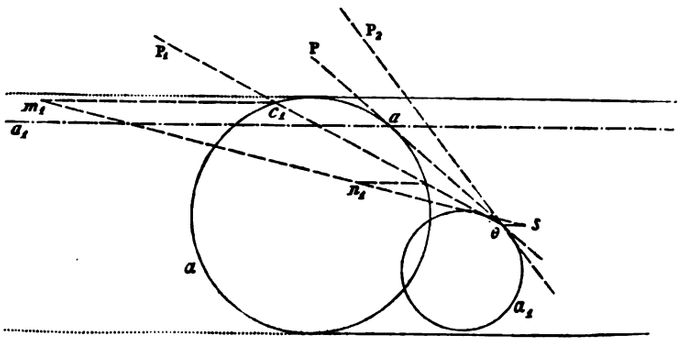


Fig. q_1.

reprenons la figure précédente avec ses notations (fig. q_1) en modifiant seulement la position de la base α que nous prendrons cette fois tangente à P.

Des deux plans voisins du plan limite commun, celui qui a pour trace P_1 donne seul des points à distance finie de l'intersection ; les projections de ces points m_1, n_1 sont voisins de la projection aa_1 de la génératrice par laquelle le plan limite commun touche le cylindre. Lorsque P_1 tend vers P, les points m_1, n_1 tendent vers le point à l'infini de la droite aa_1 : cette droite est donc une asymptote.

Nous avons supposé que les génératrices de contact étaient distinctes, supposons-les maintenant confondues. Les bases α, α_1 sont alors tangentes en θ (fig. q_2).

Arrivons à la construction de la droite qui passe par les points doubles en projection.

Les rencontres des plans diamétraux avec ceux des bases respectives ont pour projections horizontales a_2a_8, b_9b_3, et ces plans diamétraux passent respectivement par les points dont s, σ sont les projections.

La projection horizontale de l'intersection de ces plans a été obtenue en les assimilant à des cônes (§ 709, 2e cas), que l'on a coupés par deux des plans auxiliaires ayant déjà servi à construire des points de la courbe commune aux cône donnés. L'un de ces plans passe par les points projetés horizontalement en θ, θ_1, α_3, et détermine sur les plans diamétraux deux droites projetées sg, σf.

Le point de croisement k de ces droites est un point de la droite cherchée.

Pareillement, en ayant recours au plan auxiliaire limite dont les traces sur les plans de base se projettent en $\theta\alpha_7$, $\theta_1\alpha_7$, on a trouvé les droites sa_8, σb_6 et leur point de rencontre l. La droite qui unit k, l est donc celle que nous cherchions.

748. Troisième application. — *Trouver la droite des points doubles de l'intersection d'un cylindre et d'un cône* (*fig.* 395, pl. L).

Opérons cette fois sur le plan vertical.

Pour le cylindre, la trace horizontale du plan diamétral conjugué des cordes perpendiculaires au plan vertical est $\tau_2\tau_3$; ce plan, qui est parallèle aux génératrices du cylindre, est maintenant complètement déterminé.

Pour le cône, le plan diamétral passe par le sommet s, s' et a pour trace horizontale la droite h_3h_4.

La rencontre des plans diamétraux a pour trace horizontale h, h'; on en trouve un second point en considérant le premier des plans diamétraux comme un cylindre à directrice rectiligne, l'autre comme un cône dont la directrice est encore rectiligne. Pour trouver un nouveau point de la rencontre de ces surfaces, nous adopterons comme plan sécant auxiliaire le plan limite dont la trace horizontale est P_1, lequel détermine : sur le premier plan diamétral la parallèle aux génératrices du cylindre qui a pour trace horizontale t, t' cette trace parallèle se projette verticalement en $t'k'$; sur le second plan diamétral une droite dont la trace horizontale est t_1, t'_1 et qui se trouve projetée verticalement en t'_1s'.

Le point de croisement l' de ces projections verticales est à la droite cherchée; cette droite est donc celle qui unit l', h'.

On opérerait de même sur le plan horizontal.

749. Quatrième application. — *Construire la droite des points doubles en projection de l'intersection de deux cylindres, dont les bases sont dans un même plan* (*fig.* 397, pl. LI).

Pour le plan horizontal on doit employer deux plans diamétraux qui, respectivement parallèles aux génératrices des cylindres, ont pour traces horizontales Q, Q_1.

Le point de croisement k de ces traces horizontales est un point de passage de la droite cherchée; un second point l de cette droite a été trouvé par le secours du plan limite dont la trace horizontale est P_2. La droite kl doit donc passer par les points doubles de la projection horizontale de la ligne commune aux deux cylindres.

En ce qui concerne les points doubles de la projection verticale, on remarque que les droites R, R_1 sont les traces horizontales des plans diamétraux. Puisque ces droites sont parallèles entre elles et à la ligne de terre, l'intersection des plans diamétraux sera aussi parallèle à cette ligne. Il ne s'agit plus que de trouver un point de la projection verticale de cette intersection.

A cette fin, on a coupé les deux plans, assimilés à des cylindres, par le plan auxiliaire dont la trace

est P_4; les traces des deux intersections sont (t, t'), (t_1, t'_1); on mène par les points t', t'_1 des parallèles aux projections verticales des génératrices des cylindres qui correspondent à chacun d'eux et on trouve, par le croisement f' de ces parallèles, le point qu'il fallait construire. La parallèle à la ligne de terre menée par f' est la droite qui doit passer par les points doubles de la projection verticale.

750. Remarque. — En général, pour construire complètement les points doubles en projection, on pourra couper les deux surfaces par le plan contenant la droite des points doubles et perpendiculaires au plan de projection considéré; on obtiendra sur chacune d'elles une ligne, et les rencontres de ces lignes auront pour projections les points cherchés.

On n'effectue ce tracé que dans certains cas particuliers, pour lesquels les deux lignes d'intersection sont faciles à construire; comme exemple nous donnerons bientôt la construction complète des points doubles des projections de l'intersection d'un cône du second degré et d'une sphère ayant pour centre le sommet du cône.

Quelquefois on peut arriver à la détermination des points doubles en projection de l'intersection de deux surfaces du second ordre, par le secours d'un hyperboloïde à une nappe passant par l'intersection des deux surfaces et ayant une de ses génératrices rectilignes perpendiculaire au plan de projection considéré. Dans ces conditions l'hyperboloïde offre une génératrice du système opposé, également perpendiculaire à ce même plan de projection; les points en lesquels ces génératrices percent les surfaces données ont, sur le plan considéré, leurs projections confondues aux pieds des perpendiculaires; d'où il résulte que ces deux pieds sont alors précisément les points cherchés.

THÉORÈMES SERVANT A FACILITER LA CONSTRUCTION DES PROJECTIONS DE L'INTERSECTION DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ

751. Théorème I. — *L'intersection de deux surfaces du second degré est du quatrième degré.* — Un plan quelconque rencontre les deux surfaces suivant des courbes du second degré, et ces courbes ont quatre points réels ou imaginaires communs. Il en résulte que tout plan sécant coupe la ligne commune aux deux surfaces en quatre points; cette ligne est donc bien du quatrième degré.

752. Théorème II. — *Lorsque deux surfaces du second ordre se coupent suivant une première courbe plane, leur intersection se complète par une seconde courbe plane.*

Ce deuxième théorème est une conséquence immédiate du premier.

753. Corollaire. — *Lorsque deux surfaces coniques du second ordre sont tangentes l'une à l'autre suivant une génératrice commune, leur intersection se compose d'une droite double et d'une conique.*

La génératrice de contact doit être considérée comme formant deux génératrices communes aux surfaces et confondues; c'est une droite double qui fait partie de l'intersection. Cette droite est donc une conique commune aux deux surfaces, qui devront avoir en commun une deuxième conique, d'après le théorème qui vient d'être démontré.

754. Théorème III. — (Voy. § **475.**)

755. Corollaire I. — (§ **476.**)

756. Corollaire II. — (§ **477.**)

757. Corollaire III. — *Quand deux surfaces du second degré se touchent suivant une ligne, cette ligne est une conique.*

En prenant, dans une position arbitraire, deux points sur la ligne de contact, les deux surfaces se

Lorsque les surfaces sont du second degré, si la base du cylindre est une hyperbole, la courbe commune aux deux surfaces aura, en général, quatre asymptotes, deux à deux placées dans un même plan; si la base est une parabole, la courbe commune n'aura aucune asymptote à distance finie.

2° *L'un des plans asymptotiques est parallèle à un plan limite pour le cône.*

En conservant aux notations du cas précédent leur signification, on obtient pour le présent cas la figure q_4, dans laquelle θP_1 est cette fois parallèle à AA_1.

Le plan conduit par le sommet du cône et par P_1 contient la génératrice projetée en st, laquelle détermine les points à l'infini de la section; ce plan rencontre donc le plan asymptotique suivant l'asymptote à la ligne commune; en conséquence, cette asymptote est située à l'infini.

La branche correspondante de la ligne commune est donc *parabolique*.

3° *L'un des plans asymptotiques se confond avec un plan limite pour le cône.*

Ce plan asymptotique est alors tangent aux deux surfaces dont l'intersection a, conséquemment,

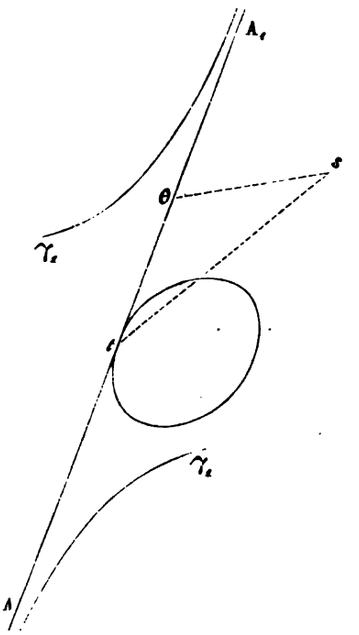


Fig. q_4.

un point double à l'infini sur la génératrice st de contact du cône et du plan asymptotique (fig. q_5).

Les asymptotes à la courbe commune aux deux surfaces ne sont donc rien autre chose que les tangentes au point double.

770. Remarque. — Lorsque les deux causes pour lesquelles des points de la section se trouvent rejetés à l'infini se produisent simultanément dans la même épure, il faut se garder de croire que l'on peut appliquer, sans examen, les tracés donnant les asymptotes dans chacune d'elles. En effet, soient (fig. q_6) : γ la base du cône; $s\theta$ la projection de la génératrice de ce cône parallèle à celle du cylindre et γ_1 la trace du cylindre.

Les projections des asymptotes provenant des points à l'infini sur les génératrices parallèles s'obtiennent en $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, comme à l'ordinaire.

En ce qui concerne les autres asymptotes, nous voyons qu'un plan parallèle au plan asymptotique

mené par $s\theta$ a pour trace la droite θP, et coupe le cône suivant deux génératrices, projetées en $s\theta$, st, dont les points de rencontre avec le cylindre se trouvent à l'infini. La première de ces génératrices du cône donne à l'infini des points de l'intersection sur toutes les génératrices du cylindre, et parmi ces points ceux qui se trouvent projetés sur $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$ interviennent seuls dans notre tracé. Il en résulte que le point à l'infini placé sur la génératrice du cône projeté en $s\theta$ et sur celle du

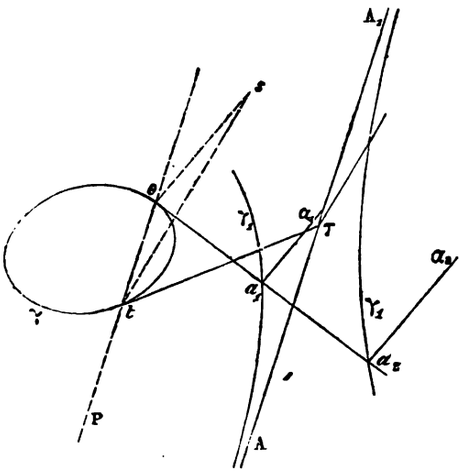


Fig. q_6.

cylindre qui se trouve tout entière à l'infini ne fait nullement partie de la courbe tracée sur l'épure; il n'y a donc pas lieu de considérer comme étant une asymptote la rencontre du plan tangent $S\theta a_1$, avec le plan asymptotique, dont la trace est AA_1.

771. Troisième cas. — *Les deux surfaces sont deux cylindres.*

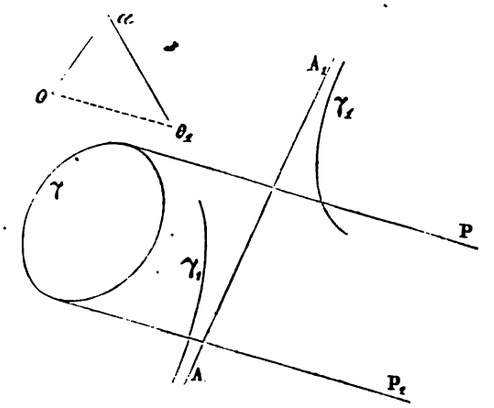


Fig. q_7.

Les points à l'infini sont dus à la deuxième cause, il faut donc que l'une des bases au moins ait des branches infinies; il y a donc lieu de distinguer les cas suivants:

1° *L'une des bases est limitée, l'autre a des branches infinies.*

Soient: γ, γ_1 les deux bases; $a\theta$, $a\theta_1$ les projections de parallèles aux deux génératrices des

cylindres menées par un même point, et $\theta\theta_1$ la trace du plan conduit par ces deux parallèles. Les plans limites ont des traces P, P_1 tangentes à γ. Il s'ensuit que les plans coupant γ_1 à l'infini se trouvent le plus souvent en dehors de ces plans limites; l'intersection n'a donc pas, en général, des branches infinies.

Pour qu'elle en eût, il faudrait que le plan asymptotique fût parallèle aux plans sécants auxiliaires et compris entre les plans limites pour l'autre cylindre. Dans ce cas, le plan asymptotique serait un plan limite pour le cylindre à base infinie et, comme surface limite, couperait le second cylindre suivant les asymptotes de la ligne commune aux deux surfaces données.

2° *Les bases des deux cylindres sont à branches infinies.*

Les plans sécants auxiliaires, conduits dans la direction des deux génératrices des cylindres, peuvent occuper relativement aux plans asymptotiques diverses positions; ce qui conduit à adopter pour le présent cas les trois subdivisions qui suivent :

1° *Les plans sécants auxiliaires ne sont pas parallèles aux plans asymptotiques ;*

2° *Les plans sécants auxiliaires sont parallèles à l'un des plans asymptotiques ;*

3° *Les deux cylindres ont deux plans asymptotiques parallèles entre eux.*

1° *Les plans sécants auxiliaires ne sont pas parallèles aux plans asymptotiques.*

Soient : γ, γ_1 (fig. q_8) les bases supposées placées sur le plan horizontal; aa_1, $\alpha\alpha_1$ leurs asymptotes

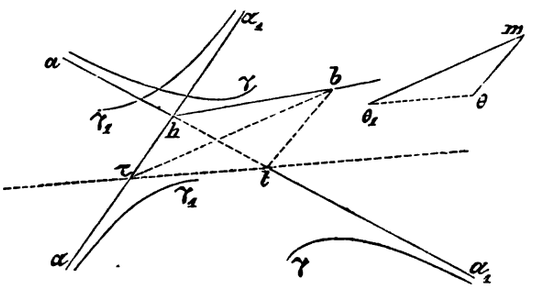


FIG. q_8.

respectives; $m\theta$, $m\theta_1$ les projections de deux parallèles aux génératrices des cylindres menées par un même point de l'espace, et $\theta\theta_1$ la trace du plan de ces droites.

Par suite de l'hypothèse, $\theta\theta_1$ n'est parallèle à aucune des asymptotes de la base. Lorsque le plan sécant mené parallèlement aux génératrices des cylindres s'éloignera à l'infini, il contiendra une génératrice de chacune de ces surfaces, et le point de rencontre de ces deux lignes sera un point à l'infini de l'intersection.

Cherchons l'asymptote, c'est-à-dire la droite suivant laquelle les plans asymptotiques aux cylindres se rencontrent : ces plans se trouvent déterminés puisqu'ils passent respectivement par les asymptotes des bases et se dirigent parallèlement aux génératrices des cylindres correspondants.

Le point de croisement h des asymptotes aa_1, $\alpha\alpha_1$ est la trace de l'asymptote. Pour trouver un second point de passage de cette ligne, on considère les plans asymptotiques comme des cylindres et on les coupe par un plan auxiliaire parallèle aux génératrices des cylindres donnés; soit $t\tau$ la trace horizontale de ce plan, les traces des intersections sont les points t, τ; le croisement b des droites menées de ces points parallèlement aux projections des génératrices respectives des cylindres fait connaître la projection du second point cherché.

Il reste alors à tracer la ligne hb, qui est la projection de l'asymptote demandée. Quand les cylindres sont du second degré, on trouve ainsi quatre asymptotes.

En terminant, nous ferons observer que l'intersection est en général hyperbolique et qu'elle sera parabolique dans le seul cas où l'une au moins des bases sera également parabolique.

2° *Les plans sécants auxiliaires sont parallèles à l'un des plans asymptotiques.*

Soient : γ, γ_1 les traces des cylindres (fig. q_9) ; aa_1, $\alpha\alpha_1$ leurs asymptotes ; hg la projection de l'une des génératrices du cylindre dont γ est la trace.

Pour nous conformer à l'hypothèse, nous supposerons que le plan asymptotique qui a pour trace $\alpha\alpha_1$ se trouve être parallèle aux génératrices du cylindre dont la base est γ. Ce plan donne alors immédiatement la direction des plans auxiliaires ; c'est donc un plan limite pour le cylindre de base γ_1.

Ce plan limite contient des points de l'intersection placés à l'infini sur les génératrices suivant lesquelles il rencontre le cylindre de base γ ; ces génératrices ont pour traces horizontales les points

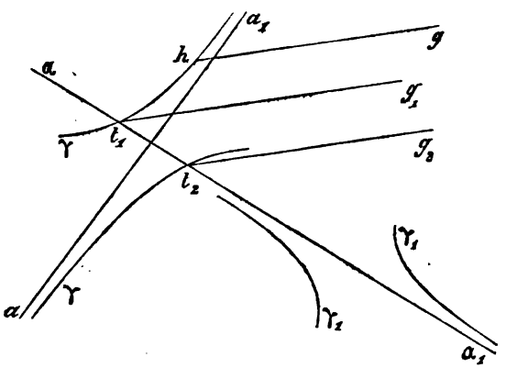


Fig. q_9.

de croisement t_1, t_2 de γ avec $\alpha\alpha_1$ et se projettent suivant les parallèles t_1g_1, t_2g_2, menées de t_1, t_2 dans la direction hg.

D'après la propriété des surfaces limites, ces génératrices sont tangentes à l'infini à la courbe, et, comme celle-ci a des points dans les plans parallèles au plan limite considéré et voisin de ce plan, les deux génératrices projetées en t_1g_1, t_2g_2 sont les asymptotes de la projection de l'intersection ; les branches correspondantes de cette intersection ont donc la forme hyperbolique.

3° *Les deux cylindres ont des plans asymptotiques parallèles entre eux.*

Ces plans sont alors parallèles aux deux génératrices des cylindres et déterminent immédiatement la direction des plans sécants auxiliaires.

Au surplus, ils sont des plans limites pour le cylindre correspondant et coupent, par suite, l'autre cylindre suivant des génératrices qui sont des asymptotes de la courbe étudiée ; ces droites, en effet, d'après la propriété des surfaces limites, touchent à l'infini la section, et les plans sécants auxiliaires qui les avoisinent contiennent des points de l'intersection.

Lorsque les surfaces sont du second degré, on trouve ainsi deux asymptotes ; la rencontre des plans asymptotiques non parallèles en donne une troisième ; quant à la quatrième, elle se trouve à l'infini dans la direction des plans asymptotiques parallèles.

L'intersection est alors composée d'une droite à l'infini et d'une courbe du troisième degré. En effet, la rencontre d'un plan ayant une orientation arbitraire avec les cylindres donnés, est un système

de deux hyperboles, dont deux asymptotes sont parallèles et qui se coupent, par suite, en quatre points dont un est constamment à l'infini; la courbe à distance finie, qui n'est coupée qu'en trois points par un plan quelconque, est donc du troisième degré.

Dans le cas où deux cylindres du second degré ont des plans asymptotiques deux à deux parallèles, les intersections de ces plans sont aussi parallèles, autrement dit, les génératrices des deux surfaces sont parallèles. L'intersection est alors formée de quatre génératrices, dont deux à l'infini.

Finalement, on peut supposer que les cylindres ont un plan asymptotique commun.

Les points contenus dans ce plan sont alors des points doubles à l'infini et les asymptotes sont les tangentes en ces points doubles. Si les cylindres sont du second degré, celui des plans sécants auxiliaires qui se trouve à l'infini détermine un point de la section, et l'asymptote correspondante s'obtient par la rencontre des plans asymptotiques non communs.

En outre, le plan asymptotique commun contient un point double dont les tangentes sont aussi des asymptotes de l'intersection. Ces tangentes se construisent aisément, car l'intersection est une courbe à l'infini et une courbe plane à distance finie. Effectivement, un plan, orienté d'une façon arbitraire, coupe les deux cylindres suivant un système de deux hyperboles ayant une asymptote commune, et qui, par suite, se coupent en quatre points dont deux sont à l'infini.

On voit par là qu'un plan sécant quelconque coupe la courbe commune en deux points à distance finie; ce qui prouve bien qu'elle est du second degré.

On obtiendra alors celle des tangentes au point double qui est utile à l'épure, c'est-à-dire la seconde asymptote de l'hyperbole commune aux deux cylindres, en construisant la rencontre du plan de cette courbe avec le plan asymptotique commun.

INTERSECTION DE DEUX SURFACES DE RÉVOLUTION DONT LES AXES SONT DANS LE MÊME PLAN

772. Problème I. — *Construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont concourants.*

On peut toujours faire en sorte que l'un z, z' des axes soit perpendiculaire au plan horizontal (*fig.* 406, pl. LIII) et que le plan des axes soit parallèle au plan vertical. Dans ces conditions, la projection horizontale du deuxième axe est une parallèle pq à la ligne de terre passant par z et sa projection verticale une droite $p'q'$ quelconque.

Nous adopterons pour exemple un ellipsoïde allongé et un paraboloïde, et, afin d'achever de déterminer ces surfaces, nous donnerons encore les projections verticales γ', γ_1' de leurs méridiens de front.

773. Construction d'un point quelconque de l'intersection. — Le choix de la surface auxiliaire se base sur les remarques qui suivent :

Remarque I. — *Deux surfaces de révolution autour d'un même axe ne peuvent se couper que suivant des parallèles.*

Remarque II. — *Une sphère peut être considérée commune de révolution autour de chacun de ses diamètres.*

De ces remarques il résulte que les surfaces auxiliaires doivent être des sphères concentriques, dont le centre commun est le point o', z en lequel les axes des surfaces concourent.

Traçons du point o' comme centre avec un rayon arbitraire, une circonférence de cercle β' que nous adopterons pour contour apparent en projection verticale de l'une des sphères auxiliaires.

Les rencontres de cette sphère avec les surfaces données sont des cercles dont les projections verticales se font sur les cordes respectivement perpendiculaires aux axes et communes aux courbes (β', γ') (β', γ'_1), ces cordes $a'b'$, $c'd'$, se croisent au point m' qui appartient à la projection verticale de deux points de l'intersection.

Pour obtenir les projections horizontales correspondantes, on trace la projection de même nom du parallèle de l'ellipsoïde qui contient les points cherchés et on prend ses rencontres m_1, m_2 avec une ligne de rappel menée par m'.

774. Construction de la tangente. — Méthode Binet (§ 573). — La tangente au point m_1, m' est la perpendiculaire au plan des deux normales menées, par ce même point, aux surfaces données. Construisons les points de rencontre des normales avec les axes respectifs, c'est-à-dire les sommets des faisceaux des normales relatifs aux parallèles qui se croisent en m_1, m'. La normale à γ', menée par a', croise z' en ω', qui est la projection verticale de l'un de ces sommets, la projection horizontale correspondante se fait au pied z de l'axe de l'ellipsoïde.

La projection verticale de l'autre sommet se trouve au point de rencontre ω'_1 de $p'q'$ avec la normale à la parabole γ'_1 en c'; une ligne de rappel menée par ω'_1 rencontre pq au point ω_1 qui est la projection horizontale de ce sommet.

Les deux normales ont donc pour projections $(m'\omega', m_1z)$, $(m'\omega'_1, m_1\omega)$.

Le plan des deux axes est parallèle au plan vertical et coupe celui des normales suivant la droite de jonction des points ω', ω'_1; en traçant cette droite, puis en lui menant par m' une perpendiculaire, on a la projection verticale $m't'$ de la tangente cherchée. Coupons maintenant le plan des normales par un plan horizontal conduit par ω', z, nous trouverons successivement : sur la normale à l'ellipsoïde précisément le point ω', z; sur l'autre normale ω'_2, ω_2, et enfin sur le plan des normales, l'horizontale $\omega'\omega'_2$, $z\omega_2$.

La perpendiculaire à $z\omega_2$ menée par m_1, est donc la projection horizontale m_1t de la tangente cherchée.

775. Points sur le contour apparent horizontal de l'ellipsoïde. — Pour construire ces points (n', n_1), (n', n_2) on a agi, comme pour un point quelconque (§ 773), sur la sphère auxiliaire conduite par l'équateur : cette sphère a pour contour apparent vertical le cercle β'_1 de centre o' qui passe par les extrémités f', f'_1 de la projection verticale de cet équateur.

776. Points le plus haut et le plus bas. — Sphères limites. — On construit ces points en opérant, comme à l'ordinaire, sur la sphère inscrite dans la surface dont l'axe est oblique par rapport au plan horizontal. Le contour apparent vertical de cette sphère est un cercle β'_2 de centre o' qui a pour rayon l'une $o'g'$ des normales, non confondues avec $p'q'$, que l'on peut mener à la parabole γ'_1 par le point o' : en lui appliquant le procédé habituel, on trouve les points (i', i_1) (i', i_2), (j', j_1) (j', j_2). Mais cette sphère est une surface limite, la courbe d'intersection doit donc être tangente aux cercles communs à la sphère et à l'ellipsoïde.

Il en résulte que les tangentes en i', j' sont précisément les horizontales $h'l'$, $h'_1l'_1$, et, par conséquent, que les quatre points correspondants sont ceux qui se trouvent les plus élevés ou les plus bas sur l'intersection.

Au surplus, les projections horizontales des parallèles de l'ellipsoïde qui passent par ces points doivent être tangentes à la projection de même nom de la ligne commune aux surfaces données.

On a omis d'employer la sphère limite qui toucherait l'ellipsoïde, parce qu'elle n'atteindrait pas le paraboloïde.

On voit sans peine sur la figure que les sphères auxiliaires donnant des points réels de l'intersection sont comprises entre celle dont β'_2 est le contour apparent en projection verticale, et celle dont le contour en projection sur le même plan passerait par le point r'_1 : r'_4 est celui des points de croisement des courbes γ', γ'_1 qui se trouve le plus éloigné de la projection verticale o' du centre commun aux sphères auxiliaires.

777. Points des contours apparents en projection verticale. — Points de rebroussement de seconde espèce de la projection de même nom. — Les points des contours apparents en projection verticale se trouvent évidemment à la rencontre r'_1, r'_2, r'_3, r'_4 des courbes γ', γ'_1.

Ils correspondent à quatre points de l'espace, dont les projections horizontales sont r_1, r_2, r_3, r_4 et en lesquels les tangentes à l'intersection se trouvent être perpendiculaires au plan vertical; on en conclut que les points de rencontre des courbes γ', γ'_1 sont des rebroussements de la projection verticale de l'intersection ; de plus, à cause de la symétrie de la figure par rapport au plan des deux axes, le rebroussement est de seconde espèce (§ 387).

778. Tangentes aux points de rebroussement de la projection verticale. — On le sait, les considérations géométriques sur lesquelles repose le tracé de la tangente à la projection verticale de la courbe d'intersection ne sont pas applicables aux points de rebroussement, puisque les projections de la tangente se réduisent à un point ; malgré cela, la loi de continuité permet d'affirmer que la construction de *Binet* est encore applicable en ces points. Ainsi pour r'_1, on mène les normales à l'ellipse et à la parabole en ce point, on trace ensuite la droite qui unit les rencontres ω'_3, ω'_4 de ces normales avec les axes respectifs, et l'on conduit par r'_1, une perpendiculaire à $\omega'_3\omega'_4$; cette perpendiculaire $r'_1t'_1$ est la tangente cherchée.

On agirait de même pour les trois autres points de rebroussement.

779. Droite des points doubles en projection horizontale. — C'est la rencontre des plans des lignes des contours apparents en projection horizontale.

Pour l'ellipsoïde ce plan n'est autre que celui de l'équateur ; c'est-à-dire le plan horizontal dont $f'f'_1$ est la trace verticale.

Pour le paraboloïde, c'est le plan diamétral conjugué aux cordes verticales. Ce plan est perpendiculaire au plan vertical, et sa trace sur ce plan de projection n'est autre que la parallèle $p'_1q'_1$ à $p'q'$, menée par le milieu d'une corde verticale de la parabole γ'_1.

La rencontre des plans diamétraux se projette verticalement au point de croisement δ' des droites $f'f'_1$, $p'_1q'_1$; la perpendiculaire à la ligne de terre menée par δ' fait connaître la droite $\delta_1\delta_2$ des points doubles en projection horizontale.

Dans notre épure, cette droite ne rencontre pas la projection sur le plan horizontal de la courbe d'intersection, il n'y a donc pas de points doubles en projection sur ce plan.

780. Points du contour apparent horizontal du paraboloïde. — Le contour apparent relatif au plan horizontal du paraboloïde est la courbe de rencontre de cette surface avec un plan perpendiculaire au plan vertical conduit par $p'_1q'_1$; c'est une parabole égale à la parabole donnée, qui a pour sommet de sa projection horizontale p_2. Cette projection horizontale n'est utile, comme on va le voir au paragraphe suivant, que par deux petits arcs que l'on tracera facilement.

Les rencontres s', u' de la projection verticale de l'intersection avec $p'_1q'_1$ sont les projections verticales des points placés sur le contour apparent relatif au plan horizontal du paraboloïde ; on

les a pris directement sur l'épure, puis, en les considérant comme étant les projections verticales de points placés sur l'ellipsoïde, on a pu construire les projections horizontales s_1, s_2, u_1, u_2 correspondantes.

781. Visibilité. — Pour la régler on a enlevé, de l'ellipsoïde supposé solide, la partie comprise dans le paraboloïde.

Le contour apparent en projection horizontale du paraboloïde est seulement utile, on l'a déjà dit, par deux de ses arcs s_1u_1, s_2u_2, lesquels représentent l'un des contours apparents de l'empreinte que le paraboloïde laisse dans l'ellipsoïde.

On voit donc que l'on eût pu se borner à ne tracer sur l'épure que les deux arcs s_1u_1, s_2u_2 de la parabole $u_1s_4p_2s_2u_2$.

782. Asymptote de la projection verticale. — La projection verticale est une conique (§ 757); toute parallèle à l'une de ses asymptotes la coupe donc en un point à distance finie et en un second point placé à l'infini; lorsque cette parallèle devient l'une des asymptotes, les deux points de rencontre sont à l'infini et réciproquement.

Les droites qui ne rencontrent la courbe qu'en un point sont évidemment les traces verticales des plans déterminant, sur les deux surfaces de révolution, des coniques ayant deux points communs à l'infini, c'est-à-dire deux coniques homothétiques. Quand ces droites se confondent avec l'une des asymptotes cherchées, les coniques correspondantes sont concentriques.

Pour trouver les directions asymptotiques, il suffit donc de construire les traces verticales de deux plans perpendiculaires à celui des deux axes et coupant les deux surfaces données suivant des courbes homothétiques.

A cette fin, déterminons un ellipsoïde de centre o', z, homothétique à celui qu'on nous donne et circonscrit à la même sphère que le paraboloïde. Le contour apparent vertical de cet ellipsoïde auxiliaire a pour petit axe le diamètre horizontal $1'2'$ du cercle β'_2; en traçant la droite $f'3'$ et sa parallèle $1'4'$, on trouve, par le croisement $4'$ de cette dernière avec z', le troisième sommet de l'ellipse cherchée. Il est alors bien aisé de mettre en place son quatrième sommet $5'$ et de tracer cette courbe auxiliaire.

La sphère inscrite dans le paraboloïde touche cette surface par le parallèle projeté en $k'g'$, et cette même sphère touche l'ellipsoïde auxiliaire par un second parallèle projeté en $1'2'$. Les deux points de rencontre de ces parallèles se projettent verticalement en $10'$, et les projections de même nom des courbes communes au paraboloïde et à l'ellipsoïde auxiliaire sont les cordes $6'7'$, $8'9'$, qui doivent passer par le point $10'$. Les plans conduits par ces cordes et perpendiculaires au plan vertical de projection donnent évidemment les seules directions des sections planes homothétiques que l'on peut obtenir sur les surfaces considérées à l'aide de plans perpendiculaires à celui des axes de rotation. Les traces verticales de ces plans donnent à leur tour celles des asymptotes de la projection verticale de la section; cette courbe est donc, dans le cas figuré sur notre épure, une hyperbole.

Arrivons maintenant à la détermination des asymptotes elles-mêmes, qui sont les traces verticales des plans dont les intersections avec les surfaces données sont homothétiques et concentriques. Cherchons celui de ces plans qui est parallèle à $9'8'$; le lieu des centres des sections faites sur l'ellipsoïde donné dans une direction perpendiculaire au plan vertical et parallèle à $9'8'$ est le diamètre $11'12'$, de l'ellipse γ', conjugué des cordes parallèles à $9'8'$.

Pour le paraboloïde, le lieu des centres est le diamètre $13'14'$ conjugué des cordes parallèles à la même direction. Ces diamètres se coupent en $15'$ qui est un point de l'asymptote cherchée,

laquelle s'obtient alors immédiatement en conduisant par ce point la parallèle $\alpha'_2\alpha'_3$ à 8′ 9′.

On a construit pareillement l'autre asymptote $\alpha'\alpha'_1$. Le centre de l'hyperbole est évidemment au milieu 16′ de la droite $i'j'$; par suite, si l'épure est exactement faite, les deux asymptotes devront passer par ce point.

783. Discussion. — Parmi les surfaces de révolution et du second degré, nous trouvons : deux ellipsoïdes, l'un allongé, l'autre aplati ; deux hyperboloïdes, l'un à une nappe, l'autre à deux nappes; un paraboloïde, la sphère, le cône et le cylindre.

Les sections faites dans les deux hyperboloïdes et dans leurs cônes asymptotes, par un même plan, sont homothétiques; il sera donc avantageux, pour la recherche des branches infinies, comme pour celle des asymptotes, de substituer aux hyperboloïdes leurs cônes asymptotes; dans le cours de cette discussion, nous ne parlerons donc plus des hyperboloïdes. Rappelons, une fois pour toutes, que les axes des surfaces et les plans sécants qui servent à déterminer les directions asymptotiques seront toujours supposés placés, les premiers, dans un plan parallèle au plan vertical de projection, les derniers, dans une direction perpendiculaire à ce plan de projection. Ajoutons encore que l'on pourra, lorsque les surfaces auront un centre, faire passer les plans sécants successivement par chacun de ces centres, afin d'étudier plus facilement la forme des sections qu'ils déterminent sur chacune des surfaces.

Tout ceci entendu, abordons la discussion en démontrant que lorsque les deux surfaces peuvent être considérées comme ayant leurs axes parallèles, ou bien que l'une d'elles, et rien qu'une, est un ellipsoïde aplati, la courbe n'a pas d'asymptote.

Considérons d'abord le cas de deux surfaces ayant leurs axes parallèles, ou encore celui où l'une d'elles est une sphère, auquel cas on peut évidemment considérer les deux surfaces comme ayant leurs axes parallèles.

Les plans perpendiculaires aux deux axes déterminent sur ces surfaces des sections homothétiques, et leurs traces verticales déterminent à leur tour des directions asymptotiques de la projection verticale de la courbe commune aux surfaces données. Sur chacune de ces traces on trouve un point à distance finie de la projection de l'intersection, et ce point ne peut, vu que les deux cercles qui servent à le construire ne sont jamais concentriques, s'éloigner à l'infini que si la trace du plan s'éloigne elle-même à l'infini. La projection verticale de la courbe a donc une asymptote à l'infini, c'est, par suite, une parabole dont l'axe est parallèle à la direction asymptotique et, par conséquent, perpendiculaire aux projections verticales des axes de rotation.

Si, en outre, les deux courbes méridiennes sont homothétiques, les deux surfaces et leurs sections par un même plan le seront aussi, par suite la projection verticale de la courbe étudiée aura, dans toutes les directions, un point à l'infini ; elle sera donc formée de deux droites, l'une à distance finie, l'autre à l'infini.

Arrivons maintenant au cas où une seule des surfaces est un ellipsoïde aplati.

En considérant un plan sécant perpendiculaire au plan vertical mené par le centre de l'ellipsoïde aplati, on trouvera sur cette surface une ellipse ayant son petit axe parallèle au plan vertical. Par contre, quelle que soit l'autre surface, le petit axe de la section sera perpendiculaire au plan vertical. Effectivement, pour l'ellipsoïde allongé, cette propriété est presque évidente et le devient tout à fait en transportant, sans changer sa direction, le plan sécant au centre de la surface.

Pour le paraboloïde, on le voit immédiatement en se rappelant que la projection des sections elliptiques de cette surface sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation est circulaire.

Pour le cône comme pour le cylindre, l'axe focal de la section appartient au plan de front qui contient l'axe de rotation, puisque le plan sécant est supposé perpendiculaire à ce plan de front. Il n'y a donc dans le présent cas aucun plan perpendiculaire au plan vertical coupant les deux surfaces suivant des courbes homothétiques, il s'ensuit que la projection verticale de leur courbe commune est une ellipse.

Passons aux autres combinaisons que l'on peut faire avec les surfaces.

Supposons d'abord que les deux surfaces soient des ellipsoïdes aplatis, ayant leurs axes de rotation dans un même plan de front.

Décrivons sur le grand axe de l'un d'eux comme diamètre une sphère, et transportons l'autre homothétiquement et de telle sorte qu'il vienne toucher cette sphère par un grand cercle, comme on le voit sur la figure q_{10}.

Dans cette figure on a d'abord représenté : 1° les projections verticales z', z'_1 des axes ; 2° les contours apparents γ', γ'_1, α', en projection sur le plan de même nom, des trois surfaces concentriques, et 3° les projections verticales $a'b'$, $a'_1b'_1$ des courbes de contact de la sphère avec les deux ellipsoïdes : ces projections passent par o' et sont respectivement perpendiculaires à z', z'_1.

Les deux points de rencontre m', n' des lignes $a'b'$, γ'_1 se trouvent placés à l'intérieur de γ', tandis que les points de contact a'_1, b'_1 sont placés nécessairement en dehors de γ' ; donc entre a'_1, m'_1

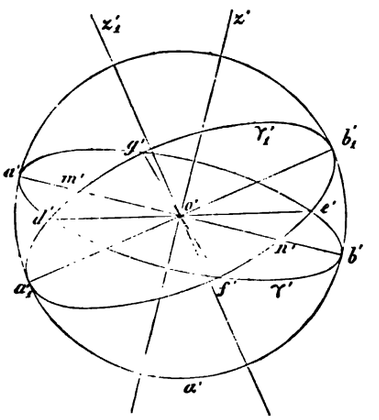


Fig. q_{10}.

la courbe γ'_1 doit rencontrer γ_1 ; on voit pareillement que les mêmes courbes se rencontrent entre les points (m', b'_1) (b'_1, n') (n', a'_1).

Les courbes γ', γ'_1 se coupent donc en quatre points réels, par conséquent, les deux surfaces se coupent elles-mêmes suivant deux courbes. Les projections de ces courbes sont rectilignes et doivent passer par o' ; ce sont deux diamètres $d'e'$, $f'g'$ communs aux ellipses γ', γ'_1.

On trouve ainsi deux directions asymptotiques $d'e'$, $f'g'$ de la projection verticale de l'intersection des surfaces données ; la projection verticale de cette intersection est, par conséquent, une hyperbole, et ses asymptotes se construisent par le procédé indiqué au sujet de l'épure générale.

Dans le cas de deux ellipsoïdes allongés dont les axes de rotation se rencontrent, il est manifeste qu'on peut reproduire le raisonnement qui vient d'être fait et arriver aux mêmes conclusions.

Si l'une des surfaces est un cône ou un cylindre, on la transportera parallèlement à elle-même de manière à lui faire toucher une sphère inscrite dans la seconde surface. Dans cette position, les axes

des deux surfaces ne se confondent pas, il est donc évident que l'un au moins des points de contact des droites formant le contour apparent en projection verticale du cône ou du cylindre déplacé, sera à l'intérieur du contour apparent de même nom de l'autre surface circonscrite à la même sphère ; ces droites suffisamment prolongées rencontreront donc ce dernier contour en quatre points réels dont deux pourront être confondus en un seul. Il en résultera deux directions asymptotiques de la projection verticale de l'intersection, par suite cette projection sera encore une hyperbole.

La construction des asymptotes se fera alors par le tracé de l'épure générale ; sauf pour le cas où l'un des points de rencontre dont on vient de parler se trouverait rejeté à l'infini.

Examinons ce cas particulier :

Nous opérerons toujours sur le plan vertical seulement.

Prenons pour exemple un cône et un paraboloïde de révolution. Représentons les projections verticales z', z'_1 (fig. r_1) des deux axes, supposés placés dans le même plan de front, ainsi que les

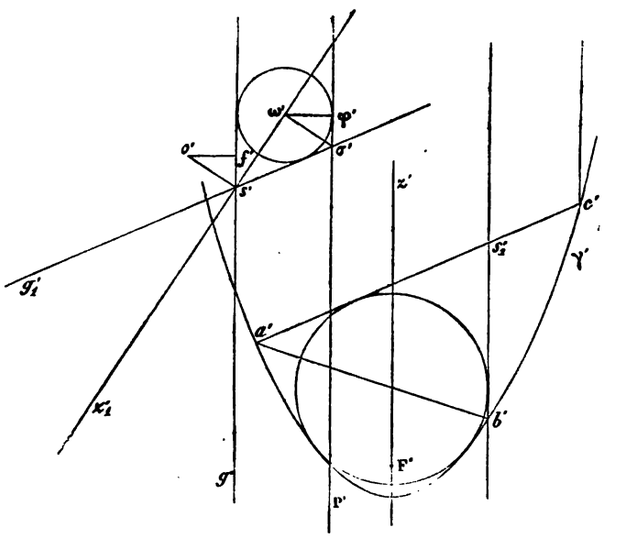


Fig. r_1.

contours apparents en projection de même nom γ'_1, ($s'g'$, $s'g'_1$) du paraboloïde et du cône ; nous supposerons que la droite $s'g'$ est parallèle à l'axe du paraboloïde.

Inscrivons une sphère dans le paraboloïde et transportons le cône parallèlement à lui-même, afin de le rendre tangent à cette sphère. Le paraboloïde et le cône déplacé se coupent suivant deux courbes planes dont les projections verticales sont $a'b'$ et la parallèle à z' menée par c'. L'asymptote parallèle à $a'b'$ se construirait comme à l'ordinaire.

En ce qui concerne l'autre asymptote, on observe que des plans perpendiculaires au plan vertical et parallèles à z' coupent les deux surfaces suivant deux paraboles dont les axes sont confondus avec la droite de rencontre de leur plan et de celui des deux axes de rotation ; on en déduit que ces paraboles ont deux points communs à l'infini ; en conséquence, pour que la trace verticale d'un plan de profil soit une asymptote, il faut et il suffit que les deux autres points de rencontre des deux paraboles soient aussi à l'infini, c'est-à-dire que les paraboles soient égales et aient la même orientation.

Or, dans le paraboloïde, toutes les paraboles sont égales à celle qu'on nous donne ; le problème se

réduit donc à couper le cône suivant une parabole égale à celle-ci, située dans un plan de profil et dirigée vers le haut.

Considérons, pour un moment, la question comme résolue et soit P′ la trace du plan cherché; inscrivons dans le cône donné une sphère tangente à ce plan, et désignons par ω' la projection de son centre, par φ' celle de son point de contact avec le plan, par σ' la rencontre de P′ avec $s'g'_1$.

Le point φ' est le foyer de la section et σ' son sommet; la distance $\sigma'\varphi'$ est donc connue; de là résulte le tracé qui suit: sur la droite $s'g'$ prolongée on prend une longueur $s'f'$ égale à la distance du foyer au sommet de la parabole donnée; par les points s', f' on mène des droites respectivement perpendiculaires à $s'z'_1$, $s'g'$ dont on prend la rencontre o'; la droite $o'f'$ est égale au rayon de la sphère cherchée, et le double de ce rayon donne la distance des droites $s'g'$, P′; on peut alors tracer la droite P′ qui est l'asymptote cherchée.

Arrivons au dernier cas, celui de deux paraboloïdes ou d'un paraboloïde et d'un ellipsoïde allongé.

L'une des surfaces au moins est un paraboloïde; supposons, pour fixer les idées, que son axe soit perpendiculaire au plan horizontal, et construisons dans l'autre surface des sections à projections droites sur le plan vertical et circulaires sur le plan horizontal. Les plans de ces sections coupent le paraboloïde suivant des ellipses dont la projection horizontale est également circulaire; il s'ensuit que leurs traces verticales sont les directions asymptotiques cherchées. La courbe est donc encore une hyperbole et ses asymptotes se construiront par le tracé déjà exécuté sur l'épure générale.

Les résultats principaux de cette discussion sont renfermés dans l'énoncé qui suit:

784. Théorème. — *Si deux surfaces de révolution et du second degré ont leurs axes dans un même plan, la projection de la ligne commune à ces surfaces sur un plan parallèle aux axes est:*

1° *Une parabole quand les deux axes peuvent être considérés comme parallèles;*

2° *Une ellipse quand une seule des surfaces est un ellipsoïde aplati;*

3° *Une hyperbole dans tous les autres cas.*

Remarque. — *Si l'une des surfaces glisse suivant son axe, la projection de la courbe d'intersection sur le plan des deux axes se déplace homothétiquement*, car ce déplacement de l'une des surfaces ne change pas les directions asymptotiques de la projection considérée.

Démontrons encore une autre proposition intéressante.

785. Théorème de M. Catalan. — *Quand les sections méridiennes de deux surfaces de révolution et du second degré ont au point de rencontre des axes de rotation un foyer commun, la projection de la ligne commune aux deux surfaces sur le plan de ces axes est un système de deux droites.*

En effet, les deux surfaces peuvent être considérées comme circonscrites à une même sphère de rayon nul, dont le centre se confond avec le foyer commun (§ 462); leur ligne de rencontre se projette donc suivant deux droites (§ 476 et § 759). Ces droites passent évidemment par le point de croisement des projections sur le plan des deux axes des directrices qui correspondent au foyer commun, attendu que les courbes de contact de la sphère avec ces surfaces sont des cercles imaginaires projetés sur ces directrices.

786. Points parasites de la projection verticale. — La manière la plus simple d'obtenir ces points est de recourir aux propriétés des coniques qui permettent de construire ces courbes dès qu'elles sont déterminées par cinq conditions: Sur notre épure (*fig.* 406, pl. LIII) on s'est contenté d'achever le tracé de la courbe, comme d'habitude, en employant ses asymptotes et un des points réels de l'intersection.

On eût pu considérer la projection verticale de l'intersection comme le lieu des rencontres des

sécantes perpendiculaires aux axes de rotation respectifs et communes à chacune des coniques γ', γ'_1 et aux cercles de centre o'. C'est ainsi que le point μ' a été construit sur notre épure ; mais plusieurs des cercles employés à la construction des points de l'intersection ne donnent ainsi qu'une corde pour chaque méridien, et certains cercles ne rencontrent pas l'ellipse en des points réels. On doit alors recourir aux sécantes idéales communes aux cercles et aux coniques [1].

787. Problème II. — *Construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont parallèles.*

On amène les deux axes à être perpendiculaires au plan horizontal, et l'on emploie pour surfaces auxiliaires des plans horizontaux. Les tangentes se construisent par la méthode de Binet.

Les points le plus haut et le plus bas s'obtiennent par la rencontre des méridiennes placées dans le plan des deux axes. Pour les déterminer, sans tracer deux nouvelles courbes, il faut, par une rotation autour de l'un de ces axes, rendre ces courbes méridiennes parallèles au plan vertical de projection : l'une d'elles vient se projeter verticalement sur le contour apparent de la surface qui la contient, et la nouvelle projection de même nom de l'autre s'obtient par une simple translation du contour apparent vertical de la seconde surface ; on prend alors les rencontres des courbes méridiennes déplacées et l'on revient sur la position primitive.

788. Cas particulier. — *Intersection d'une sphère et d'une surface de révolution du second degré.*

Nous prendrons pour exemple un ellipsoïde et une sphère.

Dans ce qui va suivre, il ne sera question que de la projection verticale de la courbe commune ; en outre, nous supposerons que le plan conduit par le centre de la sphère et par l'axe de la seconde surface ait été amené dans une position parallèle au plan vertical de projection.

Soient : o', z', γ', γ'_1 les projections verticales du centre de la sphère, de l'axe de l'ellipsoïde et des contours apparents de ces deux surfaces relatifs au plan vertical.

D'après le théorème que l'on vient d'établir (§ 784), la projection que nous cherchons est une parabole dont l'axe est perpendiculaire à z'.

On peut construire tout à la fois un point de la projection verticale de l'intersection et sa tangente ; à cette fin, adoptons pour surfaces auxiliaires des sphères inscrites dans l'ellipse donnée. Déterminons l'une d'elles par son contour apparent β'_1 et prenons ses rencontres avec les surfaces données ; ce sont : pour l'ellipsoïde, le parallèle double projeté suivant deux droites confondues $a'_1b'_1$; pour la sphère, le parallèle simple projeté en $c'_1d'_1$. Le point de rencontre m'_1 de ces droites est un point de la projection verticale de l'intersection ; il y a plus, comme $a'_1b'_1$ est une droite double ou, ce qui revient au même, comme la sphère auxiliaire a la propriété des surfaces limites, m'_1 représente deux points de la courbe, confondus sur $c'_1d'_1$, autrement dit, $c'_1d'_1$ est tangente à la courbe étudiée.

789. Intersection de la courbe et d'une droite. — Proposons-nous de trouver directement les points en lesquels une droite $e'f'$, prise arbitrairement, rencontre la courbe ; cette fois nous emploierons une sphère auxiliaire ayant son centre sur z' et rencontrant la sphère donnée suivant le cercle projeté sur la portion $c'_2d'_2$ de $e'f'$ qui se trouve comprise dans γ'.

La projection verticale du centre de cette sphère est au point de croisement ω'_2 de la perpendicu-

---

[1] On peut consulter sur cette question les applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi de principe fondamental au *Traité des propriétés projectrices des figures*, par PONCELET, t. II, p. 379.

laire à $e'f'$, menée par o', avec z'; son contour apparent vertical est donc le cercle β'_2 décrit de ω_2 comme centre et passant par les points c'_2, d'_2.

Les projections des rencontres de cette sphère auxiliaire avec les surfaces données sont $c'_2d'_2$, $a'_2b'_2$, $g'_2h'_2$; aux points de croisement m'_2, n'_2 de la première de ces lignes avec les deux autres, on trouve les points cherchés.

790. Tangente parallèle à une droite donnée. — Cherchons, pour réduire le nombre des lignes de l'épure, la tangente parallèle à $e'f'$.

Les tangentes à la projection verticale de la ligne commune sont les axes radiaux de γ' et des cercles inscrits dans l'ellipse donnée. Afin qu'un axe radical se dirige suivant $e'f'$, nous adopterons pour ligne des centres des deux cercles la perpendiculaire déjà menée à $e'f'$ qui passe par o'. Sa rencontre avec z' est le centre ω'_2 du cercle cherché; on peut alors tracer ce cercle β'_3 et obtenir, par la construction expliquée plus haut, le point m'_3 de la projection étudiée et sa tangente $c'_3d'_3$ qui doit, bien entendu, être parallèle à $e'f'$.

791. Axe, sommet et paramètre. — L'axe est perpendiculaire à z', le sommet sera donc le point de contact de la tangente parallèle à z' : le centre du cercle auxiliaire servant à construire ce point se trouve au pied ω'_4 de la perpendiculaire menée du point o' sur z', et sert à tracer ce cercle β'_4; en opérant sur ce cercle comme à l'ordinaire, on a trouvé le sommet s' que l'on voulait construire.

La perpendiculaire $s'x'$ à z' menée par le sommet est l'axe cherché; quant au paramètre on l'obtiendrait en construisant le double de la sous-normale relative à une tangente quelconque.

Nous avons représenté sur l'épure la surface constituée par l'ensemble de la sphère et de l'ellipsoïde.

EXERCICES SUR LES CHAPITRES V ET VI

792. Problème I. — *Construire, à l'aide de ses sommets, la trace verticale d'un cône dont la base est un cercle situé sur le plan horizontal, et dont le sommet, placé dans le dièdre 2, appartient au plan de profil mené par le centre de la base.*

Soient γ (*fig.* 408, pl. LIV) la base du cône et s, s' les projections de son sommet.

Le plan de profil mené par le centre de la base est un plan de symétrie de la courbe étudiée, il contient donc deux des sommets demandés.

Pour les déterminer, rabattons ce plan de profil sur le plan horizontal : le sommet du cône se rabat sur une perpendiculaire à la charnière menée par le point s, à une distance sS_1 de ce point égale à la cote $s's_1$. Les génératrices du cône contenues dans le plan de profil considéré sont rabattues en $S_1\theta_1$, $S_1\theta_2$ et leurs croisements Σ_1, Σ_2 avec xy donnent les rabattements des deux sommets cherchés. Ces points se relèvent en σ'_1, σ'_2.

Le centre est au milieu o' de $\sigma'_1\sigma'_2$ et le deuxième axe se trace alors facilement.

D'autre part, les plans tangents au cône suivant les génératrices du contour apparent relatif au plan horizontal ont pour traces verticales des perpendiculaires à xy menées par σ_3, σ_4; ces droites doivent être tangentes à la courbe cherchée, elles sont donc les tangentes aux deux autres sommets de cette courbe, et ces sommets se trouvent aux points de rencontre σ'_3, σ'_4 des tangentes correspondantes et de l'axe horizontal mené par o'.

Les traces verticales c'_1, c'_2 des génératrices $(s't', st)$ $(s't'_1, st_1)$ du contour apparent vertical, sont les points de contact de l'ellipse et de ce contour en projection verticale, ces points doivent être

construits quand on veut déterminer avec exactitude la trace verticale du cône, qui est l'ellipse $\sigma'_1\sigma'_4\sigma'_2\sigma'_3$ figurée sur l'épure.

793. Problème II. — *Construire les projections de l'intersection d'un hyperboloïde de révolution dont l'axe z, z' est vertical (fig. 409, pl. LIV), avec un plan passant par son centre et par une tangente à sa trace horizontale, menée par le point de cette trace le plus éloigné de la ligne de terre.*

Soient g, g' les projections d'une génératrice principale de la surface; construisons sa trace horizontal c θ et figurons en γ la trace de même nom de l'hyperboloïde, en γ_1, γ'_1 les projections de son collier, en ω, ω' celles du centre de ce collier, et en P la trace horizontale du plan sécant.

794. Construction d'un point quelconque de la section et de sa tangente. — Adoptons comme plans sécants les plans tangents au cône asymptote de l'hyperboloïde: ces plans, comme le plan donné, passent par le centre ω, ω', en conséquence, ce centre est un point commun aux intersections du plan donné avec les divers plans auxiliaires.

L'un de ces plans auxiliaires est déterminé par deux génératrices de même système, dont les projections horizontales g_1, g_2 sont parallèles, et sa trace horizontale passe par les traces de même nom de ces génératrices.

Cette trace $\theta_1\theta_2$ vient couper P au point t qui n'est autre chose que la trace horizontale de l'intersection du plan auxiliaire et du plan donné, on en déduit les projections $t\omega$, $t'\omega'$ de cette intersection.

Par les croisements des droites g_1, g_2 avec $t\omega$ on a enfin les projections horizontales m_1, m_2 de deux points de la courbe cherchée ; leurs projections verticales sont en m'_1, m'_2 sur $t'\omega'$ et sur des lignes de rappel menées par m_1, m_2.

Passons au tracé de la tangente en m_1, m'_1 : la trace θ_1 fait partie de la trace horizontale du plan tangent en ce point; une deuxième tangente menée à la projection horizontale du collier par m_1 fait connaître un second point de passage θ_3 de cette trace.

Menons donc la trace $\theta_1\theta_3$ du plan tangent et prenons sa rencontre avec P, ce point de rencontre τ, τ' est la trace horizontale de la tangente cherchée ; τm_1, $\tau' m'_1$ sont donc les projections de la tangente qu'il fallait construire.

795. Points des contours apparents et sommets. — Par l'emploi d'un plan auxiliaire horizontal mené par le centre ω, ω', on trouve les points (s_1, s'_1) (s_2, s'_2) de la courbe d'intersection placés à la fois sur les deux contours apparents de l'hyperboloïde.

Le centre de la courbe se trouve en ω, ω', en conséquence, ω et ω' sont les centres des projections de cette courbe, de plus, les traces du plan de profil conduit par z, z' sont des axes des projections correspondantes, s_3, s'_3 sont donc des sommets de ces projections et la symétrie par rapport au centre fait connaître deux autres sommets s_4, s'_4.

Il résulte de là que les points (s'_1, s_1), (s'_2, s_2) déjà trouvés, sont les autres sommets de la courbe d'intersection, et, par suite, que cette courbe est une ellipse.

On a représenté le tronc d'hyperboloïde compris entre le plan sécant et le plan horizontal de projection, en supposant que la surface enveloppe un corps solide ; des hachures ont été placées sur les faces planes, coupées et visibles.

796. Théorème I. — *Tout plan parallèle à l'un des plans tangents en un point d'une surface du second ordre, coupe cette surface et celle d'un cône qui a pour base une section plane quelconque de cette même surface, et pour sommet le point de contact du plan tangent, suivant deux courbes homothétiques entre elles.*

Effectivement, le cône et la surface ont en commun une courbe plane ; ils doivent donc se couper suivant une deuxième courbe plane passant par le sommet du cône. Si la surface du second ordre est réglée, son plan tangent mené par le sommet du cône la coupera suivant deux génératrices qui devraient passer respectivement par les points de rencontre de ce plan tangent et de la base du cône ; ces droites seront donc situées sur la surface du cône, et la seconde courbe commune sera dans le plan tangent.

Si la surface n'est pas réglée, tout plan conduit par le sommet du cône, sauf le plan tangent considéré, la coupera suivant une courbe et le cône suivant un point, une droite ou deux droites ; par suite, la seule courbe plane passant par le sommet du cône et commune aux deux surfaces est, dans ce cas, la courbe évanouissante en laquelle le plan tangent considéré coupe la surface du second degré.

De toute façon, la courbe commune est dans le plan tangent et par conséquent, les sections faites dans la direction de ce plan seront bien homothétiques.

797. Problème III. — *On donne un ellipsoïde de révolution dont l'axe est vertical et un plan quelconque, on demande, sans tracer la rencontre du plan et de l'ellipsoïde, de construire la trace verticale d'un cône qui aurait pour directrice cette ligne de rencontre, et pour sommet le point de l'équateur le plus voisin du plan vertical.*

Le contour apparent en projection verticale de l'ellipsoïde est, d'après le théorème que nous venons de démontrer, une courbe homothétique à la trace demandée. Cette trace est donc une ellipse ; on construira directement les points de cette courbe placés dans le plan de l'équateur ; leurs tangentes se détermineront ensuite facilement ; on mènera alors, dans la direction de ces tangentes, des tangentes au contour apparent en projection verticale de l'ellipsoïde et les droites de jonction des points de contact correspondants de ces couples de tangentes parallèles ; ces dernières droites iront se couper au centre d'homothétie de la courbe cherchée et du contour apparent en projection verticale de l'ellipsoïde ; l'épure s'achèvera alors sans aucune difficulté.

798. Problème IV. — *Construire par le secours du théorème I* (§ 796), *les points limites dans le sens latéral de la section plane d'un ellipsoïde de révolution.*

Exécutons le tracé sur la figure 379 (pl. XLV) dans laquelle l'intersection se trouve déjà déterminée.

Cherchons les tangentes à la courbe d'intersection parallèles à la droite dont les traces sont l', φ.

A cette fin, construisons la rencontre d'un plan horizontal quelconque avec un cône ayant l'un, e', z, des ombilics de l'ellipsoïde pour sommet, et la courbe d'intersection pour directrice ; nous mènerons ensuite des plans tangents à ce cône dans la direction de la droite dont les traces sont l', φ.

Coupons le cône par le plan horizontal contenant le centre o, o' de l'ellipse directrice de ce cône, cette ellipse est rencontrée par ce plan aux points (w', w) ($w'_1 w_1$) qui font partie de l'intersection cherchée ; or, d'après le théorème I, cette intersection est circulaire ; il suffit donc de chercher un nouveau point de ce cercle : ce point a été obtenu par la rencontre 6′, 6 du plan sécant horizontal et de la génératrice $e'a'$, za du cône auxiliaire. On a ensuite tracé la projection horizontale $6w_1w$ de ce cercle.

Il faut maintenant construire la rencontre du plan du cercle avec une parallèle menée par e', z, à la droite dont les traces sont l', φ.

On inscrit pour cela dans l'angle $P'\alpha y$, suivant une direction perpendiculaire à la ligne de terre, une droite 7.8 ayant pour longueur la différence des cotes des points (e', z) (o', o) et on la prolonge jusqu'à sa rencontre 9 avec αP ; le segment 8.9 ainsi trouvé, reporté en z10, fait connaître la projection

horizontale 10 du point suivant lequel la parallèle à la droite dont les traces sont l', φ rencontre le plan du cercle auxiliaire.

En menant par 10 des tangentes 10.11, 10.12 au cercle $6ww_1$ on a les projections horizontales des traces sur le plan auxiliaire des plans tangents au cône.

La trace du plan de l'ellipse $v'w'u'w'_1$, $vwuw_1$ sur le même plan horizontal auxiliaire est la droite $ww_1, w'w'_1$, et les rencontres 13, 14 de ww_1 avec les tangentes 10.11, 10.12 sont des points appartenant aux projections horizontales des tangentes de profil cherchées; lesquelles s'obtiennent alors en menant par 13 et 14 des perpendiculaires à la ligne de terre. Il est presque inutile de faire observer que ces perpendiculaires doivent se confondre avec les tangentes de profil déjà trouvées par une autre méthode (§ 687).

Actuellement traçons les projections (z.11, e'.11'), (z.12, e'.12') des génératrices de contact du cône et de ses plans tangents, et prenons leurs rencontres respectives avec les tangentes de profil qui viennent d'être tracées; ces points de rencontre (g_1, g'_1), (g, g'), sont ceux que nous voulions déterminer.

L'un de ces points g, g' avait déjà été obtenu par une autre méthode (§ 687).

799. Problème V. — *On donne un cylindre de révolution vertical, ainsi que deux points placés sur l'une des génératrices du contour apparent vertical de cette surface, et on demande de construire :*

1° *Les projections de la ligne minimum qui unit ces deux points et coupe toutes les génératrices de la surface ;*

2° *Le lieu des traces horizontales des tangentes menées aux divers points de cette ligne ;*

3° *La trace horizontale d'un cône mené par la même ligne et dont le sommet se trouve sur l'axe du cylindre.*

1° Projection de la ligne minimum. — Soient: (o, o'), (8, 8') les points donnés (*fig.* 410, pl. LIV). Il est manifeste que la transformée par développement de la ligne cherchée doit être rectiligne; d'où résulte le tracé suivant :

La base et la distance $o'8'$ seront partagées en un même nombre de parties égales; par les points de division de la base on conduira des lignes de rappel, et par ceux de la hauteur des horizontales; les lignes ainsi menées qui correspondront aux divisions de même rang à partir de o et de o' s'entrecouperont en des points appartenant à la projection verticale de la courbe; la projection horizontale correspondante se confondra avec la base du cylindre.

En appliquant ce tracé à la présente épure on a trouvé la courbe 0,1.2.3.....8, 0'1'2'3'.....8', que l'on a prolongée ensuite au delà de 8, 8' et de 0,0'.

Cette courbe est une *hélice;* l'équation de sa projection verticale s'obtiendrait très facilement et montrerait que cette projection est une sinusoïde.

800. Construction de la tangente. — Cherchons la tangente au point 3, 3' : l'application du tracé général (§ 624) conduit à porter sur la tangente au point 3 à la base du cylindre, à partir de ce point, et dans le sens que l'on détermine facilement par l'examen de la figure, une longueur 3θ égale à l'arc 3.2.1.0 déroulé; ce point θ est la trace horizontale de la tangente et les projections de cette ligne sont, par suite, θ3, θ'3'.

Il est aisé de voir que les tangentes à la courbe font avec les génératrices du cylindre un angle constant.

801. 2° Lieu des traces horizontales des tangentes a la ligne minimum. — D'après le tracé qui vient d'être indiqué, le lieu cherché γ est une développante du cercle de base; le point o est la rencontre de cette développante avec la base du cylindre.

802. 3° Trace horizontale du cône. — Donnons-nous le sommet s, s' du cône et traçons les projections $s3$, $s'3'$ d'une génératrice quelconque de cette surface ; puis déterminons sa trace horizontale t, qui sera un point de la courbe que nous cherchons à construire; on obtiendra ainsi des points de cette courbe γ_1 en nombre suffisant pour pouvoir la tracer.

803. Tangente à la trace du cône. — C'est la trace horizontale du plan tangent au cône suivant la génératrice qui passe par le point choisi t, t'.

Or, cette trace doit passer par t et par la trace horizontale θ de la tangente à la ligne minimum ; c'est, par suite, la droite $t\theta$.

804. Asymptote. — La direction asymptotique est donnée par la génératrice horizontale $s'm'$, sm, du cône. La tangente en m, m' à l'hélice a pour trace horizontale θ_1, par suite la parallèle $\alpha\,\alpha_1$ à sm, menée par θ_1, est la trace horizontale du plan tangent au cône mené par le point à l'infini de la trace de même nom de cette surface ; la droite $\alpha\alpha_1$ est donc l'asymptote qu'il fallait construire.

805. Point asymptote. — En prolongeant l'hélice indéfiniment au-dessous du plan horizontal, on voit que les génératrices du cône tendent à se confondre avec l'axe du cylindre, il en résulte que le pied s de cet axe est un point asymptote de la courbe γ_1.

806. La courbe γ_1 est une spirale hyperbolique. — Pour l'établir, supposons que le point t, t' soit un point quelconque de γ_1 et posons :

$$st = \rho, \quad \widehat{mst} = \omega.$$

Désignons encore par a', s le pied de la perpendiculaire menée du point 3, 3' sur l'axe du cylindre, par r le rayon de celui-ci, par h_1 la cote du point s, s' et enfin par h la distance des points (o, o') $(8, 8')$.

La droite de l'espace qui se projette en $3s$, $3'a'$ est égale au rayon du cylindre et parallèle à la droite st située sur le plan horizontal ; on en déduit la proportion

$$\frac{ts}{r} = \frac{h_1}{s'a'}. \tag{1}$$

D'autre part, eu égard à la forme de la transformée par développement de l'hélice, on a encore

$$\frac{s'a'}{arc\,m4.3} = \frac{h}{2\pi r},$$

d'où

$$s'a' = \frac{h}{2\pi r} \cdot \omega r = \frac{h}{2\pi}\,\omega.$$

En remplaçant $s'a'$ et ts par leurs valeurs dans (1), il vient

$$\frac{\rho}{r} = \frac{2\pi h_1}{h\omega}.$$

Cette équation est de la forme

$$\omega\rho = c\,;$$

la courbe γ_1 est donc bien une spirale hyperbolique.

807. Problème VI. — *Construire la trace horizontale d'un cylindre ayant pour directrice l'hélice dont on vient de tracer les projections, et pour direction de ses génératrices l'une des tangentes à cette courbe.*

Plaçons les génératrices du cylindre dans la direction de la tangente à l'hélice au point 6, 6' : la trace horizontale τ, τ' de cette tangente doit se trouver à la rencontre de l'horizontale menée par 6 et de la développante de cercle γ ; en conséquence, 6τ, $6'\tau'$ sont les projections de la tangente au point choisi.

808. Construction d'un point quelconque de la trace du cylindre oblique. — Un point quelconque de la courbe cherchée n'est autre chose que la trace horizontale τ_1, τ'_1 d'une parallèle à 6τ, $6'\tau'$, menée par 3, 3'. La tangente en ce point est la droite $\tau_1\theta$ qui l'unit à la trace horizontale θ de la tangente, en 3, 3', à l'hélice.

809. Points de rebroussement. — Si l'hélice était prolongée indéfiniment, elle aurait une infinité de points dans le plan de front conduit par 6, 6', et en chacun d'eux les génératrices du cylindre oblique seraient tangentes à l'hélice ; en conséquence, la trace horizontale aurait une infinité de points de rebroussement (§ 386, 2°).

Sur notre épure, l'un de ces points se trouve en τ, et en prolongeant l'hélice un peu au-dessous du plan horizontal, on a pu en obtenir au point τ_2, τ'_2, un deuxième.

Après avoir construit un nombre suffisant de points de la trace cherchée γ_2, on a pu dessiner cette courbe.

810. La trace horizontale du cylindre oblique est une cycloïde ordinaire. — Les projections obliques faites dans la direction 6τ, $6'\tau'$ des sections circulaires du cylindre droit sont des cercles de même rayon que la base du cylindre donné, et tous tangents à la droite 6τ ; on en déduit sans peine que la courbe γ_2 se peut engendrer par un point d'un cercle qui serait constamment tangent à 6τ et qui, sans glisser, roulerait sur cette droite ; la courbe γ_2 est donc bien une cycloïde ordinaire.

811. Problème VII. — *Reprendre, en conservant la directrice et la direction de la projection horizontale des génératrices, le problème précédent, mais en diminuant, puis en augmentant l'angle que font ces génératrices avec le plan horizontal.*

On trouvera deux cycloïdes, l'une raccourcie, l'autre allongée, c'est-à-dire deux courbes décrites par deux points, l'un intérieur, l'autre extérieur à un cercle, entraînés avec lui pendant qu'il roule sur l'une de ses tangentes.

812. Problème VIII. — *A un paraboloïde hyperbolique, mener un plan tangent par un point de la surface.*

Pour la simplicité du tracé, nous placerons l'un des plans directeurs sur le plan horizontal ; les directrices seront deux droites (ab, $a'b'$) (cd, $c'd'$), quelconques (*fig.* 411, pl. LIV).

Prenons tout d'abord la projection verticale m' d'un point appartenant à la surface et cherchons l'autre projection de ce point. La génératrice passant par le point choisi et parallèle au plan directeur donné se projette verticalement suivant une parallèle à la ligne de terre menée par m' ; cette parallèle rencontre $a'b'$, $c'd'$ en f', g', qui ont pour points correspondants f, g ; en tirant la droite unissant ces derniers, on trouve la projection horizontale fg de la génératrice considérée. Au croisement de cette projection et de la ligne de rappel issue de m', on obtient enfin la projection horizontale m qu'il fallait construire.

Arrivons à la détermination du plan tangent en m, m' ; ce plan contient déjà la génératrice fg, $f'g'$. Il doit également contenir la génératrice de l'autre système qui passe par le point de contact ; or, en projection sur le plan vertical, les génératrices du second système constituent un faisceau (§ 515) dont le sommet est au croisement ω' des droites $a'b'$, $c'd'$; il s'ensuit que la droite unissant $\omega'm'$ est la projection verticale de la génératrice que l'on cherche.

La trace horizontale de cette droite doit appartenir à celle de même nom $\theta\theta_1$ du paraboloïde et à une ligne de rappel menée par le croisement t' de la droite $m'm'$ avec la ligne de terre; cette trace est en t, et la projection cherchée s'obtient en tirant la droite tm.

Le plan tangent est actuellement déterminé par les droites $(fg, f'g')$, $(tm, t'm')$, et ses traces $P_\alpha P'$ se construisent comme on le voit sur l'épure.

813. Problème inverse. — *Par une génératrice d'un paraboloïde, on fait passer un plan quelconque et on demande le point en lequel il touche la surface.*

Le plan considéré coupe la surface suivant deux génératrices qui se croisent au point demandé.

La question se trouve ainsi résolue en principe ; quant au tracé de l'épure, il s'obtient en reproduisant en ordre inverse celui qui précède.

814. Problème IX. — *En conservant les données de la dernière épure, construire :*

1° *Un plan tangent au paraboloïde parallèle à un plan donné ;*

2° *Le second plan directeur, le sommet, l'axe et les plans principaux de cette surface ;*

3° *Sa courbe de contact avec un cône circonscrit ;*

4° *Ses contours apparents ;*

5° *Sa section par un plan quelconque.*

1° On mènera une droite parallèle à la trace horizontale du plan donné et rencontrant les deux directrices (§ 75), puis, après avoir mené par cette droite un plan parallèle au premier, on cherchera simplement en quel point il touche la surface (§ 813).

2° Le second plan directeur s'obtiendra en menant par l'une des directrices un plan parallèle à l'autre directrice.

L'intersection des plans directeurs est parallèle à l'axe ; un plan perpendiculaire à cette intersection fera connaître la direction du plan tangent au sommet. Il restera alors, pour obtenir ce sommet, à chercher le point de contact du plan tangent parallèle à cette direction.

L'axe s'obtiendra ensuite par une parallèle à l'intersection des plans directeurs menée par le sommet.

Enfin les plans principaux seront ceux qui, parallèles aux plans bissecteurs des dièdres formés par les plans directeurs, passeront en outre par l'axe de la surface.

3° On fera passer par une génératrice quelconque et par le sommet du cône un plan, et l'on résoudra sur lui le problème inverse du plan tangent.

Un tracé en tout semblable à celui du paragraphe 526 fera connaître les tangentes à la courbe de contact.

4° C'est le problème précédent qu'il faut résoudre en plaçant successivement le sommet du cône à l'infini sur une perpendiculaire à chacun des plans de projection.

5° Les points de la section se peuvent obtenir par le secours de plans auxiliaires horizontaux.

815. Asymptotes des sections planes du paraboloïde hyperbolique. — Commençons par démontrer ce théorème :

Le plan asymptotique du paraboloïde hyperbolique relatif à une génératrice quelconque est parallèle au plan directeur correspondant.

Retournons à la figure 411 (pl. LIV).

Le plan tangent en m, m' peut être considéré comme déterminé par fg, $f'g'$ et t', t' ; lorsque m, m' est rejeté à l'infini, t passe aussi à l'infini sur la droite $\theta\theta_1$. Comme cette droite $\theta\theta_1$ n'est pas parallèle à fg, $f'g'$, on voit bien que le plan asymptotique relatif à la génératrice considérée est horizontal.

Arrivons à la construction des asymptotes. On déterminera : la rencontre du plan donné avec chacun des plans directeurs, puis, dans chaque système, les génératrices parallèles à ces rencontres; après quoi, les plans parallèles aux plans directeurs menés respectivement par ces génératrices viendront croiser le plan qu'on nous donne suivant les asymptotes demandées.

816. Genres des sections planes. — Si le plan sécant donné rencontre l'intersection des plans directeurs, la courbe cherchée aura deux asymptotes, et sera, par suite, une hyperbole ; dans le cas contraire, la courbe sera une parabole.

817. Théorème II. — *La courbe de contact d'un cône circonscrit au paraboloïde hyperbolique est une hyperbole et celle d'un cylindre circonscrit une parabole* (à démontrer).

818. Problème X. — *On donne un tétraèdre régulier dont une arête* se_1 (fig. 412, pl. LV) *est placée sur le plan horizontal de projection et dont les faces font avec ce même plan horizontal, des angles égaux. Dans ce tétraèdre on inscrit un cône de sommet* s *et un octaèdre régulier dont les sommets sont les milieux des arêtes du tétraèdre. On propose de construire la projection horizontale seulement des parties du cône solide comprises entre le tétraèdre et l'octaèdre.*

819. Projection du tétraèdre et de l'octaèdre. — L'arête donnée fait connaître deux sommets s, e_1 du tétraèdre, qui sont à eux-mêmes leurs projections horizontales; cherchons les projections de même nom des deux autres sommets : ces sommets se trouvent sur une arête que l'on suppose placée au-dessus du plan horizontal de projection, ils se projettent sur la perpendiculaire à se_1 menée par le milieu e de cette droite, de part et d'autre du point e, et à des distances de ce point égales toutes deux à ee_1; en sorte que la projection horizontale du tétraèdre est le carré $sa_1e_1b_1$ avec ses deux diagonales.

Les milieux des côtés du tétraèdre ont pour projections horizontales a, b, c, d, e, f : le point e est le milieu de l'arête inférieure se_1 et le point f celui de la projection a_1b_1 de l'arête supérieure; les projections horizontales des arêtes de l'octaèdre forment donc aussi un carré $abcd$ et ses deux diagonales.

820. Contour apparent horizontal du cône. — A cause des tracés ultérieurs on peut trouver commodément ce contour sans recourir à la sphère inscrite au cône; effectivement il suffit de construire les traces horizontales des plans tangents à ce cône perpendiculaires au plan de même nom, en employant comme base du cône le cercle qui le limite. Pour cela rabattons la face du tétraèdre projetée en a_1 b_1 e_1, autour de l'arête supérieure de ce tétraèdre et sur un plan horizontal; ce rabattement n'est autre chose que le triangle équilatéral A_1 E_1 B_1, construit sur a_1 b_1. En inscrivant dans ce triangle un cercle γ_1, on a le rabattement de la base du cône.

Passons à la construction des plans tangents; ils contiennent la verticale du point s, laquelle coupe le plan que l'on vient de rabattre en un point qui, projeté horizontalement en s, se rabat par suite, suivant le symétrique S_1 de E_1 par rapport à a_1 b_1.

La rencontre de l'un des plans tangents avec le plan de base se rabat sur la tangente S_1 Ω_1 menée de S_1 au cercle γ_1, et se relève sur la droite qui unit s au point de croisement α des droites S_1 Ω_1, a_1 b_1. La droite $s\alpha$ ainsi obtenue est la projection horizontale d'une droite contenue dans le plan tangent vertical, c'est donc la trace horizontale de ce plan; autrement dit, $s\alpha$ est une des droites du contour apparent cherché. L'autre droite $s\alpha_1$ de ce contour s'obtient ensuite facilement puisqu'elle est symétrique de la première par rapport à se_1.

821. Méthode des projections centrales appliquée à la construction des courbes d'intersection du cône avec les faces de l'octaèdre. — Plaçons le centre de projection en s et prenons

pour plan de projection celui de la face que l'on vient de rabattre; nous rabattrons ensuite à nouveau cette face en entraînant la projection centrale du cône et de l'octaèdre.

La projection centrale de toute la surface du cône se confond avec la base de ce cône et celle de l'octaèdre a pour projection horizontale les cinq triangles a_1fd_1, fd_1c_1, $d_1e_1c_1$, fc_1b_1, $a_1b_1e_1$; après le rabattement cette base et ces projections deviennent γ_1, $A_1F_1D_1$, F_1D_1C, $D_1E_1C_1$, $F_1C_1B_1$, $A_1B_1E_1$.

Remarquons en outre que trois faces de l'octaèdre ont pour projections centrales les côtés du triangle projeté orthogonalement en a_1 b_1 e_1 et rabattu en A_1 B_1 E_1.

Les parties du cercle γ_1 placées à l'intérieur des triangles énumérés un peu plus haut sont les projections centrales complètes des courbes d'intersection; en cherchant les projections orthogonales correspondantes on aura les parties utiles de ces courbes.

On voit par là que la méthode des projections centrales permet : 1° de trouver immédiatement parmi les faces de l'octaèdre celles qui contiennent des parties utiles de l'intersection, et, 2° d'éviter, lorsqu'on le veut, le tracé des points de ces courbes placés sur le prolongement des faces de l'octaèdre.

Dans la présente question, par l'examen de la projection centrale on reconnaît que les faces contenant des courbes d'intersection sont celles dont les projections centrales ne sont pas rectilignes; nous allons successivement construire la projection horizontale de la base du cône et les projections de même nom des lignes de rencontre de ce cône avec les faces que nous venons de désigner.

822. Projection horizontale de la base du cône. — Pour la construire menons la parallèle I_1G_1 à A_1B_1; relevons G_1 en g_1, tirons de g_1 une parallèle à A_1B_1 et relevons enfin H_1, I_1 en h_1, i_1; ces derniers points appartiennent à la courbe cherchée. En profitant d'une partie du tracé précédent on a également relevé H_2, I_2 en h_2, i_2.

823. Sommets de la projection horizontale de la base. — On les obtient en relevant les extrémités des deux diamètres e S_3, S_1S_2 de la courbe γ_1 : ces diamètres sont respectivement perpendiculaires et parallèles à la charnière. Lorsqu'on les relève, e ne bouge pas, S_3 vient au tiers de e_1e à partir de e_1, en s_3; la projection du second diamètre se place sur une parallèle à la droite a_1b_1 menée par le milieu μ de la droite es_3; on la limite en prenant deux longueurs μs_2, μs_1, égales entre elles et égales au rayon du cercle γ_1.

824. Intersection de la face projetée orthogonalement en *eab* avec le cône. — La face considérée est parallèle au plan de la base du cône, elle coupe donc ce dernier suivant une courbe homothétique à cette base.

Les points e, e_1 sont homologues et le point μ a son homologue en μ_1 : au tiers de la hauteur du triangle eba à partir de la base ba; d'où résulte le tracé suivant : par e_1, e on mène deux droites parallèles; la première rencontre l'ellipse correspondante aux points p, q que l'on unit par des droites au point μ; par μ_1 on mène des parallèles à ces droites, lesquelles rencontrent la parallèle à pq aux points p_1, q_1 qu'il fallait construire. La figure indique suffisamment la construction des sommets e'', s''_1, s''_3, s''_2, de cette courbe.

825. Courbe de rencontre de la face projetée orthogonalement en *dec* avec le cône. — La projection centrale de cette courbe a pour rabattement l'arc $C_1S_3D_1$, il suffit donc de construire les projections orthogonales des points qui correspondent à ceux de cet arc. Le point G_1 se relève en g_1 et sa projetante conique a pour projection orthogonale g_1s; à la droite G_1I_1 correspond une autre droite menée dans sa direction par le point de croisement g des droites g_1s, ee_1; enfin la rencontre h de cette parallèle avec sh_1 est un des points cherchés.

La courbe qui nous occupe en ce moment est une parabole ; effectivement son plan est parallèle à celui de la face projetée en sa_1b_1 et cette face touche le cône.

L'arc $D_1S_3C_1$ est tangent aux droites E_1D_1, E_1C_1, en conséquence l'arc de parabole correspondant touchera en c et en d respectivement les droites de, ce.

Puisque l'angle ced est droit et que ses côtés touchent la parabole, le point e appartient à la directrice de cette courbe; la symétrie de la figure montre en outre que ee_1 est l'axe de la parabole; on en conclut que la directrice est a_1b_1. Le milieu φ de la partie cd de la polaire du point e par rapport à la parabole est le foyer de cette courbe et son sommet σ se trouve au milieu de la droite $e\varphi$. Il est alors facile de tracer l'arc de parabole cherché; cet arc a été prolongé sur notre épure au delà des points c, d qui limitent sa partie utile, afin de bien indiquer la forme de la courbe.

826. Intersection de la face projetée orthogonalement en *afd* et du cône inscrit. — L'arc correspondant à cette courbe est rabattu en $F_1\Omega_1D_1$.

Opérons sur le point dont I_2 est le rabattement et i_2 la projection orthogonale.

Le point cherché se trouve évidemment sur la droite qui unit s, i_2 ; pour trouver une deuxième droite passant par ce point, construisons celle qui correspond à j_1i_2. Au point j_1 correspond le point de rencontre j des droites sj_1, ad; d'autre part, la droite projetée orthogonalement en fd est à elle-même sa propre projection conique, par conséquent la rencontre k_1 des droites j_1i_2, fd est un point de la droite cherchée ; cette droite est donc k_1j.

Par la rencontre l des droites si_2, k_1j on a enfin le point cherché.

La courbe que nous cherchons est encore une parabole, puisqu'elle est dans un plan parallèle à celui de la face du tétraèdre projeté en sb_1e_1, face qui touche le cône suivant la droite dont la projection se fait en sc ; on en déduit, en outre, que cette droite sc est la direction de l'axe de la parabole que nous voulons tracer. Comme dans le cas précédent, on voit que les droites ad, af sont des tangentes en d, f à la même parabole.

La parallèle aa_3 à sc, menée par a, est le diamètre conjugué à la direction de la polaire ed du point a, on en conclut, d'abord que le milieu m de aa_3 est un point de la parabole, puis que la tangente en ce point est la parallèle mn à la droite ed. D'ailleurs les deux tangentes mn, ae sont perpendiculaires entre elles, par suite leur point de croisement n est un point de passage de la directrice, celle-ci n'est donc autre chose que la perpendiculaire $n\delta$ à sc, menée par n.

Le foyer de la parabole doit se trouver sur la polaire em du point n et sur un arc de cercle de centre e tangent à $n\delta$, c'est donc le point φ_1. On déduit de là sans difficulté l'axe φ_1x et le sommet σ_1 de la parabole. On peut alors facilement tracer cette courbe.

Sur notre épure l'arc utile de cette parabole a été, comme le précédent et pour la même raison, prolongé au delà des points e, d qui le limitent.

827. Intersection de la face projetée en *fbc* et du cône. — Cette intersection est une parabole symétrique par rapport à se_1 de celle que l'on vient de tracer.

828. Représentation du solide. — Après ces constructions la figure suffit pour indiquer la forme des parties du cône solide comprises entre les deux polyèdres. On a placé des hachures sur les parties planes coupées et visibles.

829. Problème XI. — *Étant donné un cube dont une diagonale est verticale, on propose de représenter par ses deux projections, la partie de la surface de ce cube placée à l'extérieur de la sphère tangente à ses côtés, et du cylindre de révolution qui a pour axe l'une des arêtes du cube et pour rayon la moitié du côté de ce polyèdre.*

Soient ab, $a'b'$ les projections de la diagonale verticale du cube. Le tracé déjà expliqué (§ 274) permet de construire les projections $abglhnkm$, $a'b'g'l'h'n'k'm'$ de ce cube.

Ce tracé fait également connaître l'inclinaison commune $c'a'y$ des diverses faces du cube sur le plan horizontal.

830. Intersections de la sphère et des faces du cube. — Cherchons d'abord les projections horizontales de ces courbes ; elles sont égales, attendu que les cercles dont elles sont les projections sont égaux et placés dans des plans qui s'inclinent du même angle sur le plan horizontal (§ 136).

Nous indiquerons donc le tracé de la projection horizontale d'un seul de ces cercles, de celui, par exemple, qui est inscrit dans la face $ahlg$, $a'h'l'g'$.

Les droites qq_1, pp_1 qui unissent les milieux des côtés opposés du losange $ahlg$ sont deux diamètres conjugués égaux de l'ellipse qui nous occupe.

Le grand axe de cette ellipse se projette sur hg ; sa longueur est égale au diamètre du cercle ou au côté du cube en véritable grandeur. Or ce côté est donné en véritable grandeur par $b'c'$; on portera donc de part et d'autre du centre ω deux longueurs ωs, ωs_1, égales entre elles et égales à la moitié de $b'c'$.

La grandeur du petit axe s'obtient en projetant $b'c'$ sous un angle égal à $c'a'y$, ou à son égal $c'b'd'$, il en résulte que $b'd'$ est la grandeur de ce petit axe.

Puisque $b'c'$, $b'd'$, dans le triangle rectangle $b'c'd'$, sont respectivement les longueurs des deux axes de l'ellipse, le côté $d'c'$ est égal à la distance des foyers de cette courbe, et comme la ligne $d'c'$ est aussi égale à la projection horizontale du côté du cube, et, par suite, à pp_1, le tracé de l'ellipse se peut faire comme il suit :

Du point ω comme centre on décrit deux arcs de cercle pq_1, p_1q, ayant pour rayon commun ωp_1 ; les rencontres de ces arcs avec gh sont les foyers f_1, f_2 de l'ellipse cherchée ; on construit ensuite la courbe facilement puisqu'on connaît son grand axe ss_1 et ses foyers.

Passons à la détermination des projections verticales des cercles d'intersection des faces du cube et de la sphère ; dans chaque face les droites de jonction des milieux des côtés opposés sont deux diamètres conjugués de l'ellipse correspondante ; ces diamètres permettent de tracer les courbes.

Les diamètres conjugués de l'ellipse inscrite dans le parallélogramme $a'h'l'g'$ sont seuls figurés sur notre épure, en $p'p'_1$, $q'q'_1$.

On eût pu, afin de donner au tracé plus de précision, construire encore les droites qui passent par les rencontres des projections des cercles ; il eût suffi d'employer un tracé analogue à celui du paragraphe 600.

La figure suffit maintenant pour faire comprendre toutes les constructions et indiquer la visibilité ; nous rappellerons seulement qu'on a dû, d'après l'énoncé même, supprimer la partie du cube contenue dans la sphère et dans un cylindre de révolution dont le rayon est égal à la moitié du côté du cube (on a pris bm, $b'm'$ pour axe de ce cylindre).

831. Théorème III. — *Tout plan bi-tangent au tore le coupe suivant deux cercles.*

Ces cercles sont égaux à celui qui passe par les centres des sections méridiennes ; leurs centres se trouvent sur une perpendiculaire à l'axe menée par le centre de la surface, de part et d'autre de celui-ci, à une distance égale au rayon du cercle générateur ; enfin leurs projections sur un plan perpendiculaire à l'axe ont un foyer commun au pied de ce même axe. Ce théorème est dû à M. Ivon Villarceau.

Considérons l'un des cercles méridiens de la surface ; ce cercle passe par les points circulaires à

l'infini de son plan, lesquels décrivent pendant la rotation de la courbe méridienne des parallèles à l'infini ; parallèles qui doivent nécessairement se confondre, puisque le lieu des points circulaires à l'infini de l'espace n'est autre que le cercle à l'infini.

Il en résulte que la surface a pour parallèle double le cercle à l'infini. Cela posé, conduisons par les points de contact du plan bitangent et par un quelconque des points de la section un cercle ; il coupera cette dernière en neuf points, savoir : deux en chacun des contacts du plan sécant et du tore, un pris arbitrairement sur la courbe commune, et deux en chacun des deux points circulaires à l'infini du plan sécant, attendu que le cercle à l'infini est une parallèle double du tore.

Or, la courbe d'intersection est du quatrième degré et un cercle ne peut la couper en plus de huit points sans se confondre avec elle ; il s'ensuit que l'intersection comprend un cercle et se complète par un autre cercle. Ces deux cercles se croisent aux points de contact du plan bitangent et du tore, ces points de contact sont donc les points doubles de l'intersection.

Arrivons à la détermination du rayon et des centres de ces cercles. La droite en laquelle le plan du collier et de l'équateur du tore coupe le plan sécant est perpendiculaire au milieu de la corde commune aux cercles de section, elle passe donc par leurs centres ; on peut, conséquemment, obtenir les extrémités d'un diamètre dans chacun d'eux par les rencontres de leur plan avec le collier et l'équateur. Le rayon de la section est donc égal à la demi-somme des rayons de l'équateur et du collier, c'est-à-dire au rayon du cercle passant par les centres des divers méridiens. Quant à la distance du centre de l'intersection à l'axe du tore, elle est égale à la demi-différence de ces mêmes rayons, c'est-à-dire au rayon du méridien lui-même.

Finalement nous allons établir que le pied de l'axe du tore sur le plan horizontal de projection est un foyer des deux projections de même nom de la courbe de section.

Représentons (fig. r_2) la projection verticale z' de l'axe, celle des cercles γ', γ'_1 qui font partie du

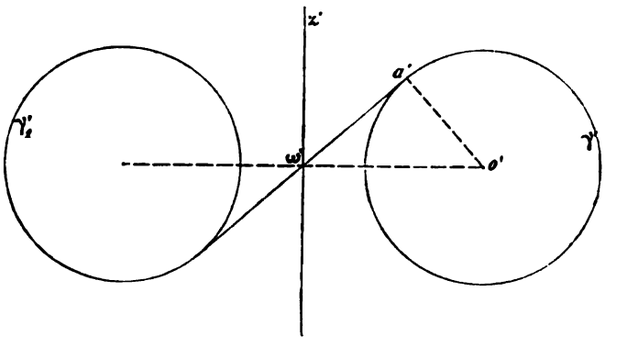


Fig. r_2.

contour apparent vertical et, enfin, celle ω' du centre de la surface. Menons par ω' la tangente commune à γ', γ'_1, et du centre o' de γ', abaissons une perpendiculaire $o'a'$ sur cette tangente.

On a vu que les demi-grands axes des projections horizontales des cercles de section sont égaux à $o'\omega'$; cette même ligne projetée sous l'angle $o'\omega'a'$ donne évidemment la longueur commune $\omega'a'$ de leurs demi-petits axes, il en résulte que $o'a'$ est égale à la distance des centres de ces projections à leurs foyers respectifs. D'ailleurs cette ligne $o'a'$ est aussi égale à la distance de ces mêmes centres

au pied de l'axe, donc ce dernier est un foyer commun aux deux projections des cercles qui nous occupent.

Remarque. — A l'aide des côtés du triangle $\omega'a'o'$ on peut, dès que l'orientation des projections des cercles de section est connue, construire ces projections elles-mêmes.

832. Théorème IV. — *La section du tore par une sphère bitangente est un système de quatre cercles, deux à l'infini et deux à distance finie.*

Au précédent paragraphe nous venons de voir que le cercle de l'infini est un parallèle double du tore; d'autre part, vu que la sphère est un tore dont le cercle méridien a son centre sur l'axe, on peut dire que ce cercle est aussi un parallèle double de la sphère.

Le cercle de l'infini est donc un parallèle double commun aux deux surfaces; en conséquence la courbe d'intersection placée à distance finie est du quatrième degré.

Au surplus, le plan mené par l'axe du tore et par le centre de la sphère est un plan de symétrie commun à ces deux surfaces; par suite les points en lesquels la sphère touche le tore peuvent être symétriquement placés par rapport à ce plan, ou se trouver dans le plan de symétrie lui-même.

Dans le cas de deux points de contact symétriques, on peut mener par ces deux points un plan perpendiculaire à l'axe du tore; ce plan découpera dans les deux surfaces considérées des parallèles bitangents et par suite confondus. Les surfaces se touchent alors par un parallèle double qui forme la partie de l'insection placée à distance finie.

Arrivons au cas principal, celui où les points de contact sont placés dans un même plan méridien du tore. Alors le cylindre projetant de la courbe d'intersection sur ce plan méridien est du second degré, attendu que, par suite de la symétrie de la figure, un plan parallèle à ses génératrices et orienté d'une façon arbitraire, ne peut le couper que suivant deux génératrices. Or, d'autre part, ce cylindre touche la sphère en deux points, il la rencontre donc, d'après le théorème de Monge, suivant deux courbes planes qui, étant tracées sur la sphère, sont évidemment deux cercles.

833. Problème XII. — *Par un point quelconque de la surface d'un tore, mener quatre cercles.*

Le parallèle et le méridien menés par ce point font immédiatement connaître deux de ces cercles. Pour déterminer les deux autres, on trace la droite qui touche intérieurement les deux cercles du tore situés dans un même plan méridien quelconque, et on lui imprime un mouvement de rotation autour de l'axe de la surface, afin d'engendrer un cône doublement circonscrit au tore, et dont le sommet est évidemment le centre de la surface.

Tous les points du tore sont à l'extérieur de ce cône, on peut donc mener par le point donné deux plans tangents au cône, lesquels coupent la surface du tore suivant quatre cercles dont deux passent par le point choisi, et sont, par suite, ceux que nous cherchions.

834. Remarque. — *Les courbes de rencontre d'un tore avec ses sphères bitangentes ne diffèrent en rien des sections du tore par ses plans bitangents.*

Prenons pour plan de la figure le plan méridien qui passe par les points de contact c, c_1 (fig. r_3), et traçons les cercles γ, γ_1, γ_2, qu'il découpe dans le tore et dans la sphère.

Commençons par démontrer que la droite de jonction des points c, c_1 passe par le centre o du tore.

En effet, les points c, c_1, o sont : le premier, le centre d'homothétie inverse des cercles γ, γ_2; le second, le centre d'homothétie directe des cercles γ_1, γ_2, et le dernier, le centre d'homothétie inverse des cercles γ, γ_1. Ces trois points se trouvent donc placés sur l'un des axes d'homothétie inverse du système des trois cercles figurés, ils sont donc en ligne droite.

Par cette droite, contenant le sommet o du cône doublement circonscrit au tore et extérieure à ce

cône, on peut mener deux plans tangents au tore; lesquels découperont sur la sphère deux cercles passant par c, c_1, et sur le tore quatre cercles, dont deux passeront également par les points c, c_1 et y seront tangents aux premiers; effectivement, en c, c_1 les tangentes aux cercles considérés sont les

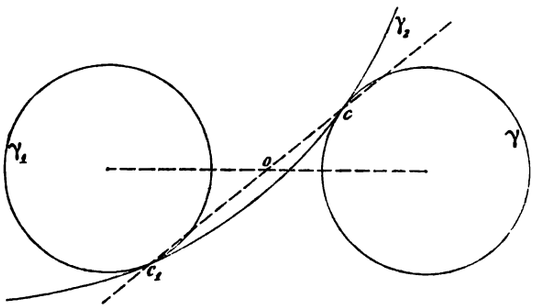


FIG. r_1.

intersections du plan de ces cercles avec les plans tangents communs à la sphère et au tore; or, deux cercles bitangents se confondent, ce qui établit la proposition.

835. Problème XIII. — *Construire l'intersection d'un tore dont l'axe est vertical, par un plan bitangent parallèle à la ligne de terre.*

Sur l'épure finale on représentera la portion du corps comprise dans le tore et placée en arrière du plan bitangent.

Le tore a pour axe la verticale z, z' (*fig.* 414, pl. LVI) et se trouve représenté par ses contours apparents.

Menons un plan bitangent $P_1\alpha P'_1$ perpendiculaire au plan vertical; en le faisant tourner de 90 degrés autour de z, z', il est aisé de déterminer la trace horizontale P d'un plan bitangent au tore et parallèle à la ligne de terre. On peut donc considérer le plan sécant comme défini par le point o', z qui n'a pas bougé, et par sa trace horizontale P.

D'après ce qui a été démontré (§ **831**), le point z est un foyer commun aux projections horizontales des deux cercles d'intersection, et le plan horizontal auxiliaire mené par le centre de la surface sert à construire les grands axes ab, cd de la projection horizontale de l'intersection, ainsi que ceux $a'b'$, $c'd'$, de sa projection verticale.

Pour avoir les extrémités des petits axes, il suffit de chercher les points en lesquels les tangentes aux projections sont parallèles aux grands axes, c'est-à-dire les projections (f, f'), (e, e'), (g, g'), (h, h'), des points placés sur les parallèles le plus haut et le plus bas du tore.

Pour obtenir les points doubles, il suffit de faire tourner autour de z, z', d'un angle égal à 90°, les points de contact du plan $P\alpha P'_1$ et du tore; on trouve ainsi, par le tracé que la figure indique suffisamment, les points (i, i'), (j, j'). On a placé des hachures sur les parties du tore coupées et visibles.

836. Problème XIV. — *Construire les points de rencontre d'un tore et d'une droite passant par son centre.*

Après avoir déterminé le cône qui touche le tore par deux parallèles, on adopte pour plan sécant auxiliaire l'un des plans tangents à ce cône mené par la droite donnée.

837. Problème XV. — *Construire les contours apparents de la surface engendrée par la rotation complète d'un cercle autour d'un axe vertical mené par l'un des foyers de sa projection horizontale* (à résoudre).

838. Problème XVI. — *On donne :*

1° *Un hémisphère tangent au plan vertical, reposant par sa base sur le plan horizontal et dont le rayon est égal à* $0^m,100$ (*fig.* 415, pl. LVII);

2° *Un tore dont l'axe est vertical, à* $0^m,170$ *de plan vertical et dans le plan de profil mené par le centre de la sphère dont l'hémisphère fait partie; le centre du cercle méridien de ce tore est à* $0^m,070$ *de son axe et à* $0^m,051$ *du plan horizontal ; le rayon de ce cercle méridien est égal à* $0^m,049$.

On demande de représenter l'hémisphère supposé plein et existant seul, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le tore $\left(\text{échelle adoptée } \frac{6}{10}\right)$.

A l'aide des données on peut représenter par leurs contours apparents $(\gamma', \gamma'_1, \alpha, \alpha_1)$ (β, β'_1) les deux surfaces, et s'assurer sans peine que le tore est bitangent à l'hémisphère en deux points placés dans le plan de profil passant par son centre, dont l'un a, a' se trouve au point culminant de l'hémisphère, ainsi que sur le parallèle le plus haut du tore.

Commençons par construire la projection horizontale de la ligne commune aux surfaces données.

C'est un système de deux ellipses dont on obtient les éléments par le secours des propriétés démontrées un peu plus haut (§ **831**, **832** et **834**); ces éléments sont contenus dans le triangle $c'd'o'$, que l'on sait construire, il reste à les mettre en place sur l'épure.

A cette fin, observons que les deux ellipses cherchées ont pour foyer commun z et démontrons que a est un sommet du petit axe de chacune d'elles. Effectivement, dans l'espace, les cercles communs aux deux surfaces ont un même point culminant a, a', les tangentes en ce point double sont donc parallèles aux diamètres de ces cercles dont les projections horizontales constituent les grands axes des deux ellipses cherchées; le point a est donc bien l'une des extrémités du petit axe de chacune d'elles. La droite za doit être égale à $c'o'$, puisque chacune de ces droites a même longueur que le demi-grand axe des deux ellipses considérées.

Rien n'est maintenant plus aisé que de mettre en place les éléments de ces ellipses; en effet construisons sur la droite az, prise comme hypoténuse commune, de part et d'autre de cette ligne, deux triangles $a\omega z$, $a\omega_1 z$, tous deux égaux au triangle $c'd'o'$, et orientés de façon que les côtés $z\omega$, $z\omega_1$ soient égaux à $o'd'$; les côtés de l'angle droit de ces triangles feront connaître la position des axes. Quant aux sommets restés inconnus, on les obtiendra en portant

$$\omega_1 a_2 = \omega_1 a$$

et

$$\omega a_1 = \omega a,$$

puis en prenant les rencontres respectives b, b_1, b_2, b_3 des axes ωz, $\omega_1 z$ et des cercles α, α_1.

Actuellement, il reste à tracer l'ellipse de grand axe bb_1 et de petit axe aa_1 ; puis à reporter cette ellipse dans une position symétrique par rapport à az, afin d'obtenir celle dont les axes sont aa_2, b_2b_3.

Pour construire la projection verticale, on relève ω en ω', ω_1 en ω'_1 ; on tire les droites $a'\omega'$, $a'\omega'_1$ que l'on prolonge d'une quantité égale à elles-mêmes; ce qui fait connaître un diamètre de chacune des ellipses.

Ces deux diamètres $a'a'_1$, $a'a'_2$ ont pour conjugués ceux $b'b'_1$, $b'_2b'_3$ que l'on obtient en relevant b, b_1, b_2, b_3. On peut maintenant tracer la projection verticale de l'intersection.

Pour donner plus de précision à ce dernier tracé, on a construit dir ectement les points en lesquels

la projection verticale de l'intersection touche les contours apparents des deux surfaces en projection sur le plan de même nom.

Ces constructions se font sans aucune difficulté : il suffit d'observer que les plans des courbes d'intersection sont déterminés par les droites se croisant en ω, ω' et en ω_1, ω'_1 ; puis d'employer successivement comme plans auxiliaires, les plans de front menés par z, z' et par le centre de la sphère. Le premier de ces plans coupe le plan du cercle dont le centre est ω_1, ω'_1 suivant la droite de front zg, $c'g'$; la projection verticale de cette droite rencontre γ', γ'_1 en quatre points; deux de ces points k', k'_1 sont les points de contact de l'ellipse dont le centre est en ω'_1 avec les cercles γ', γ'_1. Les points de contact de ces mêmes cercles avec l'ellipse dont ω, ω' est le centre sont symétriques par rapport à z' des points k', k'_1 que l'on vient de construire.

Le second plan auxiliaire a pour trace horizontale la parallèle à la ligne de terre menée par a, il rencontre celui du cercle dont ω', ω est le centre suivant la droite $a's'$, as, qui fait connaître le second point de contact f' de la projection verticale de ce cercle avec β_1'. On a construit f'_1 à l'aide de la parallèle à la ligne de terre menée par le point f'.

Le second point double de la commune intersection se peut obtenir par une rotation de 90 degrés autour de z, z' des courbes méridiennes placées dans un plan de profil : on a ainsi trouvé, après la rotation, le point Δ_1, Δ'_1 et le point δ', δ sur la position primitive de la figure.

839. Problème XVII. — *Étant donné, dans la position habituelle, un tore dont le rayon du cercle générateur est égal à celui du collier, on demande de déterminer :*

1° *L'intersection de cette surface par celui de ses plans tangents qui le touche au point du collier le plus éloigné du plan vertical;*

2° *Les contours apparents de la surface engendrée par la rotation de cette intersection autour de son axe vertical;*

3° *L'intersection de cette dernière surface par les plans perpendiculaires au plan vertical qui la touche au point double de ses méridiennes.*

1° Le tore, dont l'axe se projette en z, z' (*fig.* 416, pl. LVI), est déterminé par ses contours apparents sur les deux plans coordonnés ; et le plan vertical par lequel on doit le couper est à son tour déterminé par sa trace horizontale P.

Quant aux points de la section, on les a construits à l'aide de plans horizontaux auxiliaires; puis on a tracé la projection verticale γ' de cette section.

840. Tangentes au point double. — Il résulte du tracé général (§ **679**) qu'au point double δ, δ' les tangentes ($\delta't'$, δP), ($\delta't'_1$, δP) s'inclinent d'un angle égal à 45 degrés sur l'horizon.

La section que nous venons de construire est une *lemniscate;* on la déduit du théorème qui suit:

841. Théorème V. — *Les sections faites dans un tore par des plans parallèles à l'axe et qui en sont distants d'une quantité égale au rayon du cercle méridien sont des* OVALES DE CASSINI *ou des* LEMNISCATES.

Prenons pour axe des z l'axe de rotation (fig. r_4), pour axe des x une perpendiculaire abaissée du centre de l'un des cercles générateurs parallèles au plan sécant sur l'axe oz et pour axe des y une perpendiculaire au plan zox.

Le plan zox coupe le tore suivant deux cercles γ, γ_1, soient : r, a le rayon commun de ces cercles et la distance de leurs centres à l'axe oz.

Le plan de la section est alors parallèle à zox et placé à une distance de celui-ci égale à r; par suite la section se projette en véritable grandeur sur le plan zox; cherchons donc simplement l'équation de cette projection.

Les équations du tore et du plan sécant sont :

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2=4a^2(x^2+y^2), \quad y=r;$$

celle de la projection cherchée sera donc

$$(x^2+z^2+a^2)^2-4a^2x^2=4a^2r^2,$$

ou

$$(x^2+z^2+a^2+2ax)(x^2+z^2+a^2-2ax)=4a^2r^2,$$

ou encore

$$[(x+a)^2+z^2][(x-a)^2+z^2]=4a^2r^2.$$

Les deux facteurs du premier membre de cette dernière équation représentent les puissances d'un point quelconque m de la projection étudiée par rapport aux points F, F_1, on a donc

$$\overline{mF}^2.\overline{mF_1}^2=4a^2r^2,$$

ou

$$mF.mF_1=2ar.$$

Le produit des distances des points de la courbe à deux points fixes est donc constant, ce qui justifie l'énoncé.

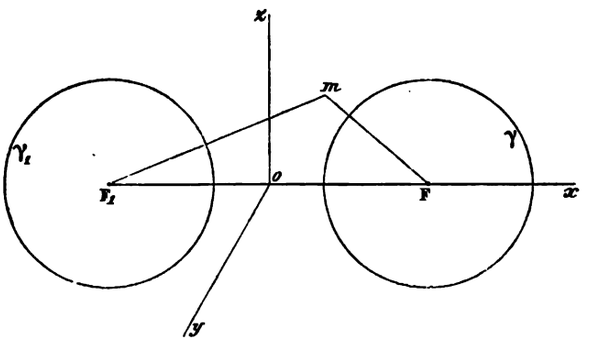


Fig. r_1.

2° La construction du contour apparent de la surface qu'engendre, par une rotation complète autour de z_1, z'_1, la section qui vient d'être tracée est suffisamment indiquée par l'épure.

3° Avant de traiter la troisième question démontrons le théorème suivant :

842. Théorème VI. — *Si l'on coupe un tore par un plan quelconque parallèle à son axe, la surface engendrée par une rotation complète de cette section, autour de son axe parallèle à celui du tore, est coupée par un plan bitangent suivant deux cercles.*

Effectivement, la section par un plan parallèle à l'axe a deux points doubles sur le cercle à l'infini ; ce cercle est donc encore un parallèle double de la surface engendrée par la rotation de cette section.

Toute section de cette dernière surface par un plan bitangent a donc quatre points doubles, les deux points de contact et deux points à l'infini, qui ne sont autres que les points circulaires à l'infini du plan de la section. Cette dernière est du quatrième degré ; or, le cercle mené par ses deux points doubles à distance finie et par l'un quelconque de ses points contiendra les points

circulaires à l'infini. Ce cercle rencontrera donc la courbe d'intersection en quatre points doubles et un point simple de cette courbe, c'est-à-dire en neuf points; or un cercle ne peut rencontrer une courbe du quatrième degré en plus de huit points sans se confondre avec elle, donc l'intersection, qui est du quatrième degré, comprendra déjà un cercle; pareillement on voit que la seconde partie de cette courbe est aussi un cercle.

Nous eussions pu nous dispenser de répéter cette démonstration qui est identique à celle du paragraphe **831**.

Après ce que nous venons de dire, rien n'est plus simple, comme on le voit sur notre épure (*fig.* 416, pl. LVI), que de construire les projections de la section faite par les plans tangents en δ, δ'. Effectivement, ces plans sont des plans bitangents dont les points de contact se sont confondus; ils coupent donc la surface suivant les cercles qui ont pour projection horizontale quatre ellipses deux à deux confondues; les points z_1, c, a, b, sont les sommets de la première et z_1, c_1, a_1, b_1, ceux de la seconde.

L'épure finale représente le corps engendré par la lemniscate; duquel on a enlevé les parties placées au-dessus des deux plans bitangents.

843. Problème XVIII. — *Représenter les projections de la portion d'un tore comprise dans l'intérieur d'une pyramide hexagonale circonscrite au cône qui touche le tore par deux parallèles* (à résoudre).

844. Théorème VII. — *Tout plan doublement tangent à la surface engendrée par une conique tournant autour d'une droite située dans son plan coupe cette surface suivant deux coniques qui, projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, ont un foyer commun au pied de cet axe* (à trouver).

845. Problème XIX. — *Trouver l'intersection de deux cônes ayant pour base commune un cercle placé sur le plan horizontal, et dont les sommets se projettent aux extrémités du diamètre de ce cercle parallèle à la ligne de terre.*

Soient (*fig.* 417, pl. LVIII): γ la base donnée; st son diamètre parallèle à la ligne de terre et (s, s') (t, t') les projections des sommets.

Les cônes ont en commun une courbe plane γ, leur intersection comprend donc une deuxième courbe plane qu'il faut déterminer. Cette courbe a pour plan de symétrie le plan de front mené par les sommets donnés; sa projection verticale est donc rectiligne; il suffit, conséquemment, de construire deux points de cette projection : pour cela coupons les deux surfaces par le plan de front qui contient leurs sommets : il détermine quatre génératrices projetées verticalement en $s'a'$, $s'b'$, $t'a'$, $t'b'$, qui font connaître, par leurs croisements, indépendamment des points a', b' relatifs à la base, deux points de la projection verticale cherchée; l'un c', l'autre placé à l'infini sur les droites $s'a'$, $t'b'$, c'est le point que nous avons désigné par n'_∞ sur l'épure. La droite cherchée s'obtiendra donc en unissant c', n'_∞, autrement dit en menant par c' une parallèle $c'd'$ à $s'a'$.

Au surplus, il résulte de ce qui vient d'être dit que la projection horizontale de l'intersection est aussi rectiligne, c'est la droite dc; la seconde courbe d'intersection est donc la rencontre de l'un des cônes par un plan de profil; c'est une parabole. Sur l'épure on a figuré le rabattement de cette parabole et on a représenté le solide constitué par l'ensemble des parties des deux cônes comprises entre les sommets et la base commune.

846. Problème XX. — *Déterminer l'intersection d'un cône et d'un cylindre qui reposent par deux bases circulaires sur le plan horizontal; ces bases se touchent sur un diamètre parallèle à la ligne de terre, et la projection horizontale du sommet du cône se confond avec leur point de contact; le cylindre est vertical* (*fig.* 418, pl. LVIII).

La génératrice verticale du cône est une droite double de l'intersection qui, par suite, se composera de cette droite $s'a'$, s et d'une conique (§ 752).

Le point m', m appartient aux deux surfaces et le plan horizontal mené par ce point coupe celles-ci suivant un même cercle, projeté en $m'n'$, γ_1; en conséquence, ce cercle et la droite double forment l'intersection complète.

Sur l'épure on a figuré le corps formé par la partie du cône comprise entre sa base γ et son sommet s, s', et celle du cylindre comprise entre la base γ_1 et un plan horizontal placé au-dessus du sommet s, s'.

847. Problème XXI. — *Construire l'intersection d'une sphère et d'un cône ayant son sommet au centre de la sphère; puis développer la surface de ce cône.*

Nous avons pris pour base du cône l'hyperbole H, H_1 (*fig.* 419, pl. LVIII) placée sur le plan horizontal de projection et pour sommet un point quelconque o, o'. Ce sommet est aussi le centre de la sphère, laquelle a été prise tangente au plan horizontal de projection.

848. Construction d'un point quelconque de l'intersection. — On a cherché simplement les points de rencontre des génératrices du cône avec la sphère; adoptons la génératrice ot, $o't'$, et faisons-la tourner autour d'un axe vertical mené par o, o' afin de la rendre parallèle au plan vertical, en ot_1, $o't'_1$; ses rencontres avec la sphère sont alors projetées verticalement aux points m'_1, n'_1; en revenant sur la position primitive on en déduit les points (m, m') (n, n') qu'il fallait construire.

849. Construction de la tangente en un point quelconque. — Choisissons le point m, m'. Le plan tangent à la sphère au point projeté verticalement en m'_1 a pour traces P'_1, P_1; si l'on fait tourner ce point autour de la verticale du point o, o', pour le ramener sur m, m' en entraînant le plan tangent, P_1 vient en P. Cette droite P rencontre en θ, θ' la trace horizontale R du plan tangent au cône; ce point est la trace horizontale de la tangente cherchée; en le joignant au point m, m', on a les projections θm, $\theta' m'$ de la tangente demandée.

La tangente R à l'hyperbole a été construite à l'aide des asymptotes A, A_1 de cette courbe, comme on le voit sur la figure.

850. Points des contours apparents du cône. — Nous avons obtenu les traces horizontales h, τ des génératrices du contour apparent vertical du cône en prenant la rencontre de l'hyperbole et du diamètre conjugué aux cordes verticales.

Le tracé général appliqué aux génératrices dont les traces sont h, τ a été exécuté sur notre épure; il a donné les points s', σ', r', μ' placés sur le contour apparent vertical du cône.

On mènera ensuite par o des tangentes $o\theta_1$, $o\theta_2$ à H, H_1 et on cherchera les points de la courbe placés sur ces tangentes; ces points seront ceux du contour apparent horizontal de la surface conique.

851. Point du contour apparent vertical de la sphère. — On adopte pour plan auxiliaire le plan de front mené par o,o'; ce plan rencontre la sphère suivant le cercle projeté en γ'_1 sur le plan vertical; il rencontre le cône suivant les génératrices $(oh_2, o'h'_2)$, $(o\tau_2, o'\tau'_2)$; les points de rencontre (v, v'), (u,u'), (p, p'), (q, q') de ces lignes d'intersection sont ceux que nous voulions construire.

852. Points du contour apparent horizontal de la sphère. — On coupe par le plan horizontal mené par o, o'; les intersections sont : sur la sphère le cercle projeté horizontalement en γ, sur le cône deux parallèles à A, A_1 menées par o. Les points a_1, a_2, a_3, a_4 en lesquels les projections horizontales de ces intersections se coupent sont les projections horizontales des points qu'il fallait construire; leurs projections verticales se trouvent en a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, sur la trace verticale Q' du plan auxiliaire.

853. Points doubles en projection verticale. — Les plans diamétraux conjugués aux cordes per-

pendiculaires au plan vertical sont : pour la sphère, le plan de front mené par o, o'; pour le cône, le plan mené par ce même point o, o' et par la droite h_T du plan horizontal. L'intersection de ces deux plans passe par o, o' et par ψ, ψ'; la droite des points doubles en projection verticale est donc $\psi' o'$.

Pour trouver les points doubles eux-mêmes, considérons les projections horizontales $o\psi_1$, $o\psi_2$ des génératrices du cône dont $o'\psi'$ est la projection verticale commune, et appliquons à ces génératrices le tracé ordinaire : nous trouverons ainsi les points (ε', δ'), qui sont les points doubles de la projection verticale et leurs projections horizontales correspondantes δ_1, δ_2, ε_1, ε_2.

854. Points doubles en projection horizontale. — C'est maintenant la projection horizontale de la rencontre des plans diamétraux conjugués aux cordes verticales qui fait connaître la droite des points doubles.

Pour la sphère, le plan diamétral est le plan horizontal dont la trace verticale se trouve en Q'; pour le cône, c'est le plan mené par o, o' et par la polaire $\theta_1\theta_2$ du point o par rapport à H, H_1.

La projection horizontale de l'intersection de ces plans passe par o et est parallèle à $\theta_1\theta_2$. Cette parallèle doit passer par les points doubles φ, φ_1. La construction complète des points doubles se ferait par le tracé qui sert à trouver un point quelconque de la courbe commune aux surfaces données.

855. Points le plus haut et le plus bas. — En ces points les traces horizontales des plans tangents sont parallèles (§ **577**) ; au surplus, la trace horizontale du plan tangent à la sphère doit être perpendiculaire à la projection horizontale de la génératrice du cône qui passe par le point de contact ; en conséquence cette projection horizontale doit être normale à H, H_1. On obtiendra donc les points cherchés en opérant comme à l'ordinaire sur les génératrices du cône dont les projections horizontales passent par o et sont normales à l'hyperbole donnée.

856. Représentation du corps. — Finalement on a représenté la partie du cône solide comprise dans la sphère.

857. Développement du cône. — La section qu'on vient de construire se développe suivant un arc de cercle ; des abcisses comptées sur cette ligne, et les ordonnées mesurées sur les génératrices du cône, peuvent servir à construire la transformée par développement d'une ligne quelconque tracée sur le cône. La vraie grandeur des abcisses s'obtiendra en effectuant préalablement le développement du cylindre vertical projetant de la courbe d'intersection que l'on vient de déterminer.

La méthode indiquée dans l'alinéa précédent est générale et peut servir à développer un cône quelconque.

858. Problème XXII. — *Construire la rencontre d'un ellipsoïde aplati dont l'axe est vertical, avec un cylindre dont l'axe, dirigé parallèlement à la ligne de terre, passe par le centre de l'ellipsoïde ; on représentera le cylindre entaillé par l'ellipsoïde.*

Soient (*fig.* 420, pl. LVIII) : z, z' l'axe de l'ellipsoïde ; o', z son centre ; ε', ε les projections de sa courbe méridienne. L'axe du cylindre est la parallèle z'_1, z_1 à la ligne de terre menée par z, o', et cette dernière surface se trouve représentée sur notre épure par ses contours apparents.

D'après un théorème démontré (§ **783**) la projection verticale de l'intersection est une ellipse ; on voit facilement (§ **758**) que sa projection horizontale est une hyperbole.

La figure suffit pour indiquer les constructions : a', b', c', d' sont les sommets de l'ellipse ; s_1, s_2 sont ceux de l'axe transverse de l'hyperbole, on a construit, en outre, quatre points a_1, a_2, c_1, c_2 de cette hyperbole.

859. Tangentes aux points limites de la projection horizontale de l'intersection. — Au point a_1, a', par exemple, la tangente est verticale, elle se projette horizontalement en un point et ne fait pas connaître la tangente à la projection de même nom de la courbe. Pour obtenir cette tangente, nous appliquerons la méthode du paragraphe **778**.

La normale à la courbe ε', au point voisin du sommet s', rencontre l'axe $o's'$ en un point qui, lorsque ce point voisin tend vers s', tend lui-même vers le centre de courbure o'_2 au sommet s' de l'ellipse ε', centre que l'on sait construire (§ **137**). Au point o'_2 correspond o_2, ce point o_2 vient en o_1, lorsqu'on fait tourner la figure autour de z, z' pour amener s, s' en a_1, a'. La normale menée au cylindre par a_1, a' rencontre z_1, z_1' en un point dont la projection horizontale se trouve à la rencontre ω de z_1 avec a_1a_2. A la limite la trace du plan des deux normales sur le plan horizontal mené par $o'z'_1$ a pour projection horizontale la droite ωo_1; conséquemment, la tangente cherchée s'obtient en menant par a_1 une perpendiculaire a_1t sur ωo_1; les projections horizontales des tangentes aux points (c_1, c'), (c_2, c'), (a_2, a'), s'obtiendront à l'aide de la symétrie de la figure.

860. Problème XXIII. — *Représenter le corps constitué par la partie d'un hyperboloïde de révolution extérieure à un cône et comprise entre deux plans horizontaux équidistants du collier, dont l'un est le plan horizontal de projection. L'hyperboloïde est défini par son axe, supposé vertical, par sa trace horizontale γ, par la projection horizontale γ_1 de son collier, et par l'angle de ses génératrices avec le plan horizontal, qui est de* 45 *degrés.*

Le cône a son sommet s dans le plan horizontal de projection; ses génératrices sont parallèles à celles de l'hyperboloïde (fig. 421, pl. LVIII).

Dans ce qui va suivre il ne sera question que de projection horizontale.

861. Recherche d'un point quelconque de la courbe d'intersection. — On peut employer : 1° des plans auxiliaires horizontaux; 2° des plans menés par les génératrices de l'hyperboloïde et le sommet du cône.

Première méthode. — Les plans horizontaux ont été employés pour déterminer les points extrêmes de la courbe et ceux du contour apparent horizontal de l'hyperboloïde. Les premiers ont leurs projections horizontales au point de rencontre e, f de la projection horizontale γ du cercle supérieur qui doit limiter l'hyperboloïde, et d'un cercle γ_2, dont le rayon est égal à la longueur de la projection horizontale $\theta_1\theta_2$ de la portion d'une génératrice de l'hyperboloïde comprise entre les deux cercles de cette surface projetés sur γ.

Les projections des points du collier sont à la rencontre a, b de γ_1 avec le cercle γ_3 de centre s et dont le rayon a pour longueur la moitié de $\theta_1\theta_2$.

Deuxième méthode. — Soient θ_3, θ_4 les projections des points de rencontre d'une génératrice rectiligne de l'hyperboloïde avec les cercles, qui limitent à la partie inférieure et à la partie supérieure cet hyperboloïde.

Menons par cette génératrice et par s un plan sécant auxiliaire; sa trace horizontale est $s\theta_3$ et sa rencontre avec l'hyperboloïde comprend la génératrice choisie et une génératrice de système différent dont la trace horizontale est t, laquelle se projette sur la tangente tg à γ_1. Les projections des génératrices de rencontre du plan auxiliaire et du cône sont les droites sk, sl menées par s dans les deux directions $\theta_3\theta_4$, tg. Ces quatre droites s'entrecoupent en quatre points dont deux sont à l'infini; les deux autres ont pour projection m, m_1; ces derniers sont deux points de passage de la courbe à construire.

862. Nature de la courbe d'intersection. — Branches infinies. — Asymptotes. — Les deux

surfaces sont homothétiques et du second degré, la courbe d'intersection est donc aussi du second degré (§ 760).

Voyons si les points m, m_1 peuvent passer à l'infini ; cela aura lieu lorsque les droites sk, sl se confondront et seulement dans ce cas; les droites $\theta_3\theta_4, tg$ deviendront alors parallèles et le plan sécant auxiliaire sera tout à la fois tangent au cône et tangent à l'infini à l'hyperboloïde; en conséquence ce plan passera par le centre du collier. Menons donc par ce centre des plans tangents au cône, les projections de leurs traces sur le plan du collier sont les tangentes zi, zh menées du point z au cercle γ_3 et celles des génératrices de contact sont si, sh; ces deux dernières déterminent les directions asymptotiques de la section, qui est, par suite, une hyperbole.

Cherchons les asymptotes : la projection de la trace sur le plan du collier du plan tangent au cône suivant la droite projetée en si est la droite zi; la projection de la trace du plan de la courbe d'intersection sur ce même plan est ab; ces droites se croisent en d qui est la projection d'un point de passage de l'une des asymptotes cherchées, cette asymptote est donc projetée sur la parallèle dd_1 menée par d, à si. L'autre asymptote cc_1 a été obtenue de même.

863. Sommets de la projection et projection des sommets. — Ces points sont, par raison de symétrie, sur les génératrices du cône projetées en sz; pour les construire on a mené à la projection du collier une tangente $\theta_1\theta_2$ parallèle à sz; les deux couples de droites qui correspondent dans l'espace à ces parallèles déterminent deux plans dont on a figuré les traces horizontales $s\theta_1$, $s\theta_2$; ces plans coupent l'hyperboloïde suivant quatre génératrices, dont deux se confondent en projection avec $\theta_1\theta_2$; les deux autres ont pour projections t_1g_1, t_2g_2, et leurs points de croisement σ_1, σ_2 avec sz, sont ceux qu'il fallait construire.

On a représenté le corps constitué par la partie solide de l'hyperboloïde placée à l'extérieur du cône.

864. Problème XXIV. — On donne :

1° *Un cylindre qui a pour trace horizontale et pour contour apparent relatif au plan vertical le cercle* γ *et les droites de front* θg, $\theta' g'$; sb_1, $b'b'_1$ (*fig.* 422, pl. LIX);

2° *Un cône dont la trace horizontale est un autre cercle* γ_1 *qui touche au point* s *et dont le sommet* s, s' *se trouve situé sur la génératrice* θg, $\theta' g'$, *du cylindre.*

On demande : 1° *de trouver les projections de l'intersection du cône et du cylindre ;* 2° *de représenter le cylindre supposé plein et existant seul, en supprimant les parties de ce corps comprises dans le cône.*

865. Construction des points quelconques de l'intersection. — La parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône a pour trace horizontale le point θ; ce point est le sommet du faisceau des traces de même nom des plans auxiliaires.

Soit P la trace horizontale d'un plan auxiliaire quelconque ; ce plan détermine sur le cylindre les deux génératrices $(\theta g, \theta' g')$, $(tg_1, t'g'_1)$, et sur le cône deux autres génératrices dont les projections horizontales sont st_1, st_2 ; on en déduit deux points (m, m') (m_1, m'_1) de l'intersection.

866. Points sur les lignes des contours apparents. — On les obtient par le procédé général en ayant soin de faire passer les plans auxiliaires par les droites qui forment ces contours. La construction de l'un d'eux a, a' est seule indiquée sur notre épure; on l'a effectuée par le secours du plan dont P_1 est la trace horizontale.

867. Tangente en un point quelconque. — On a choisi le point m_1, m'_1. Les plans tangents aux deux surfaces en ce point ont pour traces horizontales R, Q, et, par le croisement h, h' de ces traces, on obtient un point de passage de la tangente cherchée, dont les projections sont par suite hm_1, $h'm'_1$.

868. Tangentes au point double. — Le plan tangent au cylindre mené par le sommet du cône

rencontre cette dernière surface suivant deux génératrices ($s'\theta'$, $s\theta_1$) ($s'\theta'$, θs_2), qui sont les tangentes au point double s, s' (§ **742**).

869. Tangentes aux points de rebroussement de seconde espèce de la projection verticale de l'intersection. — Ces points de rebroussement b', b'_1 sont ceux qui correspondent à la rencontre des contours apparents relatifs au plan vertical, et les tangentes en ces points ne sont pas les projections des tangentes à la courbe d'intersection; faisons voir que la méthode de Binet leur est applicable.

Soient M un point de l'une des surfaces données (fig. r_5) et μ un des deux cercles qui passent par ce point; du centre o de ce cercle menons une perpendiculaire oz à son plan et démontrons

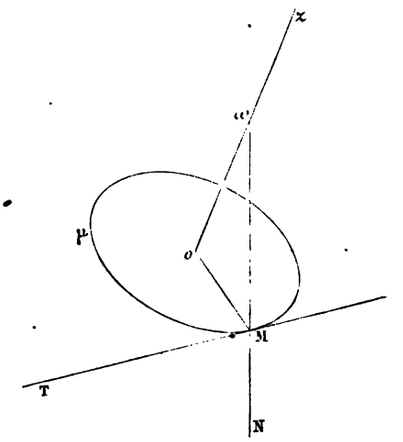


Fig. r_5.

que la normale N, menée par M à la surface considérée, rencontre nécessairement oz.

Effectivement, la tangente T à μ, en M, est perpendiculaire à z et au rayon oM, elle l'est donc aussi au plan de ces deux droites, et comme N est également perpendiculaire à T, les droites N et oz sont dans un même plan ; c'est ce qu'on voulait établir.

Dans le cas de notre épure le point de rencontre ω des droites oz, N, sera toujours dans le plan vertical que les deux surfaces données ont en commun; on voit par là que la trace sur ce plan de symétrie du plan des deux normales menées en un quelconque des points de l'intersection se peut obtenir sans peine, et qu'on peut en déduire la construction de la projection verticale des tangentes cherchées.

Appliquons ce tracé au point b'_1 : pour le cylindre comme pour le cône, l'un des cercles passant par le point B_1 se projette verticalement sur la parallèle à la ligne de terre menée par b'_1 ; il est aisé d'obtenir les projections verticales c', c'_1 des centres de ces cercles, et de mener par ces points des verticales; après quoi on élève en b'_1 des perpendiculaires aux lignes des contours apparents qui passent par ce point; ces perpendiculaires sont les projections verticales des normales, elles rencontrent aux points ω', ω'_1 les verticales menées par les centres correspondants; il en résulte que la perpendiculaire $b'_1\tau'_1$ menée de b'_1 sur la droite qui unit ω', ω'_1, est la tangente cherchée.

On a procédé de la même manière en b' afin d'obtenir la tangente $b'\tau'$ au second point de rebroussement.

870. Branches infinies, asymptotes et genre de la projection verticale. — La projection verticale est une conique (§ 758); examinons si elle a des branches infinies.

Les plans horizontaux coupent les surfaces suivant des cercles, et les projections verticales des points de l'intersection sont aux pieds des axes radicaux de ces cercles sur le plan de projection de même nom; mais, dans chacun de ces plans horizontaux, les cercles ont en commun les points circulaires à l'infini du plan, donc la ligne de terre est une direction asymptotique. L'asymptote correspondante est la trace verticale du plan horizontal dans lequel l'axe radical des deux cercles se trouve rejeté à l'infini; on en obtient un point par la rencontre f' des projections verticales $o's'$, $o'_1l'_1$ des diamètres conjugués aux sections horizontales dans les deux surfaces; la parallèle $f'k'$ à la ligne de terre menée par ce point fait donc connaître cette asymptote.

Cherchons l'autre asymptote : sa direction sera donnée par la trace verticale d'un plan perpendiculaire au plan vertical et découpant sur les surfaces données des sections homothétiques. Pour déterminer ce plan, transportons le cône homothétiquement, de manière à le faire passer par la trace horizontale du cylindre; le nouveau cône a pour contour apparent en projection verticale la droite $b's'$ et la parallèle menée à $s'h'_1$ par θ'; son sommet se projette verticalement au point de croisement o' de ces deux droites.

Les deux surfaces qui ont une base commune se coupent suivant une deuxième courbe plane (§ 752), dont $s'p'$ est la projection verticale; par conséquent, le plan perpendiculaire au plan vertical mené par $s'p'$ est celui que nous cherchions; la seconde asymptote a donc pour direction $s'p'$.

En joignant o' au milieu q' de $s'p'$ et menant par s' une parallèle à $o'q'$, on a la projection verticale $s'q'_1$ du lieu des centres des sections que détermineraient des plans perpendiculaires au plan vertical et parallèles à $s'p'$, dans le cône donné.

Prenons la rencontre u' des droites $o'_1l'_1$, $s'q'_1$ et menons par ce point une parallèle $u'v'$ à $s'p'$; comme le plan vertical mené par $u'v'$ détermine sur les surfaces données des sections homothétiques et concentriques, la droite $u'v'$ est l'asymptote qu'il fallait construire.

La projection verticale de la ligne commune aux deux surfaces est une hyperbole dont on a, par le secours des propriétés segmentaires, construit les parties parasites.

871. Problème XXV. — *Construire les projections de l'intersection d'un tore et d'un cône de révolution. L'axe du tore ω, z' (fig. 423, pl. LIX) est vertical à 0^m, 130 du plan vertical de projection; le cercle méridien a 0^m, 055 de rayon, il est tangent à l'axe du tore et au plan horizontal de projection. Le cône touche le plan horizontal suivant une génératrice $s\omega$ parallèle à la ligne de terre et rencontrant l'axe du tore; son sommet s est à 0^m, 055 de l'axe du tore et son angle au sommet est de 45 degrés.*

On représentera le cône supposé plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le tore $\left(\text{échelle adoptée } \frac{3}{5}\right)$.

872. Contours apparents des surfaces. — Les contours apparents du tore s'obtiennent comme d'habitude. Quant au contour apparent vertical du cône, il comprend la ligne de terre et une droite $s'j'$ qui passe par le point de contact des cercles générateurs et de l'axe du tore; la bissectrice $s'z'_1$ de l'angle $j's'h'$ fait connaître la projection verticale de l'axe du cône.

Construisons maintenant le contour apparent horizontal du cône; à cet effet, traçons les contours apparents ε', ε d'une sphère inscrite dans le cône et dont le centre se trouve au point de croisement ω, ω' des axes; puis nous mènerons par s, au cercle ε, deux tangentes $s\tau$, $s\tau_1$ qui seront les lignes cherchées; la projection verticale $s'\tau'$ de ces droites s'obtient en unissant s' au point de croisemen

des projections verticales $k'k'_1$, $k'_2k'_3$ d'un contour apparent horizontal de la sphère et de la courbe de contact de cette sphère avec le cône.

873. Construction d'un point quelconque de l'intersection. — Les deux surfaces sont de révolution et leurs axes se croisent au point ω, ω' ; coupons-les donc par une sphère ayant ce point pour centre. Soit γ' le contour apparent sur le plan vertical de cette sphère; ses rencontres avec le cône sont projetées verticalement suivant les droites $a'b'$, $a'_1b'_1$; celles avec le tore ont leurs projections de même nom en $c'd'$, $e'f'$; aux points de croisement de ces droites on a les projections verticales m'_1, m'_2, m'_3, m'_4 de quatre points de la ligne commune.

Cherchons les points de la projection horizontale qui correspondent à m'_1 : au point f' correspond f, et la projection horizontale du parallèle projeté verticalement en $e'f'$ est un cercle de centre ω passant par f; les points de croisement m, m_1 de ce cercle avec la ligne de rappel issue de m'_1 sont ceux que nous cherchions.

874. Points parasites de la projection verticale. — Dans le précédent tracé, trois des points trouvés en projection verticale m'_2, m'_3, m'_4, sont extérieurs au tore et au cône, ce sont donc des points parasites de l'une des courbes à construire.

875. Tangente à la courbe d'intersection. — Cherchons la tangente en m_1, m'_1; c'est la perpendiculaire au plan des normales qui aboutissent en ce point; l'une de ces normales a pour projections $(m'_1\omega'_1, m_1\omega)$, l'autre croise l'axe du cône en σ', σ; la droite $\sigma'\omega'_1$ est la projection verticale d'une ligne de front du plan des deux normales, et la projection horizontale d'une horizontale de ce plan se fait en σg ; de sorte que les projections des tangentes sont les perpendiculaires m'_1t', m_1t menées respectivement des points m'_1, m_1 à $\sigma'\omega'_1$, σg.

876. Points placés sur les contours apparents du cône. — Pour le plan vertical, il est manifeste à priori que les points cherchés sont s', h', i' et j'.

Quant aux points sur le contour apparent horizontal du cône on s'est borné à les vérifier.

Pour cela, après avoir tracé la projection verticale de la courbe commune, nous avons pris sa rencontre λ' avec $s'\tau'$, et nous avons mené par ce point une ligne de rappel; cette ligne doit passer par les points λ, λ_1 en lesquels le contour apparent horizontal du cône touche la projection de même nom de la courbe d'intersection.

877. Points placés sur les contours apparents du tore. — Ceux du contour apparent vertical ont déjà été obtenus et ceux δ, δ_1 du contour apparent horizontal s'obtiennent au moyen de la méthode générale en employant la sphère dont le contour apparent vertical est γ'_1.

878. Point double dans l'espace. — Le plan tangent au cône en h',h touche le tore, ce point est donc un point double de la courbe de l'espace.

879. Point triple en projection horizontale. — Le point double h, h' et le point i', h ont une projection horizontale commune h; ce point h est donc un point triple de la projection horizontale de l'intersection.

880. Sphères limites. — Points limites. — Ces sphères, dont les contours apparents en projection verticale sont γ'_2, ε', touchent respectivement le tore et le cône suivant des cercles projetés verticalement en $w'w'_1$, $k'_2k'_3$ et coupent respectivement le cône et le tore suivant d'autres cercles projetés verticalement en $r'r'_1$, $r'_2r'_3$, $u'u'_1$, $u'_2u'_3$: elles font connaître les projections verticales ρ', ρ'_1, n', p' des points limites, et, d'après la propriété générale des surfaces limites, leurs tangentes $r'r'_1$, $r'_2r'_3$, $u'u'_1$, u'_2u_3, respectives.

A la droite $u'u'_1$ et au point n' correspondent le cercle décrit sur uu_1 comme diamètre et les points

n, n_1 ; en ces points la courbe sera, d'après la propriété précitée, tangente au cercle unu_1n_1 ; autrement dit, les points n, n_1 sont les points de la projection horizontale les plus voisins de l'axe du tore.

Points le plus haut et le plus bas. — D'après ce qui vient d'être dit, ces points sont :

$$(n', n), (n', n_1), (s', s), (h', h), (i', h).$$

Les points i'_1, p' sont les points le plus haut et le plus bas de l'arc parasite en projection verticale.

881. Point de rebroussement. — Le théorème du paragraphe **742** permet de dire immédiatement que le sommet s, s' du cône est un point de rebroussement, et que la tangente correspondante se confond avec la génératrice sh, $s'h'$ de ce même cône.

882. Point isolé. — ω, j' est évidemment un point isolé de la courbe d'intersection.

883. Représentation du solide. — La figure suffit pour faire comprendre la forme du solide représenté, nous dirons seulement que, sur la projection verticale, l'arc parasite de la courbe d'intersection a été tracé en ligne mixte (§ **21**).

884. Problème XXVI. — *Par un point* (ω', z) (*fig.* **424**, pl. LVII) *situé dans le premier dièdre à* 100 *millimètres de chacun des plans de projection, on mène une parallèle* (z'_1, z_1) *à la ligne de terre et une verticale* (z, z').

La parallèle à la ligne de terre est l'axe d'un tore dont le cercle méridien, tangent à cet axe en (ω', z), *a* 45 *millimètres de rayon.*

La verticale est l'axe d'un second tore concentrique au premier, dont le rayon du cercle méridien, égal à celui de son collier, vaut 30 *millimètres.*

On demande de construire les projections de l'intersection des surfaces ainsi définies. On représentera le corps constitué par l'ensemble des deux tores $\left(\text{échelle adoptée } \frac{3}{5}\right)$.

Soient c', c'_1 les projections verticales des centres de deux cercles méridiens de front des deux surfaces ; on a :

$$c'c'_1 = \sqrt{45^2 + 60^2} = 75 = 30 + 45.$$

Ces deux cercles sont donc tangents, puisque la distance des centres est égale à la somme des rayons.

885. Construction des points quelconques de la ligne commune. — Coupons les deux tores par une sphère de centre ω', z ; soit γ' son contour apparent vertical. Cette sphère détermine sur les tores quatre cercles projetés verticalement en $\mu'\mu'_1$, $\mu'_2\mu'_3$, $\mu'_4\mu'_5$, $\mu'_6\mu'_7$; deux de ces cercles sont horizontaux et ont pour projection horizontale commune le cercle décrit sur $\mu\mu_1$ comme diamètre.

Les points de rencontre de ces cercles ont pour projections m'_1, m'_2, m'_3, m'_4 ; m_1, m_2, m_3, m_4 ; ces projections font connaître des points de l'intersection des deux tores.

886. Sphères limites. — Elles ont pour contours apparents sur le plan vertical les cercles γ'_1, γ'_2, et leurs rencontres avec les tores sont projetées verticalement en $d'f'$, $a'b'$, $k'k'_1$, $l'l'_1$, $n'n'_1$, on en déduit les projections verticales ω', g', h' des points cherchés ; leurs projections horizontales sont en ω_1, ω g_1, g $_2$, h_1, h_2.

D'après la propriété des surfaces limites les tangentes aux points limites (g', g_1), (g', g_2), (h', h_1), (h', h_2) sont verticales.

887. Points de rebroussement en projection horizontale. — Nous venons de voir que les tangentes aux points (g', g_1), (g', g_2), (h', h_1), (h', h_2) sont verticales ; on en conclut que les points g_1, g_2, h_1, h_2 ont des points de rebroussement de la projection horizontale ; de plus, à cause de la symétrie de la figure, les deux branches des rebroussementsse recouvrent.

888. Points doubles. — En (ω', ω_1), (ω', ω_2) les plans tangents aux deux tores sont communs, il en résulte que ces points sont des points doubles de l'intersection. En outre, les deux tores se touchent encore en quatre points (δ, δ'), (δ, δ'_1), (δ_2, δ'_2), (δ_2, δ'_3), qui sont encore des points doubles de la ligne commune.

889. Points sur les contours apparents. — Nous avons déjà construit plusieurs de ces points, indiquons le tracé des autres. On les obtient par l'emploi des sphères dont les contours apparents verticaux sont γ'_3, γ'_4; la première de ces sphères passe par les deux parallèles qui font partie du contour apparent du tore dont l'axe est z'_1, z_1; elles coupent les deux tores suivant les cercles projetés en $p'_1p'_2$, $p'_3p'_4$, $n'_1\,n'_2$, $n'_3n'_4$ et fait connaître quatre points q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, des contours apparents en projection verticale. La deuxième de ces sphères donne lieu à un tracé semblable.

890. Tangente en un point quelconque (m'_1, m_1). — Appliquons la méthode de Binet : les normales aux divers points du parallèle $\mu'\mu'_1$, $\mu\mu_1$ passant par le point de croisement (r', z) des droites $(\mu'c'_1, \mu z)$, (z', z), l'une des deux normales cherchées est donc m'_1r', m_1z; l'autre normale rencontre z'_1, z_1 au point s', s.

Le plan des deux normales rencontre celui des deux axes suivant la droite zs, $r's'$, par suite la projection verticale de la tangente cherchée n'est autre que la perpendiculaire m'_1t', menée de m'_1 à la droite $s'r'$.

Quant à la projection horizontale correspondante, elle se peut obtenir en coupant au préalable le plan des deux normales par le plan horizontal de même niveau que m_1, m'_1, et en menant par m_1 une perpendiculaire à la projection horizontale m_1u de l'intersection de ces plans.

891. Problème XXVII. — *Construire les projections de l'intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'un cône.*

L'axe z, z' (fig. 425, pl. LX) *de l'hyperboloïde est vertical à* $0^m,100$ *du plan vertical et au milieu de la feuille; le cercle de gorge c, c', dont la cote vaut* $0^m,080$ *a* $0^m,030$ *de rayon, et les génératrices rectilignes de cette surface font avec l'horizon un angle de* 45 degrés.

Le cône, dont les sommets s,s' se trouvent dans le plan de profil mené par l'axe z,z', a $0^m,050$ *en avant de cet axe, et à* $0^m,040$ *au-dessus du cercle de gorge, a pour trace horizontale le cercle* γ *décrit du point z comme centre, avec un rayon égal à* $0^m,070$.

On représentera l'hyperboloïde supposé plein et limité, d'une part, au plan horizontal dont la trace est Q', *à la cote* $0^m,190$, *de l'autre, au plan horizontal de projection, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cône* $\left(\text{échelle adoptée } \frac{3}{5}\right)$.

A l'aide des données on peut immédiatement tracer les projections (g', g), (g'_1, g) de deux génératrices principales de l'hyperboloïde, la trace horizontale γ_1 de cette surface, ainsi que le contour apparent vertical du cône. On vérifie sans peine que le sommet du cône se trouve sur la surface de l'hyperboloïde; par ce sommet, il passe donc deux génératrices rectilignes de l'hyperboloïde, et les plans contenant l'une de ces droites couperont le cône et l'hyperboloïde suivant des lignes droites; on peut donc les employer comme surface auxiliaire.

Il est également facile d'obtenir les points de l'intersection en coupant les deux surfaces par des plans auxiliaires horizontaux.

Nous appliquerons le premier procédé à la détermination des points quelconques de l'intersection, et le second à la construction des points de cette intersection placés sur le collier de l'hyperboloïde, et sur le plan horizontal dont la trace est Q'.

892. Construction des points quelconques de la ligne commune. — L'une des tangentes au cercle menée par cs fait connaître le point de concours θ des traces horizontales des plans sécants auxiliaires; soit P l'une de ces traces horizontales. Le plan correspondant coupe l'hyperboloïde suivant des génératrices dont les traces horizontales se trouvent aux points de rencontre θ, h_3 de P avec la trace de même nom de l'hyperboloïde, et dont les projections horizontales sont les tangentes $\theta s, h_3 g_2$ au cercle c. Le même plan auxiliaire coupe le cône suivant des génératrices dont les traces horizontales sont aux points de croisement h_1, h_2 de γ avec P; par suite $h_1 s$, $h_2 s$ sont les projections horizontales de ces génératrices.

Les points de rencontre de ces projections déterminent deux points m_1, m_2 de la projection horizontale de la courbe commune aux surfaces données.

Le point h_2 a pour projection verticale h'_2 et à la droite $h_2 s$ correspond $h_2' s'$, cette dernière rencontre la ligne de rappel menée par m_2 au point m'_2, qui est la projection verticale du point de l'intersection correspondant à m_2; on obtiendrait de même la projection verticale qui correspond à m_1.

893. Points sur les contours apparents. — Joignons le point θ aux traces horizontales τ_1, τ_2 des génératrices du contour apparent vertical du cône par les droites P_1, P_2; en appliquant le tracé général aux plans qui ont ces droites pour traces horizontales, nous obtiendrons les points cherchés (n_1, n'_1), (n_2, n'_2).

Arrivons maintenant à la détermination des points placés sur c, c': la cote du cercle c, c' est égale aux deux tiers de celle du point s, s', il s'ensuit que la projection horizontale de l'intersection du cône avec le plan du collier est un cercle, dont le centre ω se trouve au tiers de sz à partir du point s, et dont le rayon est égal au tiers de celui de base du cône; ayant tracé ce cercle on a pris ses intersections u_1, u_2 avec c, qui sont les points cherchés; ils se relèvent en u'_1, u'_2 sur la projection verticale c' du collier.

894. Tangente en un point quelconque. — Au point choisi (m_2, m'_2) le plan tangent au cône a pour trace horizontale la tangente R menée par h_2 à la base γ de ce cône.

Au même point, la trace horizontale du plan tangent à l'hyperboloïde est la droite $h_3 h_4$; par la rencontre τ, τ' de ces droites, on a un second point de passage de la tangente cherchée, et les droites τm_2, $\tau' m_2'$ sont les projections de cette tangente.

895. Point double. — Le point s, s' est un point double de l'intersection (§ **742**) et les tangentes en ce point sont les lignes $(\theta_1 s, \theta'_1 s')$, $(\theta_2 s, \theta'_2 s')$ suivant lesquelles le plan tangent à l'hyperboloïde en s, s' rencontre le cône.

896. Branches infinies. — Les points à l'infini de la courbe étudiée se trouvent sur les génératrices du cône qui font un angle de 45 degrés avec le plan horizontal; or, la cote du point s, s' est égale à $0^m,12$ et les parties des génératrices du cône comprises entre le sommet et leurs traces horizontales ont en projection horizontale pour longueur maximum st, qui vaut précisement $0^m,12$; on en conclut que la génératrice projetée horizontalement en st est parallèle à deux génératrices de l'hyperboloïde, et que les autres génératrices du cône font avec le plan horizontal des angles supérieurs à 45 degrés; conséquemment st, $s't'$ est la direction asymptotique unique de l'intersection. Nous eussions pu le reconnaître par la méthode générale, en transportant le cône asymptote de l'hyperboloïde parallèlement à lui-même, afin de placer son sommet en s, s'; ce qui nous eût amenés à reconnaître que le cône asymptote ainsi déplacé devient tangent au cône donné suivant st, $s't'$.

Les plans tangents au cône et à l'hyperboloïde, menés par le point à l'infini de la droite st, $s't'$, sont

évidemment entre eux parallèles; par suite, l'asymptote de la courbe commune est rejetée à l'infini dans la direction st, $s't'$.

897. Points situés dans le plan horizontal qui limite à la partie supérieure l'hyperboloïde. — Pour les trouver, adoptons le plan sécant auxiliaire horizontal dont Q' est la trace; il coupe l'hyperboloïde suivant un parallèle dont la projection horizontale a z pour centre et q pour un de ses points de passage; cette projection est donc facile à tracer.

Le plan auxiliaire coupe le cône suivant un cercle dont la projection verticale est évidemment $b'c'$, dont la projection horizontale a pour rayon la moitié de $b'c'$ et passe par la projection horizontale a du point de rencontre de la droite st, $s't$ et du plan auxiliaire; ce point a s'obtient en reportant simplement la cote $t'o'$, en ta. Actuellement on peut tracer la projection horizontale du cercle cherché, puisque le centre de ce cercle doit, à cause de la symétrie de la figure, se trouver sur la droite az, par suite les points limites cherchés sont déterminés par les rencontres (d, d') (f, f') des cercles que nous venons de construire.

898. Problème XXVIII. — *On donne une sphère tangente aux deux plans de projection; dans le plan d'un cercle de front de cette sphère, à une distance du centre de ce cercle égale à la moitié du rayon du même cercle, on mène une verticale ab, $a'b'$ (fig. 426, pl. LX); sur la partie de cette verticale comprise entre son point supérieur de rencontre avec la sphère et le plan horizontal de projection on construit un triangle équilatéral, et on demande de représenter le corps formé par la portion de la sphère solide extérieure au double cône qu'engendre le triangle équilatéral en tournant autour de son côté vertical.*

Mettons en place : la sphère ainsi que son centre c, c'; le cercle de front dd_1,$d'd'_1$ et la verticale ab, $a'b'$ sur laquelle on doit construire le triangle générateur du double cône. Ensuite construisons sur $a'b'$ deux triangles équilatéraux $a'b'f'$, $a'b'g'$, qui constitueront le contour apparent vertical de ce double cône.

Observons immédiatement que, d'après la position particulière de la verticale $a'b'$, la ligne $b'f'$ est tangente au cercle $d'b'd'_1$, il en résulte que la droite $b'f'$, bf touche tout à la fois la sphère et la courbe d'intersection.

899. Construction d'un point quelconque de la courbe commune. — On a simplement coupé les deux surfaces par le plan horizontal dont la trace est P' : sur l'un des cônes ce plan auxiliaire détermine une intersection circulaire dont k', k est un point de passage et dont le centre a pour projection horizontale a; avec ces éléments on peut tracer la projection horizontale de ce cercle. Sur la sphère on trouve un autre cercle dont la projection horizontale a pour centre c et dont l, l' est un point de passage. La projection horizontale de ce dernier cercle une fois tracée, ses rencontres avec la projection de même nom du premier feront connaître deux points m_1, m_2 de la projection de même nom de la courbe cherchée, les points correspondants m'_1,m'_2 de la projection verticale s'obtiennent par les rencontres de P' avec les lignes de rappel menées par m_1, m_2.

900. Tangente à la ligne commune en m_2, m'_2. — Les surfaces sont de révolution, il y a donc lieu d'employer la méthode des normales: les normales menées par m_2, m'_2 à la sphère et au cône passent respectivement par les points (c, c'), (a, a'), et le plan de ces normales rencontre le plan de front mené par c, c' suivant cq, $c'q'$; en conséquence, la projection verticale de la tangente n'est autre que la perpendiculaire m'_1t' à $c'q'$.

Le plan horizontal mené par c,c' rencontre celui des normales suivant la droite $c'r'$, cr, et la perpendiculaire m_2t, menée par m_2 à cr, fait connaître la seconde projection de la tangente cherchée.

901. Point double et tangente en ce point. — D'après le théorème démontré au paragraphe 742

b', b est un point double de la courbe étudiée et $b'k'_1$, bk_1 fait immédiatement connaître l'une des tangentes en ce point. Pour obtenir l'autre tangente, il suffit de construire la seconde ligne de rencontre du cône et du plan tangent à la sphère menée par b, b'; ce plan contient bk_1, $b'k'_1$, il coupe le plan horizontal dont P' est la trace suivant une droite projetée horizontalement sur la perpendiculaire k_1k_2 menée de k_1 à la droite cb; la rencontre k_2, k'_2 de cette perpendiculaire et du cercle kk_1, $k'k'_1$ fait connaître un point de la tangente cherchée; les projections de cette tangente sont donc k_2b, k'_2b'.

902. Points sur le contour apparent vertical du double cône. — On obtient ces points en employant, comme plan auxiliaire, le plan de front dont la trace est af; il rencontre : la sphère suivant le cercle dd_1, $d'd'_1$, le double cône suivant les lignes du contour apparent des deux cônes; par les rencontres des intersections que nous venons de déterminer on trouve les points (b, b'), (d, d'), (i, i'), (h, h') qu'il fallait construire; en ces points la projection verticale de la courbe étudiée devra toucher les lignes du contour apparent du double cône en projection verticale.

903. Points sur la base commune aux deux cônes. — Ces points, projetés en (n_1, n'_1), (n_2, n'_2), ont été obtenus par le tracé général (§ 899).

904. Points le plus haut ou le plus bas. — Ces points sont situés dans le plan vertical dont la trace horizontale est ca (§ 417); pour les trouver adoptons ce plan vertical comme plan auxiliaire, et faisons-le tourner autour de $a'b'$, ab afin de le rendre parallèle au plan vertical; sa rencontre avec le double cône vient se placer sur le contour apparent vertical de ce cône; sa rencontre avec la sphère se place, après la rotation, sur un cercle dont la projection verticale γ' passe par b' dont le rayon est égal à celui de la sphère et dont le centre se trouve sur l'horizontale menée par c'.

Par les rencontres p'_1, q'_1 de ce cercle avec le contour apparent en projection verticale du double cône, on a les projections verticales des points cherchés après la rotation du plan de symétrie; ces points remis en place viennent en (p, p'), (q, q').

Le point p, p' fait partie d'un arc de la courbe d'intersection placé à l'extérieur du double cône; cet arc, entièrement parasite, n'a été tracé sur notre épure que pour mieux faire comprendre la forme de la courbe.

905. Problème XXIX. — *Étant donné un hyperboloïde de révolution par son axe z, z' (fig. 427, pl. LXI), supposé vertical, et par une g, g' de ses génératrices principales, on propose de construire les projections de l'une des parties détachées dans le solide compris entre l'hyperboloïde et son cône asymptote par la surface qu'engendrent les normales menées des divers points de g, g' à l'hyperboloïde donné; ce corps sera en outre limité au plan horizontal de projection et au plan horizontal dont la trace est* Q'.

Démontrons d'abord ce théorème :

La surface des normales menées par les divers points d'une génératrice rectiligne d'un hyperboloïde à une nappe, est un paraboloïde hyperbolique.

Imaginons que les plans tangents conduits à l'hyperboloïde par les divers points de la génératrice g, g' aient tourné de 90° autour de cette génératrice; prenons ensuite leurs rencontres avec des plans menés par les points correspondants dans une direction perpendiculaire à g, g'. Nous aurons ainsi les intersections de deux feuillées de plans, dont l'une aura son arête à l'infinie, et telles, qu'à tout plan de l'une correspondra un seul plan de l'autre et réciproquement.

Ces deux feuillées seront donc homographiques; la surface décrite par les intersections des plans correspondants sera donc du second degré.

Cette surface est réglée, en outre, elle est décrite par des droites parallèles à un même plan, c'est donc un paraboloïde hyperbolique. L'un des plans directeurs du paraboloïde est perpendiculaire à

θg, $\theta' g'$; d'autre part, comme toutes les normales s'appuient sur g, g' et sur l'axe z, z', le deuxième plan directeur n'est autre que le plan vertical de projection.

906. Construction d'un point quelconque des lignes d'intersection des surfaces données. — Déterminons préalablement les projections d'une génératrice rectiligne du paraboloïde; soit a, a' son pied sur g, g', la projection verticale de cette droite est la perpendiculaire $a'b'$ menée à la droite g' par le point a' et la projection horizontale correspondante unit le point a au pied z de l'axe.

Ceci fait, il reste tout simplement à construire les rencontres de la droite $a'b'$, az avec l'hyperboloïde et avec son cône asymptote. Pour le faire, menons un plan auxiliaire par les droites (g, g'), $(a'b', az)$; la trace horizontale de ce plan passe par les traces de même nom θ, θ_1 de la droite g, g' et d'une parallèle à cette droite menée par b', z. La trace $\theta\theta_1$ de ce plan auxiliaire rencontre la trace horizontale de l'hyperboloïde en θ_2 qui est la trace de même nom de la seconde génératrice que le plan sécant auxiliaire détermine sur l'hyperboloïde; cette seconde génératrice a pour projection horizontale la tangente $\theta_2 c$ à la projection de même nom du collier et détermine par sa rencontre m, m' avec az, $a'b'$, un point de la courbe commune à l'hyperboloïde et au paraboloïde.

Pour obtenir la rencontre de la droite az, $a'b'$ avec le cône, employons comme plan sécant auxiliaire le plan vertical projetant de cette droite; ses rencontres avec le cône sont les génératrices $(zh_1, s'h'_1)$, $(zh_2, s'h'_2)$; aux points de croisement de ces génératrices avec $a'b'$, az on a les points (m_1, m'_1), (m_2, m'_2) cherchés.

907. Tangentes aux courbes d'intersection. — Nous chercherons seulement la tangente à la courbe d'intersection du cône et du paraboloïde au point m_2, m'_2. Le plan tangent au cône en ce point a pour trace horizontale la tangente R menée par le point h_2 à la base de ce cône. Le plan tangent au paraboloïde en m_2, m'_2 est déterminé par les deux génératrices rectilignes qui passent par ce point: l'une d'elles $a'm'_2$, am_2 a pour trace horizontale t; l'autre est parallèle au deuxième plan directeur et rencontre, en outre, la génératrice du premier mode qui se projette verticalement en s'; par suite les deux projections de cette droite et sa trace horizontale sont : $m'_2 s'$, la parallèle à la ligne de terre menée par m_2, et le point t_1. Enfin la droite tt_1 est la trace horizontale du plan tangent au paraboloïde. Cette trace rencontre R au point τ, τ' qui est la trace horizontale de la tangente cherchée, on en déduit les projections τm_2, $\tau' m'_2$ de cette tangente.

908. Points sur le contour apparent horizontal de l'hyperboloïde. — La génératrice du paraboloïde perpendiculaire au plan vertical détermine les points cherchés (s', n), (s', n_1); le premier de ces points appartient à la génératrice g, g' qui fait partie de l'intersection du paraboloïde et de l'hyperboloïde.

909. Point double. — Le sommet du cône est évidemment un point double de l'intersection de cette surface avec le paraboloïde, et les tangentes en ce point sont les intersections du plan tangent au paraboloïde en ce même point et du cône: or, ce plan tangent contient les deux génératrices du paraboloïde qui sont respectivement perpendiculaires aux plans de projection, il n'est donc rien autre chose que le plan de profil mené par z, s'; les tangentes cherchées sont par suite

$$(zh_3, s'h'_3), (zh_4, s'h'_4).$$

910. Branches infinies. Asymptotes. — On obtient les directrices asymptotiques en déterminant les génératrices du cône asymptote parallèle aux plans directeurs du paraboloïde. Menons donc par le sommet du cône des plans parallèles aux deux plans directeurs. L'un d'eux est perpendiculaire

au plan vertical, il a pour trace verticale la perpendiculaire P′ à g', menée par s'; l'autre est le plan de front qui a pour trace F. Le premier de ces plans ne rencontre pas le cône asymptote, le second coupe le cône suivant les droites (zh_5, $s'h'_5$), (zh_6, $s'h'_6$); construisons les génératrices du paraboloïde parallèle à ces droites: l'une d'elles est g, g', la seconde a pour projection verticale $s'h'_6$ et rencontre la génératrice $a'm'$, am au point f', f, la projection horizontale de cette génératrice est donc la parallèle $\alpha\alpha_1$ à la ligne de terre menée par f.

Une asymptote commune aux courbes d'intersection du paraboloïde avec l'hyperboloïde et son cône asymptote, se peut obtenir par la rencontre du plan tangent au cône asymptote suivant la génératrice $s'h'_6$, zh_6 et du plan tangent au paraboloïde mené par le point rejeté à l'infini sur $f\alpha$, $f's'$; ce dernier plan est parallèle au plan directeur correspondant (§ **815**), c'est le plan de front dont la trace est $\alpha\alpha_1$; en conséquence, les deux projections de l'asymptote sont $\alpha\alpha_1$, $s'h'_6$.

On reconnaît de même que la courbe commune au cône et au paraboloïde admet aussi la droite g, g' pour asymptote.

911. Trace horizontale du paraboloïde hyperbolique. — Cette trace est une hyperbole (§ **816**), puisque le plan horizontal n'est pas parallèle à l'intersection des plans directeurs. Un point quelconque de cette hyperbole est donné par la trace horizontale t de la génératrice $a'm'$, am du paraboloïde.

Cherchons les directions asymptotiques de cette courbe, l'une d'elles est la génératrice horizontale s', nn_1; l'autre a pour projection verticale une parallèle à la ligne de terre menée par s', elle rencontre en d', d la génératrice $a'm'$, am, et puisque le second plan directeur est le plan vertical de projection, sa projection horizontale n'est autre que la parallèle dd_1 à la ligne de terre.

Les asymptotes cherchées sont les traces horizontales des plans tangents menées au paraboloïde par les points à l'infini sur les génératrices (s', nn_1), ($s'd'$, dd_1).

Ces plans tangents sont parallèles aux plans directeurs correspondants: le premier a pour trace verticale la droite P′, déjà tracée, et pour trace horizontale P; le second est parallèle au plan vertical et a, par suite, sa trace horizontale en dd_1. On conclut de là que P et dd_1 sont les asymptotes demandées. Il est maintenant facile de construire la trace cherchée H, puisqu'on connaît ses asymptotes et un de ses points.

912. Intersection du paraboloïde et du plan horizontal dont Q′ est la trace.—La projection horizontale H_1 de cette courbe se détermine comme H : les droites dd_1, $\delta\delta_1$ sont ses asymptotes, et l'un de ses points de passage se trouve en z, attendu que ce point est la trace sur le plan horizontal considéré de la génératrice verticale du paraboloïde.

Vérifications. — La courbe H doit passer par les traces horizontales θ, θ_3, θ_4, θ_5, z des courbes d'intersection et de la génératrice verticale du paraboloïde; de même H_1 doit passer par i, j, k, l, qui sont les projections horizontales des rencontres des courbes d'intersection avec le plan horizontal qui limite à la partie supérieure le solide représenté.

La figure 428 (pl. LXI) donne le résultat de l'épure qui vient d'être exécutée, dégagé des constructions et sur lequel, afin de rendre plus facile la lecture de l'épure, on a tracé des hachures dirigées suivant les génératrices rectilignes des parties visibles des surfaces qui limitent le solide représenté.

913. Problème XXX. — *On propose : 1° De construire les projections des lignes d'intersection d'un hémisphère et des faces d'un cube avec un hyperboloïde de révolution à une nappe;*

2° De représenter le cube supposé solide, en enlevant la partie de ce corps comprise dans l'hémisphère et dans l'hyperboloïde.

Le cube (*abde*, *a'b'd'e'*) (*fig.* 429, pl. LXI), *dont le côté a* 0^m, 200 *de longueur, dont la face inférieure et la face postérieure sont respectivement situées dans les deux plans de projection, contient entièrement l'hémisphère* (*h*, *h'*); *cet hémisphère a pour base le cercle* (*h'*, h'_1) *inscrit dans la face antérieure de ce cube.*

L'hyperboloïde a son axe (*z*, *z'*) *vertical, à* 0^m, 135 *du plan vertical de projection et à égale distance des faces de profil du cube; la cote du centre* (*o*, *o'*) *de cette surface est de* 0^m, 132; *les rayons de son collier* (*c*, *c'*) *et de sa trace horizontale* (θ) *ont respectivement* 0^m,035 *et* 0^m,100 *de longueur* $\left(\text{échelle adoptée } \frac{1}{2}\right)$.

On obtient comme à l'ordinaire les projections (*g*, *g'*), (g_1, g'_1) de deux génératrices principales de l'hyperboloïde et le contour apparent vertical γ',γ'_1 de cette surface.

914. Construction d'un point quelconque de la courbe commune à l'hémisphère et à l'hyperboloïde. — Adoptons le plan horizontal dont la trace verticale est P' pour plan auxiliaire; sa rencontre avec l'hémisphère est un demi-cercle de centre ω, ω' et dont *f'*, *f* est un point de passage. Ce même plan auxiliaire coupe l'hyperboloïde suivant un cercle dont *o*, ω' est le centre et qui passe par *k'*, *k*.

Par les croisements m_1, m_2 des projections horizontales de ces lignes, on trouve deux points de la projection de même nom de la ligne cherchée; ces points se relèvent en m'_1, m'_2.

915. Construction de la tangente à la ligne d'intersection de l'hémisphère et de l'hyperboloïde. — Cherchons par la méthode du plan des normales, la tangente au point m_1, m'_1. La normale à la sphère en m_1, m'_1 est déterminée par ce point et par le centre ω, ω'_1 de la sphère.

La normale à l'hyperboloïde au point choisi rencontre l'axe de cette surface en un point dont la projection horizontale est *z* et dont la projection verticale se trouve au croisement σ' de *z'* avec une perpendiculaire à g'_1, menée par μ'. Les projections des normales sont donc $m'_1\omega'_1$, $m_1\omega_1$; $m'_1\sigma'$, m_1z.

Il faut maintenant mener par m'_1, m_1 une perpendiculaire au plan de ces normales. Coupons ce plan par celui de la face antérieure du cube et par le plan horizontal mené par σ', afin d'obtenir une ligne de front ω*i*, ω'_1i' et une horizontale σ'*j'*, *zj* du plan de ces normales; menons ensuite par les points m_1, m'_1 des droites respectivement perpendiculaires à *zj*, ω'_1i'; ces droites m_1t, m'_1t' sont les deux projections de la tangente cherchée.

916. Points des contours apparents. — Pour les points (n'_1, n_1, n'_2, n_2) du contour apparent horizontal on a simplement employé le plan horizontal auxiliaire dont la trace est P'_1.

En ce qui concerne les points du contour apparent vertical, on a dû recourir à un plan auxiliaire de front mené par *z*, *z'* : ce plan, qui a pour trace horizontale F, rencontre l'hyperboloïde suivant l'hyperbole projetée verticalement en γ', γ'_1 et l'hémisphère suivant un cercle dont la projection de même nom a pour centre ω'_1 et dont un point de passage se trouve en *u*, *u'*. Les points de rencontre q'_1, q'_2, q'_3, q'_4 de la projection verticale de ces cercles et de γ', γ'_1 font connaître les projections verticales des points cherchés.

Nous n'avons pas figuré sur l'épure leurs projections horizontales.

917. Intersection de l'hyperboloïde et de la face antérieure du cube. — La projection verticale *s'* de cette courbe est une hyperbole qui a pour asymptotes *g'*, g'_1 et qui passe par les points τ'_1, τ'_2; il est donc bien facile de tracer cette courbe.

918. Problème XXXI. — *Construire les projections de l'intersection de deux hyperboloïdes de révolution* H, H_1 *ayant une génératrice commune verticale g, g'* (*fig.* 430, pl. LXII) *et respectivement pour axe deux droites de front* (*z*, *z'*), (z_1, z'_1), *non situées dans un même plan et inclinées de* 45 *degrés sur le plan horizontal.*

On représentera les parties des surfaces hyperboloïdes comprises entre: 1° les deux plans de projection; 2° le plan horizontal dont la trace est Q'; *3° le plan qui touche l'hyperboloïde* H_1 *au point de son collier le plus éloigné du plan vertical de projection.*

919. Contours apparents des deux hyperboloïdes. — La plus courte distance des droites (z', z), (g, g') a pour projections ω', $g\omega$, elle fait connaître la longueur $g\omega$ du rayon du collier et permet, par suite, de construire les sommets réels a', a'_1 du contour apparent en projection verticale de l'hyperboloïde H; comme les asymptotes de ce contour sont g' et une horizontale γ' menée par ω', il est facile de le tracer; c'est l'hyperbole $\varepsilon', \varepsilon'_1$.

Quant au contour apparent en projection horizontale du même hyperboloïde, il se réduit au point g et à son symétrique γ_1 par rapport à ω. Effectivement, la surface admet deux génératrices verticales (g, g') (γ_1, g') de mode différent, et toutes les génératrices rectilignes s'appuient sur l'une ou sur l'autre de ces verticales; d'autre part, le contour apparent cherché est le lieu des points de contact des plans verticaux menés par les diverses génératrices; ce lieu se réduit donc aux droites (g, g'), (γ_1, g') qui forment le contour apparent horizontal proprement dit, par suite, le contour apparent en projection horizontale se réduit bien aux deux points g, γ_1.

Un raisonnement en tout semblable au précédent permettrait de reconnaître que, pour l'hyperboloïde H_1, l'hyperbole ε'_2, ε'_3, dont les sommets réels sont a'_2, a'_3, est le contour apparent en projection verticale, et que le contour apparent en projection horizontale se réduit aux points g, γ_2.

920. Construction d'un point quelconque de la courbe d'intersection. — Nous mènerons les plans auxiliaires par g, g'; ces plans couperont les deux surfaces suivant des génératrices rectilignes, dont la construction se pourra faire simplement, puisque ces génératrices doivent s'appuyer sur celles de même mode que g, g' appartenant aux surfaces respectives.

Il y a donc d'abord lieu de construire sur chaque surface deux génératrices de même système que g, g'. Elles doivent respectivement s'appuyer sur les génératrices verticales (γ_1, g'), (γ_2, g'). L'une d'elles dans chaque surface a été obtenue en menant par les points (γ_1, ω'), (γ_2, ω'_1) des parallèles (g_3, g'_3), (g_4, g'_4) à la ligne de terre.

La tangente g'_1 à ε', en a', est la projection verticale d'une seconde génératrice; la projection horizontale correspondante doit passer par a et par γ_1, puisque cette droite s'appuie sur la verticale (γ_1, g'); donc à g'_1 correspond la droite g_1.

On obtient de même la droite g_2, g'_2.

Cela fait, arrivons à la recherche des points de la ligne commune aux hyperboloïdes; conduisons par g la trace horizontale P du plan sécant; ce plan coupe g_1, g'_1 en b_1, b'_1, et g_3, g'_3 en b_3, b'_3; l'intersection du plan auxiliaire et de l'hyperboloïde H comprend donc, indépendamment de g, g', la génératrice b_1b_3, $b'_1b'_3$. Ce même plan coupe l'hyperboloïde H_1 suivant les deux droites (g, g'), $(b_2b_4, b'_2b'_4)$.

Par la rencontre des droites $b'_1b'_3$, $b'_2b'_4$, on a la projection verticale m' d'un point de l'intersection; sa projection horizontale se trouve au point de croisement m de P avec la ligne de rappel menée par m'.

921. Construction de la tangente en m, m'. — Cherchons la trace sur le plan de front dont la trace horizontale est F des plans tangents aux deux hyperboloïdes en m, m'. Pour l'hyperboloïde H, la génératrice $b'_1b'_3$, b_1b_3 se trouve dans le plan tangent; la génératrice du système opposé, qui sert à déterminer ce plan, a pour projection horizontale $m\gamma_1$, elle rencontre l'une γ, γ' des génératrices de front de H au point α, α'; on en déduit sa projection verticale $m'\alpha'$ et sa trace β, β' sur le plan de front dont la trace est F; la trace sur ce même plan de front de $b'_1b'_3$, b_1b_3 est en b_4, β'_1;

en conséquence, la trace du premier plan tangent sur le plan de front auxiliaire se projette en βb_4, $\beta'\beta'_1$.

Opérons de même pour le second plan tangent : b_2b_4, $b'_2b'_4$ est une de ses droites et b_4, b'_4 un point de passage de la seconde trace cherchée ; $\gamma_2 m$ est la projection horizontale de la seconde génératrice rectiligne qui sert à déterminer le plan tangent, cette génératrice coupe γ_3, γ'_3 en α_1, α'_1 ; elle a pour projections $\alpha'_1 m'$, $\alpha_1 m$, et sa trace sur le plan de front auxiliaire se fait en ω'_2, γ_2 ; donc $\omega'_2\ b'_4$ est la trace sur ce même plan de front du plan tangent cherché.

Par la rencontre des droites $(\beta'\beta'_1, \beta b_4)$, $(b'_4\omega'_2, b_4\gamma_2)$ on a un second point de passage θ', θ de la tangente ; les deux projections de celle-ci sont donc θm, $\theta' m'$.

922. Points placés sur les génératrices rectilignes projetées verticalement en g'_2. — On peut les obtenir en prenant pour plan sécant auxiliaire le plan perpendiculaire au plan vertical mené par g_2, g'_2; sur l'hyperboloïde H_1 on trouve un système de deux génératrices dont g_2, g'_2 fait partie et sur H un cercle : par les rencontres de ces droites et de ce cercle, on obtiendra les points cherchés.

Le plan auxiliaire coupe le plan de profil $g'g$ suivant une perpendiculaire $(c', g\gamma_2)$ au plan vertical ; adoptons-la pour axe et rendons le plan sécant parallèle au plan horizontal : les points projetés en (γ_1, c') (g, c') sont au cercle et ne bougent pas pendant le rabattement ; le centre de ce cercle se projette verticalement en o' et vient se rabattre en o'_1, o_1 ; on peut alors tracer le rabattement du cercle. Quant aux rabattements des génératrices, ils passent par le rabattement d_2 du point a_2, a'_2 et par les points g, γ_2, ces deux rabattements sont donc en d_2g, $d_2\gamma_2$.

Les rabattements des points cherchés sont, par conséquent, π_1, π_2, π_3, ils correspondent aux points (p_1, p'_1), (p_2, p'_2), (p_3, p'_3) qu'il fallait construire.

On opérerait de même pour les diverses génératrices dont les projections verticales sont tangentes aux sommets réels des branches d'hyperboles projetées verticalement suivant ε', ε'_1, ε'_2.

923. Branches infinies. — On peut substituer aux surfaces hyperboloïdes, en ce qui concerne les branches infinies, leurs cônes asymptotes ; ces cônes ont pour contours apparents en projection verticale $(\omega'g'_3, \omega'g')$, $(\omega'_1g'_4, \omega'_1g')$; après avoir transporté l'un d'eux parallèlement à lui-même au sommet de l'autre, ils se toucheront suivant leurs génératrices du contour apparent vertical ; en conséquence, les directions asymptotiques de la section sont l'une (ω, g') verticale, l'autre $(z\omega, \omega'g'_3)$ parallèle à la ligne de terre.

A la première de ces directions correspondent pour les deux cônes, des plans tangents confondus avec le plan de profil $g'\gamma_2$. Ce plan de profil touche donc les deux hyperboloïdes à l'infini ; par suite, l'intersection a un point double à l'infini qui est le point de croisement des génératrices verticales (γ_1, g'), (γ_2, g').

L'une des tangentes en ce point double est la génératrice commune g, g' ; l'autre est l'asymptote cherchée, elle a pour projection verticale g', nous donnerons un peu plus loin la construction de sa projection horizontale, qui se réduit évidemment à un point.

A la seconde direction asymptotique correspondent deux plans tangents horizontaux dont les traces verticales sont g'_3, g'_4, et, par conséquent, une asymptote rejetée à l'infini.

La projection horizontale de cette asymptote sera aussi à l'infini ; mais sa projection verticale est seulement parallèle à la ligne de terre et se trouve à distance finie. En effet, que l'on coupe les deux hyperboloïdes par un plan horizontal et l'on aura deux paraboles qui se rencontreront toujours en un point placé sur g, g', en un second point tel que m, m' et en deux points à l'infini, puisque leurs

axes sont parallèles; c'est la courbe décrite par les points tels que m' que nous étudions. Pour que m' soit rejeté à l'infini, il faut et il suffit que les paraboles soient égales. Effectivement, rapportons ces courbes à l'axe et à la tangente au sommet de l'une d'elles, leurs équations sont alors de la forme

$$y^2 = 2px,$$

$$(y+b)^2 = 2p'(x+a).$$

En es retranchant membre à membre, on trouve :

$$2by + b^2 = 2x(p'-p) + 2p'a.$$

Cette équation représente la droite qui unit les points de rencontre à distance finie des paraboles; pour que cette droite rencontre ces paraboles en un point rejeté à l'infini, il faut et il suffit que

$$p' = p,$$

c'est-à-dire que ces paraboles soient égales et orientées de la même manière.

Coupons les deux hyperboloïdes par le plan horizontal mené par le milieu ω'_3 et de $\omega'\omega'_1$ et démontrons que ce plan donne sur ces hyperboloïdes, ou, ce qui revient au même, sur leurs cônes asymptotes, des paraboles égales.

D'après le théorème de DANDELIN (§ **626**) les foyers des paraboles que le plan sécant détermine sur les cônes asymptotes sont les points de contact de ces plans avec des sphères inscrites aux cônes respectifs et tangentes au plan ; il s'ensuit que les distances des sommets aux foyers sont respectivement égales à $\frac{\omega'\omega'_3}{2}$ et à $\frac{\omega'_1\omega'_3}{2}$, donc les paraboles sont égales.

En outre, la figure montre que dans la région considérée, les paraboles obtenues en coupant les deux cônes par des plans horizontaux ont la même orientation.

La projection a donc pour asymptote l'horizontale $\omega'_3\alpha'_3$.

924. Point double à l'infini; nature de la projection horizontale de l'intersection. — Au point de rencontre des deux génératrices verticales (γ_1, g'), (g, g'), l'hyperboloïde H a pour plan tangent le plan de profil $g'\gamma_1$; cet hyperboloïde touche donc ce plan de profil à l'infini, il en est de même de l'hyperboloïde H_1; par suite, le point à l'infini sur g, g' est un point double de l'intersection. D'autre part, le cône qui a pour sommet ce point double et qui contient la courbe d'intersection est du second degré (§ **666**) ; or, ce cône n'est autre chose, puisque son sommet est à l'infini sur une verticale, que le cylindre projetant vertical de la courbe d'intersection; par suite, la projection horizontale de cette courbe est elle-même du second degré ; au surplus, elle a pour direction asymptotique unique la ligne de terre, c'est donc une parabole dont l'axe est parallèle à la ligne de terre.

Le plan horizontal dont la trace verticale est $\omega'_3\alpha'_3$ coupe les deux hyperboloïdes et, par suite, le cylindre vertical projetant de la courbe d'intersection suivant des paraboles égales, ce qui pourrait permettre de construire le foyer et le sommet de la projection horizontale ε_1 de la courbe d'intersection.

925. Projection horizontale de l'asymptote verticale. — Cette projection est l'un des points de rencontre α_1 de la parabole ε_1 et de la droite $g\gamma_2$, point que l'on pourra construire sans aucune difficulté.

926. Point double à distance finie. — C'est le point de rencontre de la courbe d'intersection et de la génératrice g, g'.

Considérons une feuillée de plans ayant pour arêtes g, g'; ces plans sont tangents aux deux hyperboloïdes et à chacun d'eux correspond, sur g, g', un couple de points de contact, conséquemment les points de contact avec l'hyperboloïde H et ceux avec l'hyperboloïde H_1 constituent deux divisions telles, qu'à tout point de l'une correspond un point et rien qu'un de la seconde, et réciproquement; on peut donc, sans plus d'examen, dire que ces points forment deux divisions homographiques de même base. Les points doubles de ces divisions homographiques sont aussi des points doubles de l'intersection.

Les divisions homographiques dont la base commune est g, g' ont un point double à l'infini, elles sont donc proportionnelles; il suffit donc pour les déterminer de connaître deux couples de points correspondants. Or, le plan de front mené par g, g' touche les deux hyperboloïdes en deux points dont les projections verticales sont ω', ω'_1; d'un autre côté, le plan vertical dont la trace horizontale est P, coupe H suivant deux génératrices dont les projections verticales sont g', $b'_1b'_3$, il touche donc cet hyperboloïde au point dont la projection verticale est ω'_4; la projection verticale du point de contact du même plan avec l'hyperboloïde H_1 se fait au croisement ω'_5 des droites g', $b'_2b'_4$; il en résulte que les points ω'_5, ω'_4 constituent le deuxième couple de points correspondants.

Soit δ' la projection verticale du point double cherché, on aura, puisque les divisions sont proportionnelles :

$$\frac{\delta'\omega'}{\delta'\omega'_1} = \frac{\omega'\omega'_4}{\omega'_1\omega'_5}.$$

Le second rapport est négatif, donc δ' doit se trouver entre ω' et ω'_1 et diviser le segment $\omega'\omega'_1$ dans le rapport $\frac{\omega'\omega'_4}{\omega'_1\omega'_5}$; on l'obtient donc par la construction que notre épure indique suffisamment.

Au point double δ', g l'une des tangentes est la génératrice g, g' et l'autre tangente pourra s'obtenir par la méthode générale; nous engageons le lecteur à exécuter ce tracé.

927. Traces verticales et lignes de rencontre des hyperboloïdes avec le plan de front dont la trace est F. — Le plan vertical de projection coupe les surfaces des deux hyperboloïdes suivant des hyperboles qui ont les mêmes asymptotes que les contours apparents en projection verticale des surfaces respectives. Un point de passage de chacune de ces hyperboles a été obtenu en cherchant les traces verticales v'_1, v'_2 des génératrices (g'_1, g_1), (g'_2, g_2); avec ces éléments, on a pu construire les hyperboles $(\varepsilon'_4, \varepsilon'_5)$, $(\varepsilon'_6, \varepsilon'_7)$ qui sont les traces demandées.

La projection verticale ε'_8, ε'_9 de la courbe d'intersection du plan de front en F avec H est déterminée par ses asymptotes g', g'_3 et par un de ses points de passage (w, w'). Quant à la rencontre du même plan avec H_1, elle se réduit aux droites $(g', \gamma_2)(g_4, g'_4)$.

928. Traces horizontales et lignes de rencontre des hyperboloïdes avec le plan horizontal dont la trace est Q'. — La trace horizontale de l'hyperboloïde H est une parabole τ dont le sommet est en σ', σ et dont le foyer f a été obtenu à l'aide du théorème de DANDELIN : on a simplement placé le point f à une distance de σ égale à la moitié de la cote du sommet ω, ω' du cône asymptote correspondant (§ 702).

On construit de même la trace horizontale τ_1 de l'hyperboloïde H_1 : c'est une parabole dont (σ_1, σ_1') est le sommet et f_1 le foyer.

Toujours par la même méthode, on a déterminé la parabole τ_2, que le plan horizontal dont la trace est Q' détermine sur H, et celle τ_3 que le même plan détermine sur l'hyperboloïde H_1.

929. Vérifications. — L'épure est soumise à de nombreuses vérifications; indiquons les principales : 1° les projections verticales des diverses génératrices rectilignes des hyperboloïdes doivent être tangentes aux contours apparents en projection verticale de la surface correspondante; 2° les projections horizontales des courbes tracées sur H ou sur H_1 doivent passer par les points g, γ_1, ou par les points g, γ_2; 3° les deux traces d'une même surface doivent se croiser sur la ligne de terre; 4° les lignes τ, τ_1, ε_4 doivent se couper au même point θ_1, de même pour les courbes τ_2, τ_3, ε_4 qui doivent se couper en θ_2.

CHAPITRE VII

PROJECTIONS COTÉES

930. Notions préliminaires. — Pour représenter le sol et les ouvrages de fortification, il faut renoncer à l'emploi des projections verticales; effectivement ces projections présentent alors de très nombreux recouvrements, et, en plus, les intersections des projections verticales des diverses droites de la figure considérée se font sous des angles très aigus et donnent, par suite, lieu à des tracés fort peu exacts. Au contraire, en projection horizontale les recouvrements sont peu nombreux et les points de rencontre des lignes se peuvent déterminer, en général, avec toute l'exactitude désirable; il est alors naturel de n'employer qu'un seul plan de projection, le plan horizontal, et d'inscrire à côté des points principaux de l'épure des nombres indiquant leurs cotes.

Le plan horizontal de projection est ordinairement le plan du niveau des mers; les cotes comptées au-dessus de ce plan sont positives et s'appellent *altitudes;* les cotes des points placés au-dessous de ce même plan sont négatives et portent le nom de *sondes* ou de *profondeurs*.

931. Représentation du point. — D'après ce qui vient d'être dit, dans la géométrie descriptive par cotes, un point A est déterminé (fig. r_6) par sa projection horizontale a et par sa cote, dont on indique la mesure, 35 mètres par exemple, à l'aide du nombre 35 inscrit sur l'épure à côté de a.

$a.35$

Fig. r_6.

932. Représentation de la ligne droite. — On peut déterminer une droite par les projections et les cotes de deux de ses points; mais, habituellement, on indique sur la droite les points dont les cotes sont entières et successives, c'est ce qu'on appelle graduer la droite; on peut ainsi immédiatement *lire l'épure,* c'est-à-dire se rendre compte par son seul examen des positions respectives de ses diverses parties.

On nomme *pente* d'une droite la tangente de l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal.

On appelle *intervalle* ou *module* la distance qui sépare les projections horizontales de deux points dont les cotes diffèrent de l'unité de longueur.

933. Théorème. — *Le produit de la pente d'une droite par son intervalle est égal à l'unité; autrement dit, la pente et l'intervalle d'une droite sont réciproques.*

Soient : H le plan horizontal de projection (fig. r_7); (A, a), (B, b) deux points d'une droite dont les

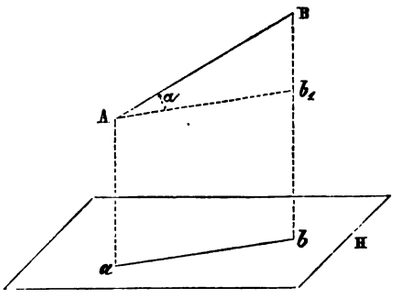


FIG. r_7.

cotes diffèrent d'une unité et leurs projections; p la pente de la droite; α l'angle qu'elle fait avec H et i son intervalle.

Menons par A une parallèle Ab_1 à ab; elle fait avec AB l'angle α; on a donc, d'une part

$$p = \text{tang. } \alpha = \frac{Bb_1}{Ab_1}.$$

D'autre part, puisque la différence de cote des points A, B est 1, on a encore :

$$Bb_1 = 1$$

$$Ab_1 = ab = i.$$

En remplaçant Bb_1, Ab_1 par leurs valeurs dans celle de p on trouve :

$$p = \frac{1}{i},$$

ou enfin

$$ip = 1.$$

C'est ce qu'il fallait établir.

934. Problème I. — *Étant donnée une droite cotée en deux points, la graduer.*

Soient (fig. r_8) : d la projection de la droite, a, b les projections de deux de ses points, cotés 5 et 9.

Il est manifeste que les points de cotes rondes et consécutives compris entre a et b s'obtiennent en

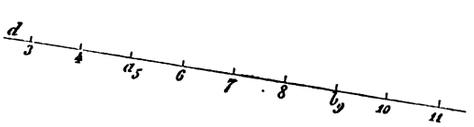


FIG. r_8

divisant ab en 9 — 5 parties égales; ces points ont pour cotes 6, 7, 8. Alors rien n'est plus simple que de continuer la graduation de part et d'autre de a, b.

On opèrera d'une façon analogue quand les cotes données seront fractionnaires.

935. Problème II. — *Sur une droite graduée, placer un point de cote donnée.*

Soit à placer sur la droite d un point de cote 5, 8 (fig. r_9).

Le point cherché doit se trouver entre les points a et b dont les cotes sont 5 et 6; on l'obtiendra en partageant ab en 10 parties égales et en prenant la huitième division à partir de a; il sera donc en c.

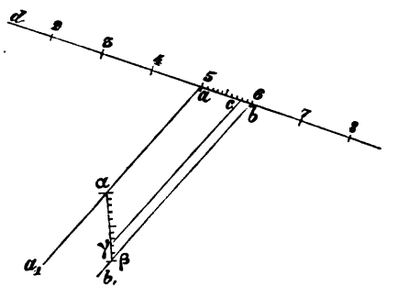


Fig. r_9.

Autre solution. — Menons par a et b deux droites aa_1, bb_1 parallèles entre elles et plaçons les extrémités $\alpha\beta$ d'une règle divisée en dix parties égales, d'un décimètre par exemple, respectivement sur chacune de ces parallèles; marquons le point γ qui tombe sur la huitième division de la règle; puis, de ce point γ, menons une parallèle à la droite aa_1 qui viendra rencontrer la droite d au point c qu'il fallait construire.

Cette dernière méthode est de beaucoup préférable à la première en ce qu'elle permet d'éviter la division d'une droite en dix parties égales, division qui est toujours un peu longue à effectuer et qui n'a jamais le degré de précision des divisions obtenues mécaniquement sur le décimètre.

936. Problème inverse. — Le problème inverse de celui qui vient d'être traité se résout par les mêmes tracés en changeant seulement l'ordre suivant lequel on les effectue.

937. Problème III. — *Une droite étant donnée, trouver sa trace horizontale.*

Il suffit de graduer la droite et de continuer la graduation jusqu'au point de cote 0.

Nous eussions pu résoudre les problèmes précédents en ayant recours au rabattement du plan vertical projetant de la droite; ces problèmes, comme tous ceux que nous résoudrons ultérieurement, sont donc susceptibles de deux solutions : l'une graphique et l'autre arithmétique. Cette dernière est plus conforme à l'esprit de la méthode des plans cotés puisqu'elle permet de substituer aux tracés que l'on exécute habituellement sur le plan vertical, des calculs effectués sur les cotes données.

938. Problème IV. — *Deux points étant déterminés par leurs projections horizontales et leurs cotes, trouver en véritable grandeur leur distance.*

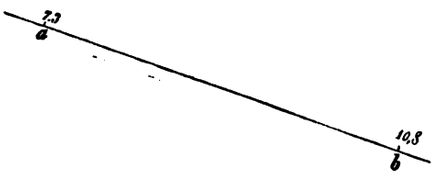


Fig. r_{10}.

Soient a, b (fig. r_{10}) les projections horizontales de deux points cotés 7,3 et 10,8 et dont on demande

la distance. Cette distance est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont *ab* et la différence de cote 10, 8 — 7, 3 ou 3, 5; en désignant par δ cette distance, on a donc :

$$\delta = \sqrt{\overline{3,5}^2 + \overline{a\,b}^2}$$

Telle est la formule que l'on emploie ordinairement pour trouver la distance de deux points.

Proposons-nous d'en établir une autre. Soient n, n' les cotes des deux points et i l'intervalle de la droite.

Les côtés de l'angle droit du triangle rectangle qui vient de nous servir à trouver la formule usuelle sont maintenant respectivement égaux à $n - n'$, $(n - n')i$; on a donc :

$$\delta = \sqrt{(n - n')^2 + (n - n')^2 i^2},$$

ou

$$\delta = (n - n')\sqrt{1 + i^2}.$$

939. Problème V. — *Par un point donné mener une droite parallèle à une droite donnée.*

Soient (fig. s_1) : *ab* la projection graduée de la droite donnée; *c* et 10,3 le point donné et sa cote.

Pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit : 1° *que leurs projections horizontales soient*

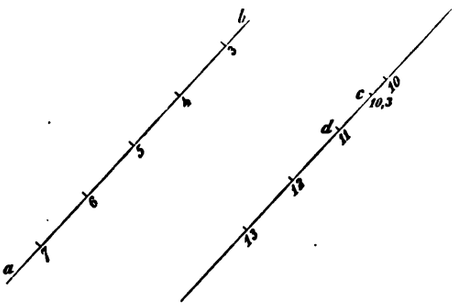


Fig. s_1.

parallèles; 2° *qu'elles aient même pente ou, ce qui revient au même, qu'elles aient des intervalles égaux;* 3° *que le sens des cotes croissantes soit le même.*

D'après cela menons par *c* une parallèle à *ab*; prenons en *cd* une longueur égale aux 0,7 de l'intervalle de la droite *ab* et nous aurons le point *d* de cote 11; en reportant sur *cd*, de part et d'autre du point *d*, l'intervalle de la droite projetée en *ab* un certain nombre de fois on pourra graduer la parallèle, qui sera ainsi complètement déterminée.

940. Problème VI. — *Reconnaître si deux droites se coupent et, dans ce cas, trouver la cote de leur point de rencontre.*

L'épure peut présenter deux dispositions :

1° Les projections horizontales des droites peuvent se rencontrer dans les limites de l'épure;

2° Ces projections horizontales peuvent se couper en dehors des mêmes limites.

1° Soient ab, cd (fig. s_2) les projections de deux droites graduées et m leur point de rencontre.

On cherchera les cotes des points qui, projetés en m, sont sur les droites AB, CD; si les cotes trouvées sont égales, les droites se couperont et la valeur commune des deux cotes sera la cote demandée.

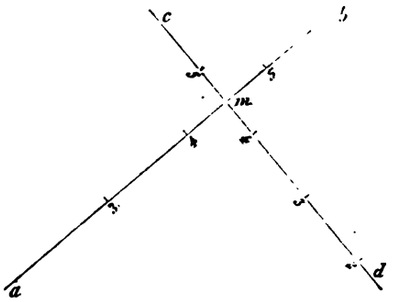


Fig. s_2.

2° Supposons maintenant que les projections horizontales ab, cd (fig. s_3) des droites ne se rencontrent pas dans les limites de l'épure. La solution du problème résulte de la remarque suivante :

Pour que deux droites horizontales soient parallèles, il faut et il suffit que leurs projections horizontales soient aussi parallèles.

Cela posé, menons les droites 6.6, 5.5; si elles sont parallèles, les droites correspondantes dans

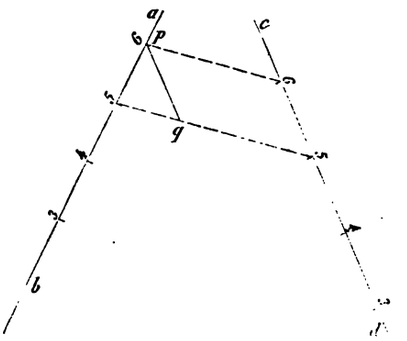


Fig. s_3.

l'espace le seront aussi, et les droites données se couperont; inversement, si les droites données se rencontrent, 6.6, 5.5 devront être parallèles. Pour voir si les droites données se coupent, il suffit donc de vérifier le parallélisme des droites 6. 6, 5. 5.

Supposons que les droites données se coupent et cherchons la cote de leur point commun :

Par l'une p des extrémités de 6.6 menons une parallèle à $c\,d$, et prenons son point de croisement q avec la droite 5.5. Pour une différence de cote égale à 1, la distance des points de même cote sur les droites données diminue de $5.q$; pour le point cherché cette distance doit être nulle, donc la différence entre la cote cherchée et 5 est égale au nombre de fois que la longueur 5.5 contient $5.q$. La cote demandée est donc :

$$5 + \frac{5.5}{5.q}.$$

941. Représentation du plan. — On détermine un plan par sa ligne de plus grande pente. Pour distinguer le plan de la droite, on figure deux lignes de plus grande pente très voisines, en sorte que le plan est représenté sur les épures par un double trait (fig. s_4). On nomme pente d'un plan la pente de ses lignes de plus grande pente.

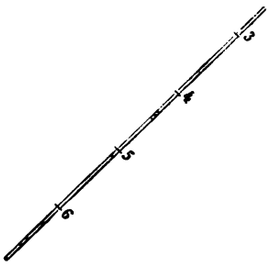


Fig. s_4.

Rappelons que les horizontales d'un plan sont, dans l'espace et en projection, perpendiculaires aux lignes de plus grande pente de ce plan (§ **42**).

942. Problème VII. — *Connaissant trois points d'un plan, déterminer une de ses lignes de plus grande pente.*

Soient (fig. s_5) : *a*, *b*, *c* et (3, 5), (4, 9), (7, 8), les projections des points donnés et leurs cotes respectives.

Joignons les points *a*, *b* par une droite et calculons l'intervalle de cette droite : on mesurera *ab* à l'échelle du dessin et on divisera le nombre trouvé par 4,9 — 3,5, c'est-à-dire par 1,4.

On prendra entre *a* et *b*, à partir de *a*, la moitié de l'intervalle trouvé et on aura la projection du point de la droite *ab* dont la cote est 4 ; il sera alors facile de graduer *ab*.

Sur cette droite graduée on cherchera le point *d* dont la cote est 7,8 ; la droite *cd* sera la direction des horizontales du plan des trois points. Une perpendiculaire *pq* à *cd* fera connaître la ligne

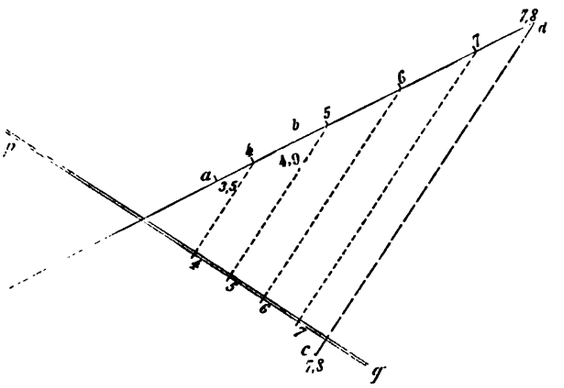


Fig. s_5.

de plus grande pente de ce plan ; pour la graduer on prendra ses rencontres avec des parallèles à *cd* menées par les points de cotes rondes de la droite *ab* et on inscrira près de ces points les cotes respectives des horizontales du plan qui les déterminent.

Lorsque le plan est déterminé par deux droites qui se coupent ou par deux droites parallèles, on construit une de ses lignes de plus grande pente par un tracé en tout semblable à celui qui vient d'être expliqué.

943. Problème VIII. — *Connaissant la projection d'un point situé dans un plan donné, trouver sa cote.*

Supposons le plan déterminé par une ligne de plus grande pente pq (fig. s_6) et soit a la projection donnée du point.

Menons par a la projection ab d'une horizontale du plan et cherchons la cote de son point d'inter-

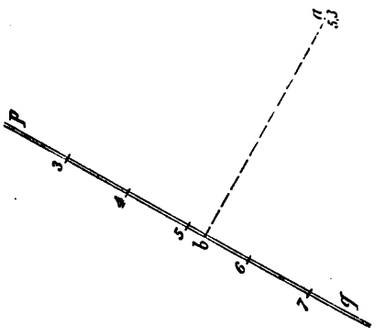


Fig. s_6.

section b avec la ligne de plus grande pente; nous trouvons ici 5,3; comme cette cote est commune à tous les points de l'horizontale, elle fait connaître celle du point dont a est la projection horizontale.

944. Problème IX. — *Par un point d'un plan, tracer dans ce plan une droite dont la pente est donnée.*

Soient (fig. s_7) : pq la projection de la ligne de plus grande pente du plan, m celle du point et $\frac{1}{\gamma}$ la pente donnée.

Pour une différence de niveau égale à 1 la droite cherchée doit avoir, en projection horizontale, une

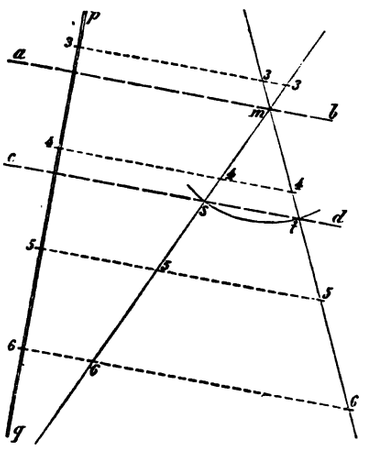


Fig. s_7.

longueur γ; nous mènerons donc la projection ab, cd de deux horizontales du plan donné, en ayant soin de faire passer l'une de ces droites par m et de placer l'autre à une distance de la première

égale à l'intervalle du plan ; puis, du point m comme centre, avec γ pour rayon, nous décrirons un arc de cercle dont nous prendrons les rencontres, s, t avec cd, et nous tracerons enfin les droites ms, mt qui seront les projections horizontales cherchées. Le problème admet deux solutions.

On gradue les droites ainsi trouvées à l'aide de leurs rencontres avec les horizontales de cotes entières et successives du plan donné.

945. Problème X. — *Par une droite donnée, mener un plan de pente donnée* $\frac{1}{\gamma}$.

L'intervalle du plan est l'inverse de sa pente, c'est donc ici γ. Soit ab la projection horizontale de la droite donnée (fig. s_8).

Cherchons la projection de la ligne de plus grande pente qui passe par le point de AB dont la cote est 4, soit d la projection de ce point.

Commençons par déterminer l'horizontale du plan cherché dont la cote est 6, par exemple ; sa pojection doit passer par le point f coté 6 sur la droite ab ; en plus, la distance de sa projection

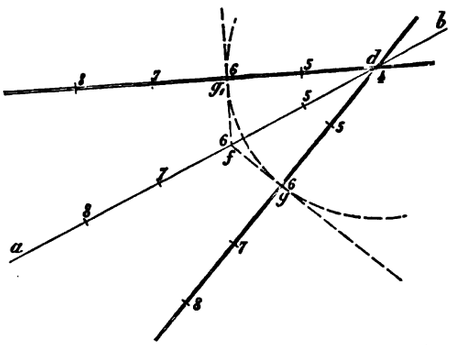


Fig. s_8.

au point d doit être égale à 2γ, ce qui conduit au tracé qui suit : du point d comme centre avec 2γ pour rayon on décrit un arc de cercle et on lui mène par f deux tangentes fg, fg_1, qui sont les horizontales cherchées. Le problème a donc en général deux solutions.

Les perpendiculaires dg, dg_1 menées du point d aux droites fg, fg_1 sont les projections des lignes de plus grande pente des plans cherchés. Enfin, le point d a pour cote 4 et la cote commune aux points g, g_1 est 6 ; rien n'est plus simple alors que de graduer les deux lignes de plus grande pente que l'on vient de construire.

946. Problème XI. — *Trouver l'intersection de deux plans donnés par leurs lignes de plus grande pente.*

Soient ab, cd (fig. s_9) les projections des lignes de plus grande pente données.

Coupons les deux plans par un plan auxiliaire horizontal de cote 3 et prenons le point de croisement m des horizontales qu'il détermine ; ce point m, coté 3, est à la projection de l'intersection cherchée.

Un deuxième point de cette projection est le point n de cote 4 ; cette intersection a donc pour projection mn et rien n'est plus simple que de la graduer, puisqu'on connaît son intervalle mn et la cote de l'un de ses points.

947. Cas particulier. — *Les horizontales de même cote se coupent sous un angle très aigu.*

Il faut alors, pour obtenir avec exactitude l'intersection, modifier le tracé comme il suit. Soient ab, cd les projections des lignes de plus grande pente des plans donnés (fig. s_{10}).

Adoptons un plan auxiliaire quelconque défini par deux de ses horizontales projetées en st, uv; la première ayant pour cote 4, et l'autre 3. Menons ensuite les horizontales de cote 4 et 3 dans les plans donnés et cherchons, par la méthode du paragraphe précédent, les projections ef, gh des rencontres du plan auxiliaire avec chacun de ces plans. Ces droites se croisent en m qui est la projection d'un point de l'intersection demandée; un second point de cette projection se construira de même, ce qui permettra de tracer la droite cherchée. Pour la graduer, on prendra ses rencontres avec les projections des horizontales de cotes entières et successives de l'un des plans donnés.

La construction peut être fréquemment simplifiée en faisant successivement passer les horizontales des deux plans auxiliaires par les points des lignes de plus grande pente données dont les cotes

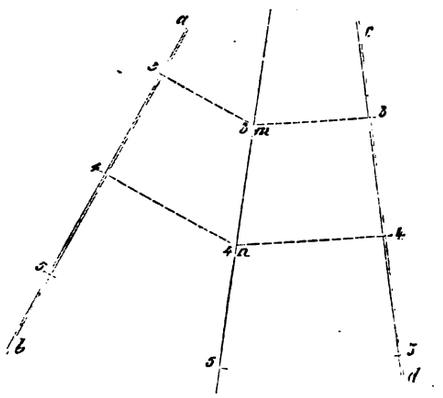


FIG. 89.

sont les mêmes que celles de ces horizontales. Le tracé fait alors connaître les points de l'intersection qui se trouvent placés sur les lignes de plus grande pente données.

948. Cas plus particulier. — *Les lignes de plus grande pente ont des projections horizontales parallèles.*

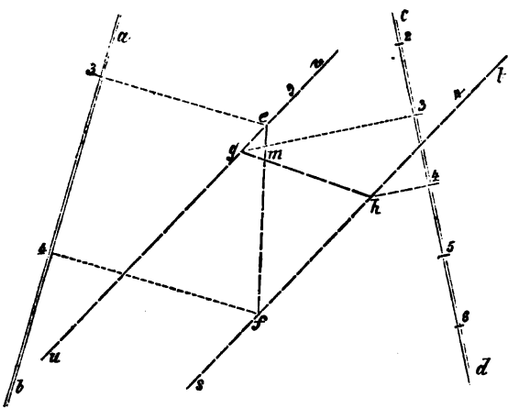


FIG. 810.

Soient ab, cd (fig. t_4) les projections de lignes de plus grande pente données. Les plans qu'elles

déterminent ont des horizontales parallèles, ils se coupent donc suivant une horizontale dont la projection horizontale est perpendiculaire aux droites *ab, cd* et unit deux points de même cote de ces droites. Or les droites de jonction des points de même cote des droites données *ab, cd* les partagent proportionnellement, elles forment donc un faisceau, dont on obtient le sommet *s* par la rencontre des droites *mn, pq* qui unissent les points de cote 3 et ceux de cote 4, sur les droites données.

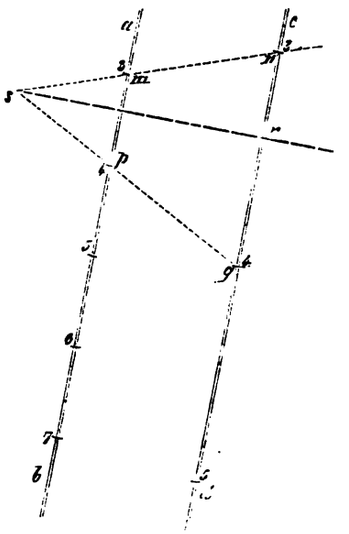


FIG. t_1.

Il reste alors, pour avoir la projection de l'intersection, à mener par *s* la perpendiculaire *sr* aux droites *ab, cd*.

La cote de cette intersection s'obtient en cherchant, par la méthode déjà expliquée (§ **936**), celle du point projeté en *r*.

949. Problème XII. — *Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan.*

Soient *ab, pq* (fig. t_2) les projections de la droite et de la ligne de plus grande pente du plan.

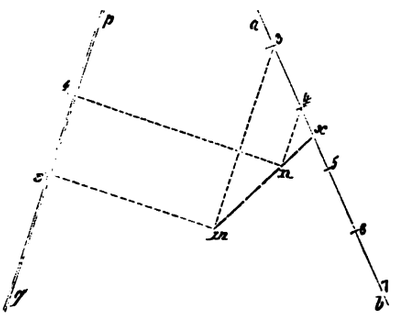


FIG. t_2.

Menons par les points cotés 3 et 4 sur la droite *a b*, deux droites parallèles 3*m*, 4*n* et considé-

rons-les comme des horizontales ayant pour cote la première 3, l'autre 4; ces horizontales déterminent un plan que nous adopterons pour plan auxiliaire.

Il faut alors construire la projection horizontale *mn* de l'intersection des plans, et le point de croisement *x* de *mn* avec *ab*, qui fait connaître la projection horizontale du point cherché ; ce point *x* se trouve sur une droite graduée *ab*, on sait donc déterminer sa cote (§ 936).

950. Plans et droites perpendiculaires. — Lorsqu'une droite et un plan sont perpendiculaires :

1° *Les projections de la droite et des lignes de plus grande pente du plan sont parallèles.*

En effet ses projections doivent être perpendiculaires aux projections des horizontales du plan.

2° *Les intervalles i, i' de la droite et du plan sont réciproques.*

Effectivement, les pentes de la droite et du plan sont $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{i'}$ et, comme les angles correspondants sont complémentaires, on a :

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i'} = 1,$$

ou bien

$$i \cdot i' = 1.$$

3° *Les cotes croissent en sens inverses.*

Cette dernière propriété est rendue manifeste par l'examen de la figure dans l'espace.

951. Problème XIII. — *Mener d'un point donné une perpendiculaire sur une droite.*

Soient *ab*, *m* les projections de la droite et du point donné (fig. t_3).

La projection *pq* de la ligne de plus grande pente du plan cherché est parallèle à *ab*, et son inter-

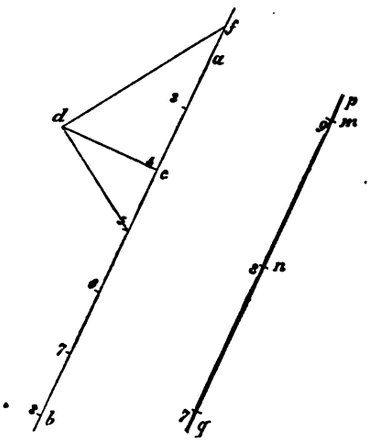


Fig. t_3.

valle peut être calculé ou construit; pour le calculer on mesurera l'intervalle de la droite *ab* et on divisera l'unité choisie par le nombre qui exprime la mesure de cet intervalle.

Pour le construire on mènera une perpendiculaire *cd*, de longueur 1, à la droite *ab*, par le point coté 4 sur cette droite; puis on tracera la ligne *d* 5 et on lui élèvera une perpendiculaire en *d*, que l'on prolongera jusqu'à sa rencontre *f* avec *ab*.

Le triangle rectangle 5*df* donnera :

$$\overline{cd}^2 = c5 \cdot cf,$$

ou

$$cf = \frac{1}{c5}.$$

cf sera donc l'intervalle du plan.

En portant cet intervalle un certain nombre de fois sur la droite pq, à partir de m, on pourra graduer cette droite.

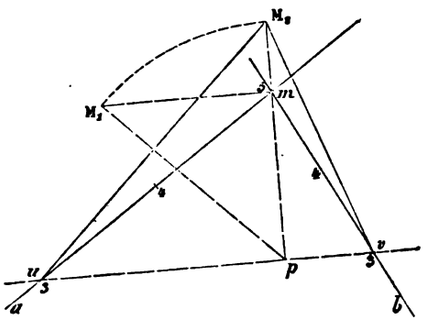
952. Problème XIV. — *Mener d'un point donné une droite perpendiculaire à un plan.*

La solution de ce problème est en tout semblable à celle qui vient d'être donnée.

953. Application. — *Trouver : 1° la distance d'un point à un plan; 2° la distance d'un point à une droite ; 3° la plus courte distance de deux droites.*

Les méthodes générales de résolution de ces questions sont les mêmes que celles que nous avons développées dans la première partie de ce traité; quant aux moyens de construction ils viennent d'être expliqués dans le cours des précédents problèmes.

954. Problème XV. — *Construire l'angle de deux droites.*



IG. t_4.

Soient ma, mb (fig. t_4) les projections de deux droites ayant un point commun projeté en m et coté 5; pour trouver leur angle on les rabat autour d'une horizontale de leur plan.

Désignons par u, v les points des droites données dont les cotes sont 3 et adoptons la droite projetée en uv pour charnière; u et v seront fixes ; le point m se placera sur la perpendiculaire mp abaissée de ce point sur uv, à une distance du point p qui est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont mp et une droite égale à la différence de cote du point M et de l'axe; cette différence de cote est égale à 2 et a été portée en mM_1 à l'échelle du dessin.

Ayant construit ce triangle rectangle en M_1mp, on reportera pM_1 en pM_2 et on mènera les droites uM_2, vM_2, qui seront les côtés de l'angle vM_2u, qu'il fallait construire.

955. Problème XVI. — *Construire l'angle de deux plans.*

Soient ab, cd (fig. t_5) les projections des lignes de plus grande pente des plans donnés.

Construisons d'abord la projection mn de l'intersection de ces plans (§ **946**) et menons un plan auxiliaire perpendiculaire à cette intersection; la trace de ce plan sur un plan horizontal de cote 5 se projette suivant une perpendiculaire uv à la droite mn.

Cette droite uv est la projection de la base d'un triangle qui a pour angle opposé à cette base le rectiligne de celui des plans donnés, dont le pied de la hauteur, on l'a démontré (§ **187**), se trouve

projeté au croisement p des droites mn, uv et dont la hauteur n'est autre que la distance de ce pied à l'intersection MN des deux plans.

Pour construire cette hauteur, rabattons l'intersection des plans donnés sur le plan horizontal de cote 5 : n ne bouge pas et M se rabat en M_1, sur une perpendiculaire mM_1 à mn égale à 2 fois l'unité de longueur prise à l'échelle du dessin ; le rabattement de l'intersection est donc nM_1. Dans ce rabattement la hauteur cherchée se trouve sur la perpendiculaire pS_1 menée par p à la droite nM_1.

Cela fait, rabattons le triangle dont la base est uv, et qui a pour angle opposé à cette base celui que

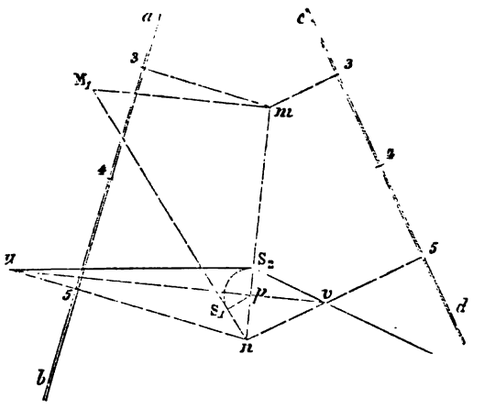


Fig. 14.

nous cherchons, autour de uv, sur le plan horizontal de cote 5 : la hauteur se place sur la droite nm, l'une de ses extrémités p ne bouge pas et l'autre vient à une distance de p égale à la vraie grandeur pS_1 de cette hauteur, en S_2. Le triangle rabattu est donc uS_2v, et l'angle de même nom est celui qu'il fallait construire.

956. Représentation des surfaces. — On appelle surfaces topographiques les surfaces formées

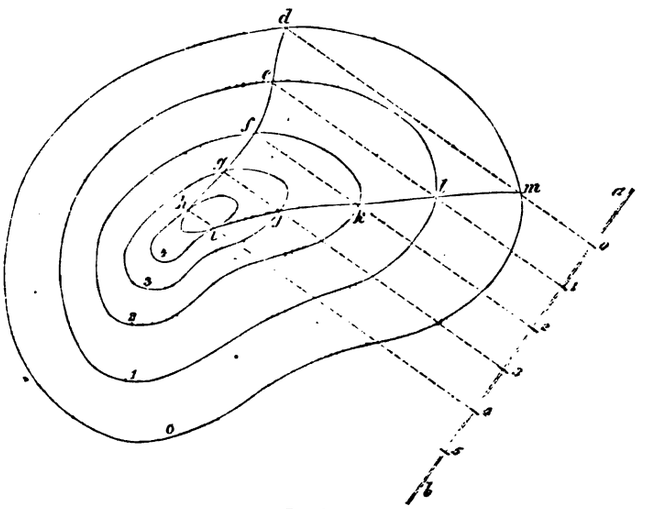


Fig. 14.

par le sol ; ce sont les seules que l'on représente habituellement en projections cotées ; une propriété

qui les caractérise, c'est de ne pouvoir être rencontrées en plus d'un point par une droite verticale.

On représente les surfaces topographiques par un certain nombre de sections horizontales équidistantes, qui portent le nom de *lignes de niveau*, et l'on appelle *équidistance* la différence de cote de deux lignes de niveau consécutives.

Dans l'intervalle de deux courbes la surface n'est pas déterminée rigoureusement; on imagine qu'elle est engendrée par une droite mobile qui est constamment normale à l'une de ces courbes et qui s'appuie sur l'autre.

957. Problème XVII. — *Construire l'intersection d'une surface topographique par un plan quelconque.* — Le plan est supposé déterminé par une ligne de plus grande pente graduée projetée en *ab* (fig. t_6), et la surface par les lignes de niveau indiquées sur la figure.

Les rencontres des horizontales du plan avec les lignes de niveau de même cote font connaître des points de la ligne cherchée; en unissant leurs projections horizontales *d*, *e*, *f*..... *l*, *m* par un trait

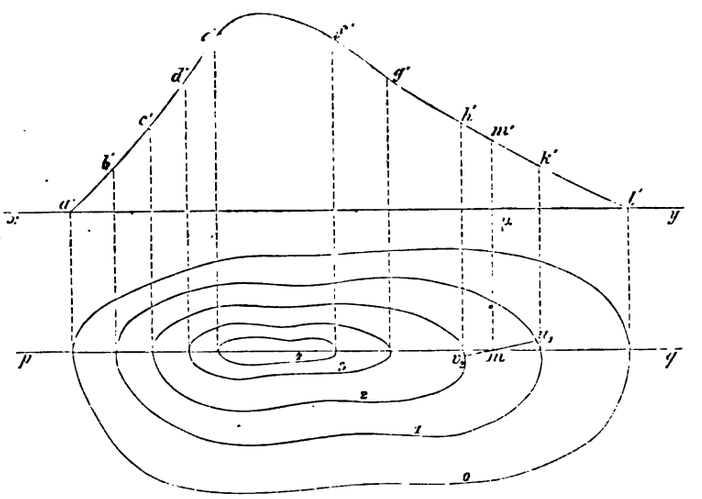


Fig. t_7.

continu, on trouve la projection horizontale de la courbe commune au plan et à la surface donnée. On obtiendra la vraie grandeur de cette courbe en la rabattant autour de l'une des horizontales de son plan, sur le plan horizontal correspondant.

958. Cas particulier. — Le plan donné est vertical; soit *pq* (fig. t_7) sa trace horizontale; elle représente la projection de même nom de la courbe commune. La vraie grandeur *a'b'c'....k'l'* de cette courbe s'obtient sans difficulté en la projetant sur un plan vertical dont la trace *xy* est parallèle à *pq*, puis en rabattant ce plan sur le plan horizontal de projection.

959. Problème XVIII. — *Déterminer l'intersection de deux surfaces topographiques.*

On obtient cette ligne par points, en prenant les rencontres des lignes de niveau de même cote des surfaces données.

960. Problème XIX. — *Connaissant la projection d'un point d'une surface topographique, trouver sa cote.*

Première Solution. — Soit *m* (fig. t_7) la projection du point; menons par *m* une droite quel-

conque pq et cherchons, par la méthode qui vient d'être expliquée (§ 958), la vraie grandeur de l'intersection de la surface avec le plan vertical passant par pq.

Menons ensuite par m une perpendiculaire à xy et soient m', μ ses points respectifs de rencontre avec les lignes $a'b'c'$.... $k'l'$, xy; la droite $m'\mu$ est la cote cherchée.

Autre Solution. — Substituons à la surface du sol comprise entre les courbes de niveau cotées 1 et 2 (fig. t_7) la surface géométrique définie au paragraphe 956 et cherchons la cote du point M en le considérant comme placé sur une génératrice rectiligne de cette surface.

La projection de cette génératrice n'est autre que la normale uv à l'une des courbes de niveau cotées 1 et 2, le problème se réduit donc à déterminer la cote d'un point projeté en m sur une droite uv cotée en deux points, ce que l'on sait faire (§ 936).

961. *Courbes intercalaires.* — Le problème qui vient d'être résolu permet d'intercaler une courbe de niveau de cote donnée entre deux courbes de niveau quelconque; ces courbes se nomment *courbes intercalaires.*

962. Problème. — *Mener un plan tangent en un point donné d'une surface topographique.* — Le plan est déterminé par la tangente à la courbe intercalaire menée par le point choisi et par la génératrice rectiligne de la surface conventionnelle substituée, entre les courbes de niveau qui comprennent le point choisi, à la surface topographique considérée.

963. Problème. — *Tracer sur une surface topographique une ligne dont la pente est donnée, connaissant un point de passage* m (fig. t_8) *de cette ligne.* — Nous placerons, pour plus de simplicité, m sur une courbe de niveau donnée, sur la courbe de cote 2 par exemple.

Du point m, comme centre, avec l'inverse de la pente donnée pour rayon, décrivons un arc de cercle

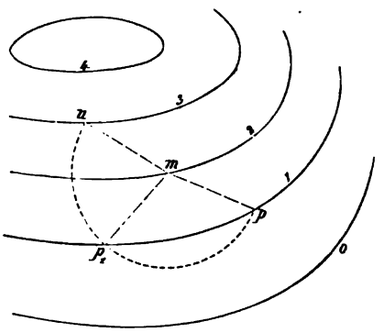


Fig. t_8.

et prenons deux de ses points de rencontre p, n avec les courbes de niveau cotées 1 et 3; considérons les droites nm, mp, on peut supposer qu'elles sont approximativement placées sur la surface, la ligne brisée nmp satisfait ainsi aux conditions de l'énoncé.

On continuera à déterminer de la même manière des points sur les diverses courbes de niveau; après quoi on substituera à la ligne brisée une ligne continue passant par les points ainsi construits, laquelle sera approximativement l'une de celles que nous cherchons à tracer.

Le problème admet en général une infinité de solutions; car, partant de m, on peut se diriger vers un des points de rencontre p ou p_1 de l'arc de cercle figuré sur l'épure et de la courbe de niveau

cotée 1 ; puis, partant de p ou de p_1, on pourra se diriger vers plusieurs autres points de la ligne de niveau suivante. Si l'on imagine une infinité de lignes de niveau de la surface, il y aura une infinité de courbes répondant à la question.

En ne considérant que les lignes de niveau données, le problème n'admet plus une infinité de solutions, mais il en admet plusieurs.

FIN DU TOME PREMIER

LIVRE II

CONES, CYLINDRES ET SURFACES DE RÉVOLUTION

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Pages.

Définitions 141
Surfaces de révolution 141
Surfaces réglées 143
Plan tangent en général. — Théorème fondamental 144
Conséquences du théorème fondamental 145
Représentation des surfaces. — Contour apparent 145

CHAPITRE II

DES PLANS TANGENTS AU CONE ET AU CYLINDRE

Théorème fondamental 147
Nombre de conditions nécessaires à la détermination du plan tangent 147
Projections d'un point placé sur une surface conique ou sur une surface cylindrique 148
Plan tangent en un point d'une surface conique 148
Plan tangent en un point d'une surface cylindrique 148
Construction du contour apparent d'une surface conique 148
Construction du contour apparent d'une surface cylindrique 149
Par un point extérieur à la surface d'un cône, lui mener un plan tangent 149
Mener à un cylindre un plan tangent par un point extérieur à sa surface 150
Construire le contour apparent d'un cône ou d'un cylindre pour une position quelconque du point de vue 151
Mener à un cône un plan tangent parallèle à une droite donnée 152
Mener à un cylindre un plan tangent parallèle à une droite donnée 152
Étant donnée une surface conique ou cylindrique, trouver les points en lesquels un plan rencontre cette surface normalement 154
Conduire par un point une droite à la fois tangente à deux surfaces coniques ou cylindriques 154
Trouver la condition pour qu'on puisse, à un cône ou à un cylindre, mener un plan tangent qui soit en même temps parallèle à un plan donné, et, en supposant que cette condition soit remplie, construire le plan tangent 154
Condition pour qu'on puisse mener un plan tangent commun à deux surfaces coniques ou cylindriques 154
A deux surfaces coniques ou cylindriques, assujetties à une condition, mener des plans tangents communs. 156
Application. — Mener à un cylindre des plans tangents qui s'inclinent d'un angle donné sur l'horizon 159
Construire les plans tangents parallèles entre eux à deux surfaces coniques ou cylindriques 160
Soit donné un premier cône de sommet S_1 et dont la base B_1 est dans un plan P_1, que l'on coupe par un plan P_2 et dont on adopte la section obtenue B_2 comme base d'un second cône dont le sommet S_2 est donné; on coupera à son tour ce nouveau cône par un plan P_3, qui donnera une section B_3, servant de base à un cône de sommet donné S_3, etc.; on demande de mener au dernier cône que l'on obtiendra ainsi un plan tangent par un point M extérieur à sa surface 161

Application des plans tangents aux cônes et aux cylindres à la résolution de divers problèmes.

Pages.

Problème I. — Construire un plan qui passe par une droite donnée et s'incline d'un angle donné sur un plan quelconque ou sur l'un des plans de projection..... 162
Problème II. — Conduire par un point donné un plan qui fasse avec les plans de projection des angles donnés..... 163
Problème III. — Conduire par un point donné un plan qui fasse avec deux plans des angles donnés..... 166
Problème IV. — Construire les éléments inconnus d'un trièdre dont on donne deux dièdres et la face opposée à l'un d'eux..... 166
Problème V. — Connaissant les dièdres d'un trièdre, construire ses faces..... 167

CHAPITRE III

PROPRIÉTÉS DES COURBES PLANES OU GAUCHES ET DE LEURS PROJECTIONS

Définition. — Branches infinies..... 168
Enveloppes et enveloppées..... 169
Courbe géométrique. — Courbe graphique. — Courbe d'erreur..... 170
Construire la tangente en un point d'une courbe graphique..... 170
Trouver le point de contact d'une tangente menée à une courbe graphique par un point extérieur..... 171
Points remarquables et points singuliers..... 171
Points d'inflexion..... 172
Points de rebroussement..... 172
Point multiple. — Point double..... 172
Point anguleux..... 173
Plan osculateur. — Définition..... 173
Le plan osculateur traverse la courbe..... 174
Chaque fois que la génératrice d'un cône est tangente à une courbe de sa surface, le plan osculateur de la courbe au point de contact touche la surface au même point..... 174
Point d'inflexion de la projection d'une courbe gauche..... 175
Points de rebroussement de la projection d'une courbe gauche..... 176

CHAPITRE IV

PLANS TANGENTS AUX SURFACES DE RÉVOLUTION. — CONTOUR APPARENT

Dans toute surface de révolution, le plan tangent est perpendiculaire au méridien du point de contact... 177
La normale en un point d'une surface de révolution n'est autre que celle du méridien de ce point..... 178
Lorsqu'une surface de révolution offre un méridien principal par rapport à un plan de projection, ce méridien est le contour apparent de la surface relatif à ce même plan de projection..... 178
Surfaces enveloppes. — Définitions..... 178
Tout le long de la caractéristique, une surface enveloppe touche la surface enveloppée correspondante... 179
Une surface de révolution peut être considérée comme l'enveloppe d'une sphère, d'un cône ou d'un cylindre..... 179
Le contour apparent d'une surface enveloppe est le lieu des points de rencontre des contours apparents de ses enveloppées avec les caractéristiques correspondantes..... 180
Autres propriétés des contours apparents des surfaces enveloppes..... 181

Tracés des plans tangents et des contours apparents des surfaces de révolution.

Pages.

Représenter par ses contours apparents une surface de révolution dont l'axe est vertical, et construire ensuite l'une des projections d'un point de cette surface, connaissant l'autre projection de ce point.. 181
Construire le plan tangent en un point d'une surface de révolution..... 184
Mener par un point extérieur à une surface de révolution un plan qui la touche sur un parallèle donné... 186
Mener par un point extérieur à une surface de révolution un plan qui la touche sur un méridien donné... 187
Mener parallèlement à une droite donnée un plan qui touche une surface de révolution sur un parallèle donné..... 187
Mener parallèlement à une droite donnée un plan qui touche une surface de révolution sur un méridien donné..... 189
Construire les projections de la courbe de contact d'une surface de révolution avec un cône circonscrit dont on donne le sommet..... 190
Théorème. — Lorsqu'une courbe admet un plan de symétrie perpendiculaire au plan horizontal, ses points le plus haut et le plus bas sont dans ce plan, et réciproquement..... 191
Construire la trace horizontale d'un cône circonscrit à une surface de révolution..... 195
Construire les projections de la courbe de contact d'une surface de révolution et d'un cylindre circonscrit. 198
Construire la trace horizontale du cylindre circonscrit dans une direction donnée à une surface de révolution..... 201
Construire les projections de la courbe de contact d'un tore général et d'un cylindre circonscrit. — Méthode de Dunesme..... 202
Construire les projections de la courbe de contact d'un tore et d'un cylindre circonscrit dans une direction donnée..... 204
Cône et cylindre circonscrits aux surfaces de révolution du second degré. — La courbe de contact d'une surface du second degré et d'un cône circonscrit est plane..... 206
Construire les projections de la courbe de contact d'une surface de révolution du second ordre et d'un cône circonscrit dont le sommet est donné..... 207
Construire la trace horizontale d'un cône circonscrit à une surface de révolution du second degré..... 209
Construire les projections de la courbe de contact et la trace horizontale du cylindre circonscrit à une surface de révolution du second degré..... 210
Construire les contours apparents d'une surface de révolution quelconque..... 210
Cas du tore..... 212
Représenter par ses contours apparents une surface de révolution dont l'axe est une droite de front..... 214
Connaissant l'axe et le rayon d'un cylindre de révolution, construire, sur les deux plans coordonnés, les contours apparents et les traces de cette surface..... 215
Connaissant l'axe, le sommet et l'angle générateur d'un cône, construire ses contours apparents et ses traces..... 215
Mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à un plan donné..... 215
Mener, parallèlement à une droite donnée, une normale à une surface de révolution..... 216
Conduire, par une droite donnée, un plan tangent à une surface de révolution..... 216
Théorème de Monge. — Lorsque deux surfaces du second degré se touchent en deux points communs, elles se coupent suivant deux courbes planes, dont les plans passent par la droite de jonction des deux points de contact..... 217
Lorsque deux surfaces du second degré sont circonscrites à une troisième, leur commune intersection est un système de deux courbes planes, dont les plans passent par la rencontre de ceux des courbes de contact..... 218
Lorsque deux cônes sont circonscrits à une même surface du second degré, leur commune intersection est un système de deux courbes planes dont les plans passent par la droite commune à ceux des courbes de contact..... 218
Conduire par une droite donnée un plan tangent à une surface de révolution du second degré..... 218

Pages.
Conduire par un point donné un plan tangent commun à deux surfaces de révolution..... 220
Mener par un point donné un plan tangent commun à une surface de révolution et à un cône; cas où la surface de révolution est une sphère..... 221
Mener un plan tangent à trois surfaces de révolution dont deux sont homothétiques. — Cas de trois sphères..... 222

CHAPITRE V

HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION A UNE NAPPE, OU SURFACE GAUCHE DE RÉVOLUTION

Les projections des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde de révolution à une nappe sur le plan du collier ou sur un plan parallèle sont tangentes au collier ou à sa projection..... 224
Les sections planes de l'hyperboloïde de révolution à une nappe sont des courbes du second degré..... 225
La projection de toute section plane d'un cône de révolution sur un plan conduit par le sommet et perpendiculaire à l'axe est une conique dont un des foyers est le sommet du cône et dont la directrice correspondante est la trace du plan sécant sur le plan de projection..... 226
L'hyperboloïde gauche de révolution peut être engendré par la rotation complète d'une hyperbole tournant autour de son axe non transverse..... 226
L'hyperboloïde de révolution à une nappe admet un double mode de génération rectiligne..... 227
Distinction des génératrices de systèmes différents..... 228
Deux génératrices appartenant à deux systèmes différents sont toujours dans un même plan, tandis qu'au contraire, deux génératrices de même système ne se trouvent jamais dans un même plan..... 229
Tout plan mené par une génératrice rectiligne de l'hyperboloïde de révolution à une nappe est tangent à la surface en un point de cette génératrice..... 230
Le cône asymptote de l'hyperboloïde à une nappe est l'enveloppe des plans asymptotiques de la surface. 231
Le cône asymptote de l'hyperboloïde de révolution à une nappe est le lieu des droites que l'on obtient en transportant, parallèlement à elles-mêmes, au centre du collier, les asymptotes des sections planes de l'hyperboloïde..... 231
Représenter par ses contours apparents l'hyperboloïde de révolution à une nappe..... 231
Construire les projections d'un point de la surface gauche de révolution et mener le plan tangent en ce point..... 232
Problème inverse du plan tangent..... 233
Détermination des enveloppées sphériques..... 233
Détermination des enveloppées coniques..... 234
Mener, ou par un point donné, ou parallèlement à une droite donnée, un plan qui touche l'hyperboloïde de révolution à une nappe sur un parallèle assigné ou sur une génératrice désignée..... 234
Étant donné un hyperboloïde de révolution à une nappe, conduire, par une génératrice assignée, un plan tangent qui s'incline sur l'horizon d'un angle donné..... 234
Un hyperboloïde de révolution à une nappe étant donné par son axe z, z' et par l'une g, g' de ses génératrices principales, lui mener un plan tangent parallèle à un plan donné..... 234
Lorsque deux surfaces du second degré ont en commun deux droites, leur intersection est un système de quatre droites..... 235
Le paraboloïde hyperbolique offre un double mode de génération rectiligne..... 235
Propriétés des génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique..... 236
Construire les points de rencontre d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution à une nappe..... 237
Mener par une droite donnée un plan tangent à l'hyperboloïde de révolution à une nappe..... 240
A l'hyperboloïde gauche de révolution mener, par un point, un plan tangent dont le contact soit sur un méridien assigné..... 241

Pages.

Mener à l'hyperboloïde, parallèlement à une droite donnée, un plan tangent dont le contact soit sur un méridien désigné 241
Trouver la courbe de contact et la trace horizontale d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à l'hyperboloïde de révolution à une nappe 241
Application. — Conduire par une droite donnée un plan tangent à une surface de révolution quelconque. 242

EXERCICES SUR LES PLANS TANGENTS AU CONE, AU CYLINDRE ET AUX SURFACES DE RÉVOLUTION

Problème I. — Deux droites étant données, déterminer, par l'emploi d'un cylindre de révolution ayant pour axe l'une d'elles et touchant l'autre, leur commune perpendiculaire 243
Problème II. — Construire une normale commune à deux cônes donnés 244
Problème III. — Construire une sphère qui touche, par deux points diamétralement opposés, deux cônes, un cône et un cylindre ou deux cylindres donnés 244
Problème IV. — Trois cercles étant donnés sur la surface d'une sphère, construire un quatrième cercle tangent aux trois premiers 245
Problème V. — On demande de représenter par ses projections le corps engendré par un triangle équilatéral tournant autour d'un de ses côtés 248
Problème VI. — Mener à un cône conduit par une courbe du second degré γ, γ' et trois points (a, a'), (b, b'), (c, c'), un plan tangent par l'un c, c' des points donnés 249
Problème VII. — Construire les sommets des deux cônes que l'on peut conduire par une parabole placée sur le plan horizontal, et par un cercle décrit sur une corde de la parabole comme diamètre, dans un plan incliné de 45° sur l'horizon 250
Problème VIII. — Deux droites et un point sur chacune d'elles étant donnés, déterminer deux cylindres de révolution touchant les droites aux points donnés et tels : 1° qu'en ces points les plans tangents soient parallèles entre eux; 2° que ces mêmes points appartiennent à une section droite du cylindre. 250
Problème IX. — Conduire, sans recourir aux sphères inscrites, un plan tangent commun à deux cônes de révolution de même sommet 252
Problème X. — Construire les projections de trois cônes de révolution égaux entre eux, ayant leurs axes dans l'angle 1 et se touchant deux à deux par des génératrices : connaissant leur hauteur commune h, sachant en outre que l'un d'eux touche les deux plans de projection, et qu'un autre touche le plan horizontal suivant une génératrice de profil 252
Problème XI. — Trois cônes ont leurs sommets en ligne droite, l'un d'eux est quelconque et les deux autres ont pour directrice deux sections planes du premier ; on demande de mener à ces deux derniers cônes un plan tangent commun 255
Problème XII. — A deux cônes, déterminés par un sommet commun placé à la surface d'une sphère donnée, et par deux bases, qui sont les sections de la même sphère par deux plans donnés, mener un plan tangent commun 256
Problème XIII. — Deux cônes de révolution étant donnés par leurs axes (z, z') (z_1, z^1), par leurs sommets $(s, s'$ $t, t')$ et par leurs angles générateurs, on propose de construire : 1° les contours apparents des deux surfaces; 2° leurs plans tangents parallèles 257
Problème XIV. — Construire un plan équidistant de quatre sphères données 258
Problème XV. — A deux cônes, ayant pour sommet commun l'un des foyers des méridiens d'un ellipsoïde de révolution allongé, et pour bases deux sections planes de l'ellipsoïde, mener un plan tangent commun 258
Problème XVI. — On circonscrit à un ellipsoïde de révolution dont l'axe est vertical un cylindre parallèle à une direction donnée, et on propose de mener à ce cylindre un plan tangent par un point extérieur à sa surface 258

Pages.

Problème XVII. — On circonscrit à une surface de révolution dont l'axe est vertical un cylindre parallèle à une direction donnée, et on propose de mener à ce cylindre un plan tangent qui s'incline d'un angle donné sur l'horizon..... 258

Problème XVIII. — Par un point pris sur une surface de révolution, dont l'axe est sur la ligne de terre, lui mener un plan tangent..... 258

Problème XIX. — Employer le tracé du § 439 à la détermination du plan tangent en un point d'une surface de révolution..... 259

Problème XX — Un ellipsoïde aplati et de révolution étant donné, par son axe de rotation z, z', que l'on suppose placé de front, et par son ellipse méridienne principale E, E', circonscrire à cette surface un cylindre de front dont la trace horizontale soit circulaire..... 259

Problème XXI. — Une sphère opaque de rayon R est posée sur le plan horizontal et touche en même temps le point vertical de projection. Elle est éclairée par un point lumineux situé à une distance 2R au-dessus du plan horizontal, et tellement placé, que l'ombre portée sur le plan horizontal rencontre la ligne de terre en un point donné A et sous un angle donné α. On demande : 1° de tracer l'ombre portée par la sphère sur le plan horizontal de projection; 2° de trouver la position du point lumineux; 3° de tracer l'ombre portée par la sphère sur le plan vertical de projection; 4° de construire les projections de l'ombre propre de la sphère..... 259

Problème XXII. — Faire en sorte qu'une conique donnée engendre, en tournant autour d'un axe, une surface du second degré, et construire le méridien de la surface..... 261

Problème XXIII. — On donne : une ellipse $a'b'$, $ambn$, à projections droite et circulaire; un point s, s' et deux droites de front, dont l'une cd, $c'd'$ a pour projection horizontale un diamètre prolongé du cercle $ambn$ et pour projection verticale une parallèle à $a'b'$, dont l'autre gf, $g'f'$ a sa projection verticale perpendiculaire à $c'd'$. On demande : 1° de mener un plan par fg, $f'g'$ qui touche la surface de révolution qu'engendre l'ellipse donnée pendant sa rotation complète autour de l'axe cd, $c'd'$; 2° de construire un plan tangent commun à cette surface de révolution et au cône ayant pour base l'ellipse donnée et s, s' pour sommet; 3° de représenter par ses projections la surface de révolution engendrée par l'ellipse donnée..... 264

Problème XXIV. — Un tore, dont l'axe z, z' est vertical, étant donné, on prend un point s, s' sur une perpendiculaire au plan vertical menée par le centre de cette surface, et on demande de construire les projections de la courbe de contact du tore et du cône circonscrit dont le sommet est en ce point.... 265

Problème XXV. — Par un point donné mener une droite doublement tangente à un tore..... 267

Problème XXVI. — Mener à un tore, dans une direction donnée, des droites doublement tangentes..... 269

Problème XXVII. — Construire les points doubles de la trace horizontale d'un cône ou d'un cylindre circonscrit au tore..... 271

Problème XXVIII. — Connaissant le rayon de l'une des enveloppées sphériques d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, construire les projections de cette enveloppée..... 271

Problème XXIX. — Trois directrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe étant données, construire le centre de cette surface..... 271

Problème XXX. — Conduire par une droite parallèle à l'une des génératrices rectilignes d'un hyperboloïde de révolution à une nappe un plan tangent à cette surface..... 271

Problème XXXI. — On donne un ellipsoïde à trois axes inégaux ayant l'un de ses plans principaux parallèle au plan vertical, et on demande de construire : 1° les projections d'un point de la surface et le plan tangent qui y passe; 2° les projections de la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à l'ellipsoïde; 3° les plans tangents parallèles à un plan donné..... 272

Problème XXXII. — Construire les projections de deux hyperboloïdes de révolution à une nappe, égaux entre eux, dont les axes sont donnés et tels, que, par des points placés sur des parallèles égaux, ces hyperboloïdes se touchent le long d'une génératrice rectiligne..... 273

Pages.

Problème VIII. — Par un point donné conduire une droite qui fasse, avec les deux plans de projection, un même angle donné 69
Problème IX. — Construire directement, par un point donné, un plan qui fasse, avec les deux plans de projection, un même angle donné 70
Problème X. — Construire la plus courte distance de deux droites dont les projections horizontales sont parallèles 71
Problème XI. — Déduire de l'épure précédente la construction de la plus courte distance de deux droites quelconques 72
Problème XII. — Les projections d'une ligne droite et la projection horizontale d'une autre droite, parallèle à la première, étant données, construire la projection verticale de la seconde droite, la distance des deux parallèles étant également connue 72
Problème XIII. — Trouver directement l'angle d'un plan dont les traces sont en ligne droite et d'une droite dont les projections se confondent sur les traces de ce plan 72
Problème XIV. — Trouver directement l'angle d'une droite de profil et d'un plan déterminé par la ligne de terre et par un de ses points 73
Problème XV. — Trouver l'angle d'une droite de profil et d'un plan quelconque 73
Problème XVI. — Construire la distance d'un point quelconque à une droite de profil 73
Problème XVII. — Construire, par la méthode des rabattements, la distance d'un point à une droite 74
Problème XVIII. — On propose de construire les traces d'un plan, conduit par une ligne de front et placé à une distance connue d'un point donné 74
Problème XIX. — Construire quatre plans parallèles équidistants, connaissant un point de chacun d'eux. 74
Problème XX. — Étant données les traces horizontales de deux plans, faisant entre eux un angle donné, et la projection horizontale de leur commune intersection, trouver leurs traces verticales 75
Problème XXI. — Par une droite située dans un plan donné, conduire un plan faisant avec le premier un angle donné 76
Problème XXII. — Étant données les deux projections *d*, *d'* d'une droite, la projection horizontale δ d'une seconde droite, et celle *ab* de la plus courte distance entre D et Δ, trouver les projections verticales des droites AB, Δ, et la vraie grandeur de leur plus courte distance 76
Problème XXIII. — Étant données les projections d'une droite D, la projection horizontale d'une seconde droite Δ, la vraie grandeur de la plus courte distance entre D et Δ, ainsi que les projections du point où elle rencontre la droite D, trouver la projection verticale de la droite Δ, et les deux projections de la plus courte distance 76
Problème XXIV. — Étant donné un plan PβP', conduire dans ce plan et par un de ses points A, une droite qui fasse avec la direction de la ligne de terre un angle α donné 76
Problème XXV. — Connaissant l'une des projections d'une droite, les deux projections de l'un de ses points et l'angle qu'elle doit faire avec un plan, on demande de construire la seconde projection de cette droite. 77
Problème XXVI. — Construire la distance d'un point *o*, *o'* à une droite de front *d*, *d'* 77
Problème XXVII. — Construire les traces d'un plan incliné de 45 degrés sur l'horizon, connaissant : 1° la projection verticale *a'b'* de l'une de ses lignes de front, et 2° la projection *c'*, sur le même plan coordonné, d'un des points du plan inconnu dont l'éloignement est double de celui de la droite AB. 77
Problème XXVIII. — Construire l'angle de deux plans (P, P') (Q, Q') et les traces du plan bissecteur de l'un des dièdres qu'ils forment (cas particuliers) 77
Problème XXIX. — Mener par un point donné, un plan également incliné sur les deux plans coordonnés et dont les traces forment, dans l'espace, un angle donné 78
Problème XXX. — Connaissant la vraie grandeur d'un angle, les deux projections de l'un de ses côtés et la projection horizontale de l'autre côté, construire la projection verticale de ce dernier côté 78
Problème XXXI. — Construire l'angle de deux droites à projections de noms différents confondues 78
Problème XXXII. — Une droite est donnée par ses deux projections qui se rencontrent en un même point de la ligne de terre ; mener par la droite un plan tel, que ses deux traces, étant relevées, forment un angle bissecté par la droite donnée 79

Problème XXXIII. — Mener par trois points donnés A, B, C, trois plans parallèles à une même droite D, et tels, que les deux premiers forment entre eux un angle donné φ bissecté par le troisième..... 79
Problème XXXIV. — Construire quatre droites non situées deux à deux dans un même plan, équidistantes et qui offrent une même perpendiculaire commune, connaissant un point de chacune d'elles A, B, C, D, et un point O de leur commune perpendiculaire..... 80

CHAPITRE VI

PROBLÈMES RELATIFS AUX ANGLES TRIÈDRES

Problème général. — Déterminer les éléments inconnus d'un trièdre, connaissant une face *c*, la projection *o* d'un point de l'arête opposée sur le plan de cette face, et la cote de ce point par rapport au plan de la même face..... 81
Premier cas. — Connaissant les faces *a*, *b*, *c*, d'un angle trièdre, construire les angles plans de ses dièdres..... 82
Deuxième cas. — Construire les éléments inconnus d'un trièdre, connaissant deux faces et le dièdre compris..... 83
Troisième cas. — Construire les éléments inconnus d'un trièdre dont on donne deux faces *b*, *c* et le dièdre C opposé à l'une d'elles..... 83
Quatrième cas. — Construire les éléments inconnus d'un trièdre dont on donne une face *c* et les deux angles dièdres adjacents A, B..... 84
Réduire l'angle à l'horizon..... 84

CHAPITRE VII

DES POLYÈDRES

Représentation des polyèdres..... 85
Section plane des polyèdres..... 89
Homologie plane..... 90
Rapport anharmonique..... 93
Section plane du prisme..... 96
Section plane de la pyramide..... 97
Par un point donné conduire un plan coupant les faces latérales d'une pyramide quadrangulaire suivant un parallélogramme..... 98
Intersection d'une droite et d'un polyèdre. — Application au prisme et à la pyramide..... 100
Intersection de deux polyèdres..... 101
Application. — Intersection de deux cubes qui ont une diagonale verticale commune..... 103
Intersection de pyramides..... 105
Intersection d'une pyramide et d'un prisme..... 107
Intersection de deux prismes..... 107
Développement des polyèdres..... 108
Ligne minimum unissant deux points de la surface d'un polyèdre..... 109
Section droite d'un prisme oblique..... 111
Circonscrire une sphère à un tétraèdre..... 113
Construire les sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre donné..... 113

EXERCICES SUR LES CHAPITRES VI ET VII

Pages.

Problème I. — Construire les centres des sphères tangentes à quatre plans, en basant le tracé sur le théorème qui suit :

Théorème. — Si une sphère est inscrite à un tétraèdre, les quatre points de contact coïncident, quand on fait le rabattement intérieur de trois faces, sur la quatrième. De plus, le point commun de contact est le centre du cercle circonscrit au triangle formé par les trois rabattements du quatrième sommet 117

Problème II. — Deux points étant donnés, mener par un troisième point donné une droite distante des deux premiers points de deux longueurs connues 118

Problème III. — Mener par un point donné A de l'espace, une droite située à une distance connue d'une droite donnée B, et en même temps à une distance également connue d'un point donné D 118

Problème IV. — Construire une droite qui s'appuie sur deux droites données, non situées dans un même plan, et qui fasse avec ces droites des angles respectivement égaux à des angles donnés 119

Problème V. — Étant donnés : les angles que fait l'une des arêtes latérales d'une pyramide avec les côtés de la base qu'elle rencontre, la longueur de cette arête et les projections de la base, construire les projections de la pyramide 120

Problème VI. — Construire les projections de cinq polyèdres réguliers et les développements de leurs surfaces, connaissant la longueur des arêtes 120

Problème VII. — Construire les rectilignes des dièdres des cinq polyèdres réguliers 122

Problème VIII. — Achever le tracé des projections d'une pyramide, connaissant la projection horizontale de la base, les projections verticales de trois sommets de cette base, la projection horizontale du pied de la hauteur et la longueur de cette hauteur 122

Problème IX. — Réduire à l'horizon l'angle d'une droite horizontale et d'une droite quelconque 122

Problème X. — Conduire par un point, pris sur l'une des arêtes latérales d'un tétraèdre, un plan qui détermine, sur la surface latérale de ce polyèdre, une section triangulaire de périmètre minimum 122

Problème XI. — Construire une sphère tangente aux arêtes d'un trièdre et au plan horizontal de projection 122

Problème XII. — Par un point donné conduire une sphère tangente aux trois faces d'un trièdre donné 124

Problème XIII. — On donne dans l'espace deux droites, qui se coupent, et deux points ; conduire par ces deux points une sphère tangente aux deux droites 124

Problème XIV. — On donne trois points et une droite ; conduire une sphère tangente à la droite, par les trois points donnés 124

Problème XV. — Conduire par un point un plan tel, que sa section sur les faces latérales d'un prisme donné soit un polygone inscriptible au cercle 124

Problème XVI. — Construire les projections d'un parallélipipède ayant trois de ses arêtes sur trois droites données dans l'espace 125

Problème XVII. — Construire les projections d'un parallélipipède rectangle, connaissant la projection verticale o' de son centre, les deux projections d, d' de l'une de ses arêtes prolongées, celles d'un point a, a' d'une seconde arête également prolongée et enfin la projection horizontale δ de cette dernière 125

Problème XVIII. — Étant données la longueur du côté d'un cube, ainsi que les projections de trois points placés sur trois arêtes contiguës de ce solide, on demande : 1° les projections du cube ; 2° de couper le cube par un plan suivant un hexagone régulier, et de fournir les projections et la vraie grandeur de cette section 126

Problème XIX. — Construire les projections d'un tétraèdre, connaissant un point de chacune des arêtes de ce polyèdre 126

Problème XX. — Construire les projections du triacontaèdre à faces quadrangulaires 127

Pages.

Problème XXI. — Étant donné un parallélipipède placé d'une manière quelconque par rapport aux plans de projection et dont A, B, C représentent trois arêtes contiguës, on propose d'amener le parallélipipède par trois rotations successives, la première autour d'un axe vertical, la deuxième autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, la troisième autour d'un axe vertical, dans une position telle, que les arêtes A et B soient parallèles au plan horizontal et l'autre C parallèle au plan vertical.. 128

Problème XXII. — On donne la projection horizontale d'un parallélipipède rectangle et la projection verticale d'un sommet, construire la projection verticale du parallélipipède..... 128

Problème XXIII. — Couper un cube par un plan suivant un hexagone équiangle dont deux côtés consécutifs soient dans le rapport de un à deux..... 128

Problème XXIV. — Connaissant les projections de l'une des faces d'un tétraèdre équifacial, construire : 1° celle du tétraèdre; 2° les sphères tangentes aux quatre faces de ce polyèdre..... 128

Problème XXV. — Connaissant les projections de la base et la vraie grandeur de la hauteur d'un tétraèdre à arêtes opposées orthogonales, déterminer : 1° les projections du tétraèdre ; 2° les plus courtes distances des arêtes opposées; 3° la sphère qui passe par les milieux des arêtes opposées et par les pieds de leur plus courte distance..... 130

Problème XXVI. — Étant données les projections d'un tétraèdre dont la base est placée dans un plan horizontal, on propose de déterminer : 1° les projections d'une droite passant par le sommet de la pyramide et également inclinée sur ses faces latérales; 2° un point de cette droite tel, que de ce point on puisse voir l'aire latérale de la pyramide en véritable grandeur sur le plan horizontal de projection..... 130

Problème XXVII. — Connaissant les projections d'un tétraèdre, dont la base est sur le plan horizontal de projection, on propose de construire : les plus courtes distances des arêtes opposées prises deux à deux, celles des hauteurs du tétraèdre également prises deux à deux, et encore celles des perpendiculaires communes trouvées en dernier lieu, toujours prises deux à deux..... 131

Problème XXVIII. — Construire le développement du tétrahexaèdre..... 131

Problème XXIX. — Sur le plan horizontal de projection, on donne : 1° l'une ABCD des bases d'un tronc de pyramide quadrangulaire; 2° un point *p* de la trace du plan de l'autre base, et on demande de faire en sorte que la projection horizontale de celle-ci soit un rectangle, puis d'achever la construction de la projection horizontale du tronc de pyramide..... 132

Problème XXX. — Étant données la base et la hauteur d'une pyramide quadrangulaire telle, que les parallélogrammes tracés sur sa surface latérale se projettent sur le plan de base suivant les carrés, construire les projections du sommet de la pyramide..... 132

Problème XXXI. — Étant donnés les plans de deux des faces latérales, ainsi que la base d'une pyramide quadrangulaire, faire en sorte que les parallélogrammes tracés sur sa surface latérale se projettent suivant des losanges, sur le plan de base..... 132

Appliquer la méthode de transmutation des figures aux trois dernières épures..... 133

Problème XXXII. — La base d'une pyramide quadrangulaire étant donnée, faire en sorte que l'une des sections planes de la pyramide se projette suivant un second quadrilatère donné, sur le plan de base..... 134

Problème XXXIII. — Construire les projections d'un dodécaèdre rhomboïdal défini de la manière suivante (voy. § 335)..... 136

Problème XXXIV. — Construire la commune intersection du dodécaèdre rhomboïdal dont on vient de déterminer les projections, et d'un prisme quadrangulaire droit ayant ses arêtes parallèles à la ligne de terre..... 138

LIVRE II

CONES, CYLINDRES ET SURFACES DE RÉVOLUTION

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Pages.

Définitions 141
Surfaces de révolution 141
Surfaces réglées 143
Plan tangent en général. — Théorème fondamental 144
Conséquences du théorème fondamental 145
Représentation des surfaces. — Contour apparent 145

CHAPITRE II

DES PLANS TANGENTS AU CONE ET AU CYLINDRE

Théorème fondamental 147
Nombre de conditions nécessaires à la détermination du plan tangent 147
Projections d'un point placé sur une surface conique ou sur une surface cylindrique 148
Plan tangent en un point d'une surface conique 148
Plan tangent en un point d'une surface cylindrique 148
Construction du contour apparent d'une surface conique 148
Construction du contour apparent d'une surface cylindrique 149
Par un point extérieur à la surface d'un cône, lui mener un plan tangent 149
Mener à un cylindre un plan tangent par un point extérieur à sa surface 150
Construire le contour apparent d'un cône ou d'un cylindre pour une position quelconque du point de vue 151
Mener à un cône un plan tangent parallèle à une droite donnée 152
Mener à un cylindre un plan tangent parallèle à une droite donnée 152
Étant donnée une surface conique ou cylindrique, trouver les points en lesquels un plan rencontre cette surface normalement 154
Conduire par un point une droite à la fois tangente à deux surfaces coniques ou cylindriques 154
Trouver la condition pour qu'on puisse, à un cône ou à un cylindre, mener un plan tangent qui soit en même temps parallèle à un plan donné, et, en supposant que cette condition soit remplie, construire le plan tangent 154
Condition pour qu'on puisse mener un plan tangent commun à deux surfaces coniques ou cylindriques 154
A deux surfaces coniques ou cylindriques, assujetties à une condition, mener des plans tangents communs. 156
Application. — Mener à un cylindre des plans tangents qui s'inclinent d'un angle donné sur l'horizon 159
Construire les plans tangents parallèles entre eux à deux surfaces coniques ou cylindriques 160
Soit donné un premier cône de sommet S_1 et dont la base B_1 est dans un plan P_1, que l'on coupe par un plan P_2 et dont on adopte la section obtenue B_2 comme base d'un second cône dont le sommet S_2 est donné; on coupera à son tour ce nouveau cône par un plan P_3, qui donnera une section B_3, servant de base à un cône de sommet donné S_3, etc.; on demande de mener au dernier cône que l'on obtiendra ainsi un plan tangent par un point M extérieur à sa surface 161

Application des plans tangents aux cônes et aux cylindres à la résolution de divers problèmes.

Pages.

Problème I. — Construire un plan qui passe par une droite donnée et s'incline d'un angle donné sur un plan quelconque ou sur l'un des plans de projection..... 162
Problème II. — Conduire par un point donné un plan qui fasse avec les plans de projection des angles donnés..... 163
Problème III. — Conduire par un point donné un plan qui fasse avec deux plans des angles donnés..... 166
Problème IV. — Construire les éléments inconnus d'un trièdre dont on donne deux dièdres et la face opposée à l'un d'eux..... 166
Problème V. — Connaissant les dièdres d'un trièdre, construire ses faces..... 167

CHAPITRE III

PROPRIÉTÉS DES COURBES PLANES OU GAUCHES ET DE LEURS PROJECTIONS

Définition. — Branches infinies..... 168
Enveloppes et enveloppées..... 169
Courbe géométrique. — Courbe graphique. — Courbe d'erreur..... 170
Construire la tangente en un point d'une courbe graphique..... 170
Trouver le point de contact d'une tangente menée à une courbe graphique par un point extérieur..... 171
Points remarquables et points singuliers..... 171
Points d'inflexion..... 172
Points de rebroussement..... 172
Point multiple. — Point double..... 172
Point anguleux..... 173
Plan osculateur. — Définition..... 173
Le plan osculateur traverse la courbe..... 174
Chaque fois que la génératrice d'un cône est tangente à une courbe de sa surface, le plan osculateur de la courbe au point de contact touche la surface au même point..... 174
Point d'inflexion de la projection d'une courbe gauche..... 175
Points de rebroussement de la projection d'une courbe gauche..... 176

CHAPITRE IV

PLANS TANGENTS AUX SURFACES DE RÉVOLUTION. — CONTOUR APPARENT

Dans toute surface de révolution, le plan tangent est perpendiculaire au méridien du point de contact... 177
La normale en un point d'une surface de révolution n'est autre que celle du méridien de ce point..... 178
Lorsqu'une surface de révolution offre un méridien principal par rapport à un plan de projection, ce méridien est le contour apparent de la surface relatif à ce même plan de projection..... 178
Surfaces enveloppes. — Définitions..... 178
Tout le long de la caractéristique, une surface enveloppe touche la surface enveloppée correspondante... 179
Une surface de révolution peut être considérée comme l'enveloppe d'une sphère, d'un cône ou d'un cylindre..... 179
Le contour apparent d'une surface enveloppe est le lieu des points de rencontre des contours apparents de ses enveloppées avec les caractéristiques correspondantes..... 180
Autres propriétés des contours apparents des surfaces enveloppes..... 181

Tracés des plans tangents et des contours apparents des surfaces de révolution.

Pages.

Représenter par ses contours apparents une surface de révolution dont l'axe est vertical, et construire ensuite l'une des projections d'un point de cette surface, connaissant l'autre projection de ce point.. 181
Construire le plan tangent en un point d'une surface de révolution..... 184
Mener par un point extérieur à une surface de révolution un plan qui la touche sur un parallèle donné... 186
Mener par un point extérieur à une surface de révolution un plan qui la touche sur un méridien donné... 187
Mener parallèlement à une droite donnée un plan qui touche une surface de révolution sur un parallèle donné..... 187
Mener parallèlement à une droite donnée un plan qui touche une surface de révolution sur un méridien donné..... 189
Construire les projections de la courbe de contact d'une surface de révolution avec un cône circonscrit dont on donne le sommet..... 190
Théorème. — Lorsqu'une courbe admet un plan de symétrie perpendiculaire au plan horizontal, ses points le plus haut et le plus bas sont dans ce plan, et réciproquement..... 191
Construire la trace horizontale d'un cône circonscrit à une surface de révolution..... 195
Construire les projections de la courbe de contact d'une surface de révolution et d'un cylindre circonscrit. 198
Construire la trace horizontale du cylindre circonscrit dans une direction donnée à une surface de révolution..... 201
Construire les projections de la courbe de contact d'un tore général et d'un cylindre circonscrit. — Méthode de Dunesme..... 202
Construire les projections de la courbe de contact d'un tore et d'un cylindre circonscrit dans une direction donnée..... 204
Cône et cylindre circonscrits aux surfaces de révolution du second degré. — La courbe de contact d'une surface du second degré et d'un cône circonscrit est plane..... 206
Construire les projections de la courbe de contact d'une surface de révolution du second ordre et d'un cône circonscrit dont le sommet est donné..... 207
Construire la trace horizontale d'un cône circonscrit à une surface de révolution du second degré..... 209
Construire les projections de la courbe de contact et la trace horizontale du cylindre circonscrit à une surface de révolution du second degré..... 210
Construire les contours apparents d'une surface de révolution quelconque..... 210
Cas du tore..... 212
Représenter par ses contours apparents une surface de révolution dont l'axe est une droite de front..... 214
Connaissant l'axe et le rayon d'un cylindre de révolution, construire, sur les deux plans coordonnés, les contours apparents et les traces de cette surface..... 215
Connaissant l'axe, le sommet et l'angle générateur d'un cône, construire ses contours apparents et ses traces..... 215
Mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à un plan donné..... 215
Mener, parallèlement à une droite donnée, une normale à une surface de révolution..... 216
Conduire, par une droite donnée, un plan tangent à une surface de révolution..... 216
Théorème de Monge. — Lorsque deux surfaces du second degré se touchent en deux points communs, elles se coupent suivant deux courbes planes, dont les plans passent par la droite de jonction des deux points de contact..... 217
Lorsque deux surfaces du second degré sont circonscrites à une troisième, leur commune intersection est un système de deux courbes planes, dont les plans passent par la rencontre de ceux des courbes de contact..... 218
Lorsque deux cônes sont circonscrits à une même surface du second degré, leur commune intersection est un système de deux courbes planes dont les plans passent par la droite commune à ceux des courbes de contact..... 218
Conduire par une droite donnée un plan tangent à une surface de révolution du second degré..... 218

Pages.
Conduire par un point donné un plan tangent commun à deux surfaces de révolution..... 220
Mener par un point donné un plan tangent commun à une surface de révolution et à un cône; cas où la surface de révolution est une sphère..... 221
Mener un plan tangent à trois surfaces de révolution dont deux sont homothétiques. — Cas de trois sphères..... 222

CHAPITRE V

HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION A UNE NAPPE, OU SURFACE GAUCHE DE RÉVOLUTION

Les projections des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde de révolution à une nappe sur le plan du collier ou sur un plan parallèle sont tangentes au collier ou à sa projection..... 224
Les sections planes de l'hyperboloïde de révolution à une nappe sont des courbes du second degré..... 225
La projection de toute section plane d'un cône de révolution sur un plan conduit par le sommet et perpendiculaire à l'axe est une conique dont un des foyers est le sommet du cône et dont la directrice correspondante est la trace du plan sécant sur le plan de projection..... 226
L'hyperboloïde gauche de révolution peut être engendré par la rotation complète d'une hyperbole tournant autour de son axe non transverse..... 226
L'hyperboloïde de révolution à une nappe admet un double mode de génération rectiligne..... 227
Distinction des génératrices de systèmes différents..... 228
Deux génératrices appartenant à deux systèmes différents sont toujours dans un même plan, tandis qu'au contraire, deux génératrices de même système ne se trouvent jamais dans un même plan..... 229
Tout plan mené par une génératrice rectiligne de l'hyperboloïde de révolution à une nappe est tangent à la surface en un point de cette génératrice..... 230
Le cône asymptote de l'hyperboloïde à une nappe est l'enveloppe des plans asymptotiques de la surface. 231
Le cône asymptote de l'hyperboloïde de révolution à une nappe est le lieu des droites que l'on obtient en transportant, parallèlement à elles-mêmes, au centre du collier, les asymptotes des sections planes de l'hyperboloïde..... 231
Représenter par ses contours apparents l'hyperboloïde de révolution à une nappe..... 231
Construire les projections d'un point de la surface gauche de révolution et mener le plan tangent en ce point..... 232
Problème inverse du plan tangent..... 233
Détermination des enveloppées sphériques..... 233
Détermination des enveloppées coniques..... 234
Mener, ou par un point donné, ou parallèlement à une droite donnée, un plan qui touche l'hyperboloïde de révolution à une nappe sur un parallèle assigné ou sur une génératrice désignée..... 234
Étant donné un hyperboloïde de révolution à une nappe, conduire, par une génératrice assignée, un plan tangent qui s'incline sur l'horizon d'un angle donné..... 234
Un hyperboloïde de révolution à une nappe étant donné par son axe z, z' et par l'une g, g' de ses génératrices principales, lui mener un plan tangent parallèle à un plan donné..... 234
Lorsque deux surfaces du second degré ont en commun deux droites, leur intersection est un système de quatre droites..... 235
Le paraboloïde hyperbolique offre un double mode de génération rectiligne..... 235
Propriétés des génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique..... 236
Construire les points de rencontre d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution à une nappe..... 237
Mener par une droite donnée un plan tangent à l'hyperboloïde de révolution à une nappe..... 240
A l'hyperboloïde gauche de révolution mener, par un point, un plan tangent dont le contact soit sur un méridien assigné..... 241

Pages.

Mener à l'hyperboloïde, parallèlement à une droite donnée, un plan tangent dont le contact soit sur un méridien désigné 241
Trouver la courbe de contact et la trace horizontale d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à l'hyperboloïde de révolution à une nappe 241
Application. — Conduire par une droite donnée un plan tangent à une surface de révolution quelconque. 242

EXERCICES SUR LES PLANS TANGENTS AU CONE, AU CYLINDRE ET AUX SURFACES DE RÉVOLUTION

Problème I. — Deux droites étant données, déterminer, par l'emploi d'un cylindre de révolution ayant pour axe l'une d'elles et touchant l'autre, leur commune perpendiculaire 243
Problème II. — Construire une normale commune à deux cônes donnés 244
Problème III. — Construire une sphère qui touche, par deux points diamétralement opposés, deux cônes, un cône et un cylindre ou deux cylindres donnés 244
Problème IV. — Trois cercles étant donnés sur la surface d'une sphère, construire un quatrième cercle tangent aux trois premiers 245
Problème V. — On demande de représenter par ses projections le corps engendré par un triangle équilatéral tournant autour d'un de ses côtés 248
Problème VI. — Mener à un cône conduit par une courbe du second degré γ, γ' et trois points (a, a'), (b, b'), (c, c'), un plan tangent par l'un c, c' des points donnés 249
Problème VII. — Construire les sommets des deux cônes que l'on peut conduire par une parabole placée sur le plan horizontal, et par un cercle décrit sur une corde de la parabole comme diamètre, dans un plan incliné de 45° sur l'horizon 250
Problème VIII. — Deux droites et un point sur chacune d'elles étant donnés, déterminer deux cylindres de révolution touchant les droites aux points donnés et tels : 1° qu'en ces points les plans tangents soient parallèles entre eux; 2° que ces mêmes points appartiennent à une section droite du cylindre. 250
Problème IX. — Conduire, sans recourir aux sphères inscrites, un plan tangent commun à deux cônes de révolution de même sommet 252
Problème X. — Construire les projections de trois cônes de révolution égaux entre eux, ayant leurs axes dans l'angle 1 et se touchant deux à deux par des génératrices : connaissant leur hauteur commune h, sachant en outre que l'un d'eux touche les deux plans de projection, et qu'un autre touche le plan horizontal suivant une génératrice de profil 252
Problème XI. — Trois cônes ont leurs sommets en ligne droite, l'un d'eux est quelconque et les deux autres ont pour directrice deux sections planes du premier ; on demande de mener à ces deux derniers cônes un plan tangent commun 255
Problème XII. — A deux cônes, déterminés par un sommet commun placé à la surface d'une sphère donnée, et par deux bases, qui sont les sections de la même sphère par deux plans donnés, mener un plan tangent commun 256
Problème XIII. — Deux cônes de révolution étant donnés par leurs axes (z, z') (z_1, z^1), par leurs sommets $(s, s'$ $t, t')$ et par leurs angles générateurs, on propose de construire : 1° les contours apparents des deux surfaces; 2° leurs plans tangents parallèles 257
Problème XIV. — Construire un plan équidistant de quatre sphères données 258
Problème XV. — A deux cônes, ayant pour sommet commun l'un des foyers des méridiens d'un ellipsoïde de révolution allongé, et pour bases deux sections planes de l'ellipsoïde, mener un plan tangent commun 258
Problème XVI. — On circonscrit à un ellipsoïde de révolution dont l'axe est vertical un cylindre parallèle à une direction donnée, et on propose de mener à ce cylindre un plan tangent par un point extérieur à sa surface 258

Pages.

Problème XVII. — On circonscrit à une surface de révolution dont l'axe est vertical un cylindre parallèle à une direction donnée, et on propose de mener à ce cylindre un plan tangent qui s'incline d'un angle donné sur l'horizon..... 258

Problème XVIII. — Par un point pris sur une surface de révolution, dont l'axe est sur la ligne de terre, lui mener un plan tangent..... 258

Problème XIX. — Employer le tracé du § 439 à la détermination du plan tangent en un point d'une surface de révolution..... 259

Problème XX. — Un ellipsoïde aplati et de révolution étant donné, par son axe de rotation z, z', que l'on suppose placé de front, et par son ellipse méridienne principale E, E', circonscrire à cette surface un cylindre de front dont la trace horizontale soit circulaire..... 259

Problème XXI. — Une sphère opaque de rayon R est posée sur le plan horizontal et touche en même temps le point vertical de projection. Elle est éclairée par un point lumineux situé à une distance 2R au-dessus du plan horizontal, et tellement placé, que l'ombre portée sur le plan horizontal rencontre la ligne de terre en un point donné A et sous un angle donné α. On demande : 1° de tracer l'ombre portée par la sphère sur le plan horizontal de projection; 2° de trouver la position du point lumineux; 3° de tracer l'ombre portée par la sphère sur le plan vertical de projection; 4° de construire les projections de l'ombre propre de la sphère..... 259

Problème XXII. — Faire en sorte qu'une conique donnée engendre, en tournant autour d'un axe, une surface du second degré, et construire le méridien de la surface..... 261

Problème XXIII. — On donne : une ellipse $a'b'$, $ambn$, à projections droite et circulaire; un point s, s' et deux droites de front, dont l'une cd, $c'd'$ a pour projection horizontale un diamètre prolongé du cercle $ambn$ et pour projection verticale une parallèle à $a'b'$, dont l'autre gf, $g'f'$ a sa projection verticale perpendiculaire à $c'd'$. On demande : 1° de mener un plan par fg, $f'g'$ qui touche la surface de révolution qu'engendre l'ellipse donnée pendant sa rotation complète autour de l'axe cd, $c'd'$; 2° de construire un plan tangent commun à cette surface de révolution et au cône ayant pour base l'ellipse donnée et s, s' pour sommet; 3° de représenter par ses projections la surface de révolution engendrée par l'ellipse donnée..... 264

Problème XXIV. — Un tore, dont l'axe z, z' est vertical, étant donné, on prend un point s, s' sur une perpendiculaire au plan vertical menée par le centre de cette surface, et on demande de construire les projections de la courbe de contact du tore et du cône circonscrit dont le sommet est en ce point.... 265

Problème XXV. — Par un point donné mener une droite doublement tangente à un tore..... 267

Problème XXVI. — Mener à un tore, dans une direction donnée, des droites doublement tangentes..... 269

Problème XXVII. — Construire les points doubles de la trace horizontale d'un cône ou d'un cylindre circonscrit au tore..... 271

Problème XXVIII. — Connaissant le rayon de l'une des enveloppées sphériques d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, construire les projections de cette enveloppée..... 271

Problème XXIX. — Trois directrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe étant données, construire le centre de cette surface..... 271

Problème XXX. — Conduire par une droite parallèle à l'une des génératrices rectilignes d'un hyperboloïde de révolution à une nappe un plan tangent à cette surface..... 271

Problème XXXI. — On donne un ellipsoïde à trois axes inégaux ayant l'un de ses plans principaux parallèle au plan vertical, et on demande de construire : 1° les projections d'un point de la surface et le plan tangent qui y passe; 2° les projections de la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à l'ellipsoïde; 3° les plans tangents parallèles à un plan donné..... 272

Problème XXXII. — Construire les projections de deux hyperboloïdes de révolution à une nappe, égaux entre eux, dont les axes sont donnés et tels, que, par des points placés sur des parallèles égaux, ces hyperboloïdes se touchent le long d'une génératrice rectiligne..... 273

CHAPITRE V *bis*

SECTIONS PLANES DU CONE, DU CYLINDRE ET DES SURFACES DE RÉVOLUTION

Pages.

Généralités. — Intersection de deux surfaces. — Construction de la tangente. — Méthode de BINET..... 275

Asymptotes. — Courbes hyperboliques. — Courbes paraboliques. — Points remarquables de l'intersection de deux surfaces. — Surfaces limites..... 276

Section plane du cône et du cylindre.

Construire les projections et la véritable grandeur de la section d'un cône quelconque par un plan..... 277

Construire les projections et la véritable grandeur de l'intersection d'un cylindre avec un plan..... 283

Application de l'homologie à la recherche des sections planes du cône et du cylindre..... 285

Développement du cône et du cylindre.

Théorème fondamental. — Lorsqu'on développe une surface conique : 1° une partie quelconque d'une ligne tracée sur cette surface est de même longueur que la partie correspondante de sa transformée; 2° l'angle des transformées de deux lignes quelconques tracées sur la surface est égal à celui de ces lignes..... 287

A tout point, pris sur une section plane d'un cône et pour lequel le plan de la section se trouve être normal à la surface de ce cône, sans être perpendiculaire à l'arête de cette surface qui passe par le point, correspond, sur le développement du cône, un point d'inflexion de la transformée de la section..... 288

Construire les projections, la vraie grandeur et la transformée de la courbe d'intersection d'un cylindre droit de révolution, dont l'axe est perpendiculaire au plan horizontal, et d'un plan quelconque..... 290

Développement d'un cylindre quelconque..... 293

Un cône droit de révolution étant donné, on demande de construire : 1° les projections et la vraie grandeur de l'une de ses sections elliptiques; 2° le développement de la surface; 3° la transformée de la section..... 297

Transformée d'une section hyperbolique d'un cône droit de révolution..... 300

Transformée d'une section parabolique d'un cône droit de révolution..... 301

Section plane des surfaces de révolution.

Construire les projections et la vraie grandeur de la section par un plan d'une surface de révolution quelconque..... 302

Théorème. — Lorsqu'une surface de révolution est tout à la fois touchée et coupée par un plan, le point de contact est un point double de la section..... 305

Trouver les projections et la vraie grandeur de la courbe d'intersection d'une surface de révolution du second degré avec un plan quelconque..... 310

Sections planes de l'hyperboloïde de révolution à une nappe..... 312

Intersection d'une droite et d'une surface.

Construire l'intersection d'une sphère et d'une ligne droite..... 318

Construire l'intersection d'un ellipsoïde de révolution et d'une droite..... 318

Construire les points communs à une droite et à un paraboloïde de révolution..... 319

CHAPITRE VI

INTERSECTION DE DEUX SURFACES COURBES

Construire l'intersection de deux cônes dont les bases sont dans un même plan..... 319

Construire l'intersection de deux cônes dont les bases sont dans deux plans différents..... 325

Construire l'intersection d'un cône et d'un cylindre..... 326

Construire l'intersection de deux cylindres..... 327

Des points doubles dans l'intersection des surfaces. — Points doubles de l'espace.

Pages.

Théorème. — Lorsqu'une courbe de degré m a un point double, tout cône dont le sommet est en ce point et qui passe par la courbe, est de degré $m-2$ 328
Corollaire. — Lorsque la courbe commune à deux surfaces du second degré présente un point double, le cône dont le sommet est en ce point et qui contient cette courbe est du second degré 329
Théorème. — Il existe six directions dans lesquelles un plan coupe, suivant des courbes homothétiques, deux surfaces du second degré 329
Théorème. — Les six directions dans lesquelles un plan coupe deux surfaces du second degré suivant des courbes homothétiques sont communes à ces surfaces, et à toutes celles, de même degré, qui passent par leur intersection 329
Corollaire. — Tout plan cyclique commun à deux surfaces du second degré est aussi commun aux surfaces du même degré passant par l'intersection des deux premières 329
Simplification de la construction des tangentes aux points doubles 329
Construction des tangentes aux points doubles de l'intersection de deux surfaces coniques ou cylindriques 330
Application. — Deux cylindres reposent tangentiellement sur le plan horizontal et ont pour directrices deux cercles du plan vertical; on demande de construire les tangentes aux points doubles de l'intersection de ces surfaces 335
Théorème. — Les tangentes au point double de l'intersection de deux surfaces coniques forment un faisceau harmonique avec les deux génératrices de ces surfaces qui se croisent en ce point : les couples de rayons conjugués sont, d'une part, les deux tangentes, de l'autre, les deux génératrices. 335
Construire les tangentes au point double de l'intersection de deux cônes, d'un cône et d'un cylindre ou de deux cylindres de même base 336
Points doubles au sommet d'une surface conique 337

Des points doubles en projection.

Détermination de la droite de jonction des points doubles en projection de la courbe commune à deux surfaces du second ordre 338
Dans le cas de deux surfaces du second degré, la courbe d'intersection a, au plus, deux points doubles en projection sur chacun des plans coordonnés 339
Construire la droite des points doubles en projection de l'intersection de deux cônes, dont les bases sont : 1° dans un même plan, 2° dans des plans différents 339
Construire la droite des points doubles en projection de l'intersection d'un cylindre et d'un cône 340
Construire la droite des points doubles en projection de l'intersection de deux cylindres 340

Théorèmes servant à faciliter la construction des projections de l'intersection des surfaces du second degré.

Théorème I. — L'intersection de deux surfaces du second degré est du quatrième degré 341
Théorème II. — Lorsque deux surfaces du second ordre se coupent suivant une première courbe plane, leur intersection se complète par une seconde courbe plane 341
Corollaire. — Lorsque deux surfaces coniques du second ordre sont tangentes l'une à l'autre suivant une génératrice commune, leur intersection se compose d'une droite double et d'une conique 341
Théorème III (voy. § 475) 341
Corollaire I (voy. § 476) 341
Corollaire II (voy. § 477) 341
Corollaire III. — Quand deux surfaces du second degré se touchent suivant une ligne, cette ligne est une conique 341
Théorème IV. — Lorsque deux surfaces du second degré ont un plan de symétrie commun, leur intersection se projette sur tout plan parallèle à ce plan de symétrie suivant une conique 342

Pages.

Remarque. — Lorsque les conditions des deux derniers théorèmes sont simultanément vérifiées, la projection de la courbe d'intersection sur tout plan parallèle au plan de symétrie est généralement un système de deux droites..... 342

Théorème V. — L'intersection de deux surfaces homothétiques du second degré est un système de deux coniques dont une se trouve à l'infini..... 342

Théorème VI. — Les sections faites par un même plan sur deux surfaces du second ordre circonscrites l'une à l'autre sont des coniques doublement tangentes..... 342

Corollaire. — Si le plan sécant touche l'une des surfaces circonscrites en un de ses ombilics, il coupera l'autre suivant une conique ayant pour foyer l'ombilic, et pour directrice correspondante la droite de rencontre du plan sécant et de celui de la courbe de contact..... 343

Théorème VII. — Lorsque deux cônes du second degré ont un plan tangent commun et que leurs génératrices de contact sont parallèles, le cylindre conduit, dans la direction de ces génératrices de contact, par la courbe d'intersection des deux cônes, est aussi du second degré..... 343

Détermination des branches infinies de la courbe commune à deux surfaces coniques ou cylindriques.

Généralités..... 343

Premier cas. — Les deux surfaces sont deux cônes..... 343

Deuxième cas. — Les deux surfaces sont un cône et un cylindre..... 347

Troisième cas. — Les deux surfaces sont deux cylindres..... 353

Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans le même plan.

Construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont concourants..... 356

Théorème. — Si deux surfaces de révolution et du second degré ont leurs axes dans un même plan, la projection de la ligne commune à ces surfaces sur un plan parallèle aux axes est : 1° une parabole quand les deux axes peuvent être considérés comme parallèles; 2° une ellipse quand une seule des surfaces est un ellipsoïde aplati; 3° une hyperbole dans tous les autres cas..... 363

Théorème de M. Catalan. — Quand les sections méridiennes de deux surfaces de révolution et du second degré ont au point de rencontre des axes de rotation un foyer commun, la projection de la ligne commune aux deux surfaces sur le plan de ces axes est un système de deux droites..... 363

Construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont parallèles..... 364

Intersection d'une sphère et d'une surface de révolution du second degré..... 364

EXERCICES SUR LES CHAPITRES V^bis ET VI

Problème I. — Construire, à l'aide de ses sommets, la trace verticale d'un cône dont la base est un cercle situé sur le plan horizontal et dont le sommet, placé dans le dièdre 2, appartient au plan de profil mené par le centre de la base..... 365

Problème II. — Construire les projections de l'intersection d'un hyperboloïde de révolution dont l'axe z, z' est vertical, avec un plan passant par son centre et par une tangente à sa trace horizontale, menée par le point de cette trace le plus éloigné de la ligne de terre..... 366

Théorème I. — Tout plan parallèle à l'un des plans tangents en un point d'une surface de second ordre, coupe cette surface et celle d'un cône qui a pour base une section plane quelconque de cette même surface, et pour sommet le point de contact du plan tangent, suivant deux courbes homothétiques entre elles..... 366

Problème III. — On donne un ellipsoïde de révolution dont l'axe est vertical et un plan quelconque; on demande, sans tracer la rencontre du plan et de l'ellipsoïde, de construire la trace verticale d'un cône qui aurait pour directrice cette ligne de rencontre, et pour sommet le point de l'équateur le plus voisin du plan vertical..... 367

Pages.

Problème IV. — Construire, par le secours du théorème I, les points limites dans le sens latéral de la section plane d'un ellipsoïde de révolution..... 367

Problème V. — On donne un cylindre de révolution vertical, ainsi que deux points placés sur l'une des génératrices du contour apparent vertical de cette surface, et on demande de construire : 1° les projections de la ligne minimum qui unit ces deux points et coupe toutes les génératrices de la surface; 2° le lieu des traces horizontales des tangentes menées aux divers points de cette ligne; 3° la trace horizontale d'un cône mené par la même ligne et dont le sommet se trouve sur l'axe du cylindre..... 368

Problème VI. — Construire la trace horizontale d'un cylindre ayant pour directrice l'hélice dont on vient de tracer les projections, et pour direction de ses génératrices l'une des tangentes à cette courbe... 369

Problème VII. — Reprendre, en conservant la directrice et la direction de la projection horizontale des génératrices, le problème précédent, mais en diminuant, puis en augmentant l'angle que font ces génératrices avec le plan horizontal..... 370

Problème VIII. — A un paraboloïde hyberbolique, mener un plan tangent par un point de la surface... 370

Problème inverse. — Par une génératrice d'un paraboloïde, on fait passer un plan quelconque et on demande le point en lequel il touche la surface..... 371

Problème IX. — En conservant les données de la dernière épure, construire : 1° un plan tangent au paraboloïde parallèle à un plan donné; 2° le second plan directeur, le sommet, l'axe et les plans principaux de cette surface; 3° sa courbe de contact avec un cône circonscrit; 4° ses contours apparents; 5° sa section par un plan quelconque..... 371

Théorème II. — La courbe de contact d'un cône circonscrit au paraboloïde hyperbolique est une hyperbole et celle d'un cylindre circonscrit une parabole..... 372

Problème X. — On donne un tétraèdre régulier dont une arête se_1 est placée sur le plan horizontal de projection et dont les faces font avec ce même plan horizontal des angles égaux. Dans ce tétraèdre on inscrit un cône de sommet s et un octaèdre régulier dont les sommets sont les milieux des arêtes du tétraèdre. On propose de construire la projection horizontale seulement des parties du cône solide comprises entre le tétraèdre et l'octaèdre..... 372

Problème XI. — Étant donné un cube dont une diagonale est verticale, on propose de représenter par ses deux projections, la partie de la surface de ce cube à l'extérieur de la sphère tangente à ses côtés, et du cylindre de révolution qui a pour axe l'une des arêtes du cube et pour rayon la moitié du côté de ce polyèdre..... 374

Théorème III. — Tout plan bitangent au tore, le coupe suivant deux cercles. Ces cercles sont égaux à celui qui passe par les centres des sections méridiennes; leurs centres se trouvent sur une perpendiculaire à l'axe menée par le centre de la surface, de part et d'autre de celui-ci, à une distance égale au rayon du cercle générateur; enfin leurs projections sur un plan perpendiculaire à l'axe ont un foyer commun au pied de ce même axe. Ce théorème est dû à M. Yvon Villarceau..... 375

Théorème IV. — La section du tore par une sphère bitangente est un système de quatre cercles, deux à l'infini et deux à distance finie..... 377

Problème XII. — Par un point quelconque de la surface d'un tore mener quatre cercles..... 377

Remarque. — Les courbes de rencontre d'un tore avec ses sphères bitangentes ne diffèrent en rien des sections du tore par ses plans bitangents..... 377

Problème XIII. — Construire l'intersection d'un tore, dont l'axe est vertical, par un plan bitangent parallèle à la ligne de terre. Sur l'épure finale on représentera la portion du corps comprise dans le tore et placée en arrière du plan bitangent..... 378

Problème XIV. — Construire les points de rencontre d'un tore et d'une droite passant par son centre... 378

Problème XV. — Construire les contours apparents de la surface engendrée par la rotation complète d'un cercle autour d'un axe vertical mené par l'un des foyers de sa projection horizontale..... 378

Problème XVI. — On donne : 1° un hémisphère tangent au plan vertical, reposant par sa base sur le plan horizontal et dont le rayon est égal à $0^m,100$; 2° un tore dont l'axe est vertical, à $0^m,170$ du plan vertical et dans le plan de profil mené par le centre de la sphère dont l'hémisphère fait partie; le

Pages.

centre du cercle méridien de ce tore est à $0^m,070$ de son axe et à $0^m,051$ du plan horizontal; le rayon de ce cercle méridien est égal à $0^m,049$. On demande de représenter l'hémisphère supposé plein et existant seul, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le tore..... 379

Problème XVII. — Étant donné, dans la position habituelle, un tore dont le rayon du cercle générateur est égal à celui du collier, on demande de déterminer : 1° l'intersection de cette surface par celui de ses plans tangents qui le touche au point du collier le plus éloigné du plan vertical; 2° les contours apparents de la surface engendrée par la rotation de cette intersection autour de son axe vertical; 3° l'intersection de cette dernière surface par les plans perpendiculaires au plan vertical qui la touche au point double de ses méridiennes..... 380

Théorème V. — Les sections faites dans un tore par des plans parallèles à l'axe et qui en sont distantes d'une quantité égale au rayon du cercle méridien sont des ovales de CASSINI ou des LEMNISCATES.... 380

Théorème VI. — Si l'on coupe un tore par un plan quelconque parallèle à son axe, la surface engendrée par une rotation complète de cette section, autour de son axe parallèle à celui du tore, est coupée par un plan bitangent suivant deux cercles..... 381

Problème XVIII. — Représenter les projections de la portion d'un tore comprise dans l'intérieur d'une pyramide hexagonale circonscrite au cône qui touche le tore par deux parallèles..... 382

Théorème VII. — Tout plan doublement tangent à la surface engendrée par une conique tournant autour d'une droite située dans son plan coupe cette surface suivant deux coniques qui, projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, ont un foyer commun au pied de cet axe..... 382

Problème XIX. — Trouver l'intersection de deux cônes ayant pour base commune un cercle placé sur le plan horizontal, et dont les sommets se projettent aux extrémités du diamètre de ce cercle parallèle à la ligne de terre..... 382

Problème XX. — Déterminer l'intersection d'un cône et d'un cylindre qui reposent par deux bases circulaires sur le plan horizontal; ces bases se touchent sur un diamètre parallèle à la ligne de terre, et la projection horizontale du sommet du cône se confond avec leur point de contact; le cylindre est vertical..... 383

Problème XXI. — Construire l'intersection d'une sphère et d'un cône ayant son sommet au centre de la sphère, puis développer la surface de ce cône..... 383

Problème XXII. — Construire la rencontre d'un ellipsoïde aplati, dont l'axe est vertical, avec un cylindre dont l'axe, dirigé parallèlement à la ligne de terre, passe par le centre de l'ellipsoïde; on représentera le cylindre entaillé par l'ellipsoïde..... 384

Problème XXIII. — Représenter le corps constitué par la partie d'un hyperboloïde de révolution extérieure à un cône et comprise entre deux plans horizontaux équidistants du collier, dont l'un est le plan horizontal de projection. L'hyperboloïde est défini par son axe, supposé vertical, par sa trace horizontale γ, par la projection horizontale γ_1 de son collier, et par l'angle de ses génératrices avec le plan horizontal, qui est de 45 degrés. Le cône a son sommet s dans le plan horizontal de projection; ses génératrices sont parallèles à celles de l'hyperboloïde..... 385

Problème XXIV. — On donne : 1° un cylindre qui a pour trace horizontale et pour contour apparent relatif au plan vertical le cercle γ et les droites de front bg, $b'g'$; sb^1, $b'b_1'$; 2° un cône dont la trace horizontale est un autre cercle γ_1 qui touche γ au point s et dont le sommet s, s' se trouve situé sur la génératrice bg, $b'g'$ du cylindre. On demande : 1° de trouver les projections de l'intersection du cône et du cylindre; 2° de représenter le cylindre supposé plein et existant seul, en supprimant les parties de ce corps comprises dans le cône..... 386

Problème XXV. — Construire les projections de l'intersection d'un tore et d'un cône de révolution. L'axe du tore ω, z' est vertical à $0^m,130$ du plan vertical de projection; le cercle méridien a $0^m,055$ de rayon, il est tangent à l'axe du tore et au plan horizontal de projection. Le cône touche le plan horizontal suivant une génératrice $s\omega$ parallèle à la ligne de terre et rencontrant l'axe du tore; son sommet s est à $0^m,055$ de l'axe du tore et son angle au sommet est de 45 degrés. On représentera le cône supposé plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le tore..... 388

Problème XXVI. — Par un point (ω', z) situé dans le premier dièdre à 100 millimètres de chacun des plans

Pages

de projection on mène une parallèle (z_1', z_1) à la ligne de terre et une verticale (z, z'). La parallèle à la ligne de terre est l'axe d'un tore dont le cercle méridien, tangent à cet axe en (ω', z), a 45 millimètres de rayon. La verticale est l'axe d'un second tore concentrique au premier, dont le rayon du cercle méridien, égal à celui de son collier, vaut 30 millimètres. On demande de construire les projections de l'intersection des surfaces ainsi définies. On représentera le corps constitué par l'ensemble des deux tores..... 390

Problème XXVII. — Construire les projections de l'intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'un cône. L'axe z, z' de l'hyperboloïde est vertical à $0^m,100$ du plan vertical et au milieu de la feuille; le cercle de gorge c, c', dont la cote vaut $0^m,080$, à $0^m,030$ de rayon, et les génératrices rectilignes de cette surface font avec l'horizon un angle de 45 degrés. Le cône, dont le sommet s, s' se trouve dans le plan de profil mené par l'axe z, z', à $0^m,050$ en avant de cet axe, et à $0^m,040$ au-dessus du cercle de gorge, a pour trace horizontale le cercle γ, décrit du point z comme centre, avec un rayon égal à $0^m,070$. On représentera l'hyperboloïde supposé plein et limité, d'une part, au plan horizontal dont la trace est Q', à la cote $0^m,190$, de l'autre, au plan horizontal de projection, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cône..... 391

Problème XXVIII. — On donne une sphère tangente aux deux plans de projection; dans le plan d'un cercle de front de cette sphère, à une distance du centre de ce cercle égale à la moitié du rayon du même cercle, on mène une verticale ab, $a'b'$; sur la partie de cette verticale comprise entre son point supérieur de rencontre avec la sphère et le plan horizontal de projection, on construit un triangle équilatéral, et on demande de représenter le corps formé par la portion de la sphère solide extérieure au double cône qu'engendre le triangle équilatéral en tournant autour de son côté vertical..... 393

Problème XXIX. — Étant donné un hyperboloïde de révolution par son axe z, z', supposé vertical, et par une g, g' de ses génératrices principales, on propose de construire les projections de l'une des parties détachées dans le solide compris entre l'hyperboloïde et son cône asymptote par la surface qu'engendrent les normales menées des divers points de g, g' à l'hyperboloïde donné; ce corps sera en outre limité au plan horizontal de projection et au plan horizontal dont la trace est Q'. 394

Problème XXX. — On propose : 1° de construire les projections de lignes d'intersection d'un hémisphère et des faces d'un cube avec un hyperboloïde de révolution à une nappe; 2° de représenter le cube supposé solide, en enlevant la partie de ce corps comprise dans l'hémisphère et dans l'hyperboloïde. Le cube ($abde$, $a'b'd'e'$), dont le côté a $0^m,200$ de longueur, dont la face inférieure et la face postérieure sont respectivement situées dans les deux plans de projection, contient entièrement l'hémisphère (h, h'); cet hémisphère a pour base le cercle (h', h'_1) inscrit dans la face antérieure de ce cube. L'hyperboloïde a son axe (z, z') vertical, à $0^m,135$ du plan vertical de projection et à égale distance des faces de profil du cube; la cote du centre (o, o') de cette surface est de $0^m,132$; les rayons de son collier (c, c') et de sa trace horizontale (θ) ont respectivement $0^m,035$ et $0^m,100$ de longueur..... 396

Problème XXXI. — Construire les projections de l'intersection de deux hyperboloïdes de révolution H, H_1, ayant une génératrice commune verticale g, g' et respectivement pour axe deux droites de front (z, z') (z_1, z'_1) non situées dans un même plan et inclinées de 45 degrés sur le plan horizontal. On représentera les parties des surfaces hyperboloïdes comprises entre : 1° les deux plans de projection; 2° le plan horizontal dont la trace est Q'; 3° le plan qui touche l'hyperboloïde H_1 au point de son collier le plus éloigné du plan vertical de projection..... 397

CHAPITRE VII

PROJECTIONS COTÉES

Notions préliminaires..... 402

Représentation du point et de la ligne droite..... 402

Pages.
Théorème. — Le produit de la pente d'une droite par son intervalle est égal à l'unité..... 403
Étant donnée une droite cotée en deux points, la graduer..... 403
Sur une droite graduée placer un point de cote donnée; inversement, trouver la cote d'un point placé sur une droite graduée..... 404
Construire la trace d'une droite..... 404
Distance de deux points..... 404
Par un point donné mener une droite parallèle à une droite donnée..... 405
Reconnaître si deux droites se coupent et, dans ce cas, trouver la cote du point de rencontre..... 405
Représentation du plan..... 407
Connaissant trois points d'un plan, déterminer une de ses lignes de plus grande pente..... 407
Connaissant la projection d'un point situé dans un plan donné, trouver sa cote..... 408
Par un point d'un plan, tracer dans le plan une droite dont la pente est donnée..... 408
Par une droite donnée, mener un plan de pente donnée..... 409
Trouver l'intersection de deux plans donnés par leurs lignes de plus grande pente..... 409
Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan..... 411
Conditions de perpendicularité d'une droite et d'un plan..... 412
Mener d'un point donné un plan perpendiculaire sur une droite..... 412
Mener d'un point une droite perpendiculaire à un plan..... 413
Trouver : 1° la distance d'un point à un plan; 2° la distance d'un point à une droite; 3° la plus courte distance de deux droites..... 413
Construire l'angle de deux droites..... 413
Construire l'angle de deux plans..... 413
Représentation des surfaces..... 414
Construire l'intersection d'une surface topographique par un plan quelconque..... 415
Déterminer l'intersection de deux surfaces topographiques..... 415
Connaissant la projection d'un point d'une surface topographique trouver sa cote..... 415
Courbes intercalaires..... 416
Mener un plan tangent en un point d'une surface topographique..... 41
Tracer sur une surface topographique une ligne dont la pente est donnée, connaissant un point de passage de cette ligne..... 416

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES

ERRATA

Pages	lignes	*au lieu de :*	*lisez :*
15	24	cette dernière,	ce dernier
15	26	les	le
18	19	Sc	Sc_1
24	11	$m'm_1$	$m'm'_1$
27	20	vingt-quatre	vingt-trois
29	1	cette ligne	cette ligne et
36	14	m	m'
38	7	§ 117	§ 116
38	40	z'	z'_1
38	41	P_1	P'_1
39	8	z'	z
51	24	d'	d
63	23	$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$	$\alpha+B>\frac{\pi}{2}$
65	14	v_1	v
74	1	op_2	$o'p'_2, op_2$
88	29	ce	le
89	1	elles sont	sont
107	17	274	275
112	38	$\omega_2 M_3$	$\omega_3 M_3$
119	1 et 2	qui coupera sur cette droite un point o et β en F_1	qui coupera cette droite au point o et β en F
120	1	225	229
120	16	76	75
122	17	sd'	$s'd'$
163	20	(d_1, d'_1)	(d, d'_1)
176	14	aussi la traverser	aussi traverser c
188	34	$z'\theta'_1$	$f'\theta'_1$
188	41	γ	γ_1
190	23	dans deux plans	dans des plans
191	10	$o's$	$o's'$
194	29	s'il peut	s'ils peuvent
194	30	382	411
200	21	sS, s_1S_1	$s'S, s'_1S_1$
208	29	d', d	c'_1, c_1
208	30	γ, γ'	e'_1, e_1

Pages	lignes	*au lieu de :*	*lisez :*
221	43	sa base; C	sa base C';
227	7	$x = t \pm R$	$x = \pm R$
231	10	G_1; ou G_2	G_1 ou G_2;
241	7	519	517
256	30	h'_1	h'_2
261	4	φ'_2	φ'_1
262	16	RM	$\pm$ RM
267	13	$\frac{p^2}{su}$	$\frac{r^2}{su}$
273	2	cercles	courbes
273	12	hyperboloïdes se touchent	hyperboloïdes se touchent le long d'une génératrice rectiligne
296	14	t_1 M	t M_1
296	38	609	592
296	43	grandeur	grandeur de l'angle
309	4	fig. o_3	fig. o_4
309	13	fig. o_4	fig. o_3
329	35	591	727
340	25	cette trace parallèle	cette parallèle
344	2	528	363
344	27	R, R	R, R_1
347	14	759	475
358	22	les axes	les projections verticales des axes
359	11	757	758
361	17	m'_1	m'
361	18	γ_1	γ'
368	35	624	630
375	2	de ce cube	de ce cube (fig. 413, pl. LV).
386	26	touche au point	touche γ au point
391	26	les sommets s, s' se trouvent	le sommet s, s' se trouve
392	2	menée par cs	c menée par s
	17	une perpendiculaire	un plan perpendiculaire

MOTTEROZ, Adm.-Direct. des Imprimeries réunies, A, rue Mignon, 2, Paris.

Pages.

Remarque. — Lorsque les conditions des deux derniers théorèmes sont simultanément vérifiées, la projection de la courbe d'intersection sur tout plan parallèle au plan de symétrie est généralement un système de deux droites..... 342

Théorème V. — L'intersection de deux surfaces homothétiques du second degré est un système de deux coniques dont une se trouve à l'infini..... 342

Théorème VI. — Les sections faites par un même plan sur deux surfaces du second ordre circonscrites l'une à l'autre sont des coniques doublement tangentes..... 342

Corollaire. — Si le plan sécant touche l'une des surfaces circonscrites en un de ses ombilics, il coupera l'autre suivant une conique ayant pour foyer l'ombilic, et pour directrice correspondante la droite de rencontre du plan sécant et de celui de la courbe de contact..... 343

Théorème VII. — Lorsque deux cônes du second degré ont un plan tangent commun et que leurs génératrices de contact sont parallèles, le cylindre conduit, dans la direction de ces génératrices de contact, par la courbe d'intersection des deux cônes, est aussi du second degré..... 343

Détermination des branches infinies de la courbe commune à deux surfaces coniques ou cylindriques.

Généralités..... 343

Premier cas. — Les deux surfaces sont deux cônes..... 343

Deuxième cas. — Les deux surfaces sont un cône et un cylindre..... 347

Troisième cas. — Les deux surfaces sont deux cylindres..... 353

Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans le même plan.

Construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont concourants..... 356

Théorème. — Si deux surfaces de révolution et du second degré ont leurs axes dans un même plan, la projection de la ligne commune à ces surfaces sur un plan parallèle aux axes est : 1° une parabole quand les deux axes peuvent être considérés comme parallèles; 2° une ellipse quand une seule des surfaces est un ellipsoïde aplati; 3° une hyperbole dans tous les autres cas..... 363

Théorème de M. Catalan. — Quand les sections méridiennes de deux surfaces de révolution et du second degré ont au point de rencontre des axes de rotation un foyer commun, la projection de la ligne commune aux deux surfaces sur le plan de ces axes est un système de deux droites..... 363

Construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont parallèles..... 364

Intersection d'une sphère et d'une surface de révolution du second degré..... 364

EXERCICES SUR LES CHAPITRES V^bis ET VI

Problème I. — Construire, à l'aide de ses sommets, la trace verticale d'un cône dont la base est un cercle situé sur le plan horizontal et dont le sommet, placé dans le dièdre 2, appartient au plan de profil mené par le centre de la base..... 365

Problème II. — Construire les projections de l'intersection d'un hyperboloïde de révolution dont l'axe z, z' est vertical, avec un plan passant par son centre et par une tangente à sa trace horizontale, menée par le point de cette trace le plus éloigné de la ligne de terre..... 366

Théorème I. — Tout plan parallèle à l'un des plans tangents en un point d'une surface de second ordre, coupe cette surface et celle d'un cône qui a pour base une section plane quelconque de cette même surface, et pour sommet le point de contact du plan tangent, suivant deux courbes homothétiques entre elles..... 366

Problème III. — On donne un ellipsoïde de révolution dont l'axe est vertical et un plan quelconque; on demande, sans tracer la rencontre du plan et de l'ellipsoïde, de construire la trace verticale d'un cône qui aurait pour directrice cette ligne de rencontre, et pour sommet le point de l'équateur le plus voisin du plan vertical..... 367